**Univerzitet u Zenici**
**Pedagoški fakultet**
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

**Zadatak br. 1**

(20%) a) Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale $d_1$ i $d_2$ sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, $a$ i $b$ su katete) izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

(20%) b) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom $\varphi$ kod vrha $P$ ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, $a$ i $b$ su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(60%) c) Visina iz vrha $A$ trougla $\triangle ABC$ presjeca stranicu $BC$ u tački $D$. Krug koji dodiruje stranicu $BC$ u tački $D$, presjeca stranicu $AB$ u tačkama $M$ i $N$, a stranicu $AC$ u tačkama $P$ i $Q$. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

**Zadatak br. 2**

(40%) a) Dat je krug $k(I, r)$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

(60%) b) Date su paralelne prave $a$ i $b$, tačka $M$ između njih i prava $c$ koja nije paralelna ni sa $a$, ni sa $b$. Konstruisati jednakokraki trougao $\triangle MAB$, sa osnovicom $AB$, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A, B) \| c$.

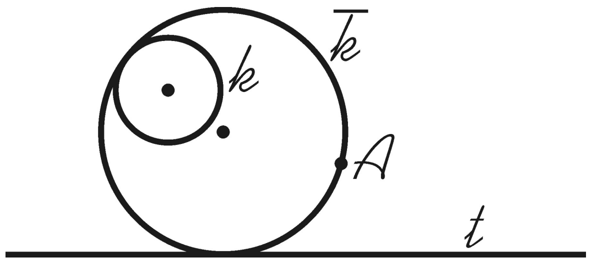
**Zadatak br. 3**

(20%) a) Za dva data kruga konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(20%) b) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug $k_1$ u tački $P$. Dokazati da su tačke $O_1$, $O_2$ i $P$ kolinearne.

(60%) c)

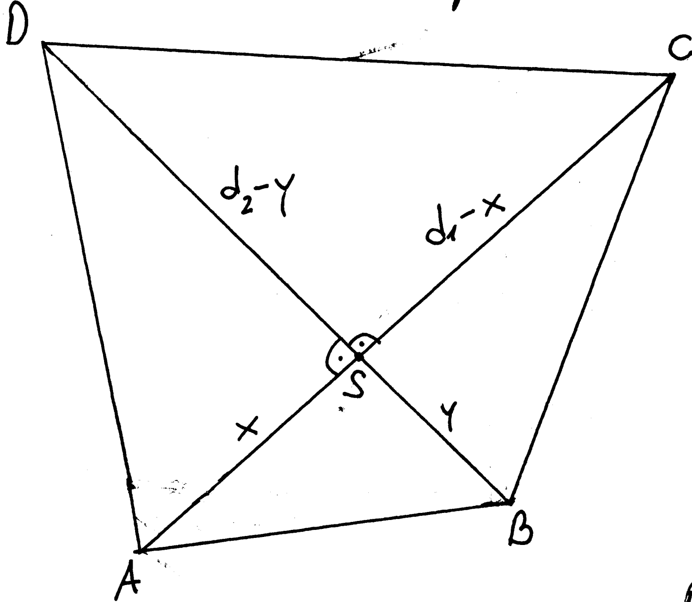
Dati je krug $k(O, r)$, tačka $A$ i prava $t$. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku $A$ i dodiruje krugove $k$ i pravu $t$ kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

**#** Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale $d_1$ i $d_2$ sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) izvesti formulu za površinu $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

Rj.




Tačku presjeka dijagonala označimo sa S, označimo sa x duž AS i sa Y duž BS.

Tada je $CS=d_1-x$, $DS=d_2-Y$

$P_{\triangle ABS}=\frac{x\cdot Y}{2}$, $P_{\triangle BCS}=\frac{Y\cdot(d_1-x)}{2}$

$P_{\triangle CDS}=\frac{(d_2-Y)(d_1-x)}{2}$, $P_{\triangle ASD}=\frac{x\cdot(d_2-Y)}{2}$

$$P_{\square ABCD}=P_{\triangle ABS}+P_{\triangle BCS}+P_{\triangle CDS}+P_{\triangle ASD}=\frac{\cancel{xY}+Yd_1-\cancel{xY}+d_1d_2\boxed{-d_2x}-d_1Y+\cancel{xY}\boxed{\cancel{+d_2x}}-\cancel{xY}}{2}$$

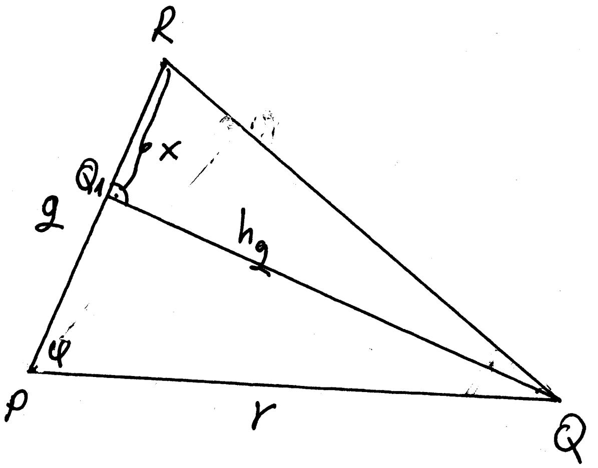
$$=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

tj. $P_{\square ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$

q.e.d.

(#) Neka je $\Delta PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom $\varphi$ kod vrha $P$ ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a \cdot b}{2}$, $a$ i $b$ katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $\underline{P=\frac{r \cdot g}{2}\sin\varphi}$.

Rj.




Neka je $QQ_1=h_g$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_g}{r} \quad \Rightarrow$$

$$h_g = r\sin\varphi \qquad \ldots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_g \cdot g}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(g-x)\,h_g}{2}+\frac{x \cdot h_g}{2}=\frac{g \cdot h_g}{2}$$

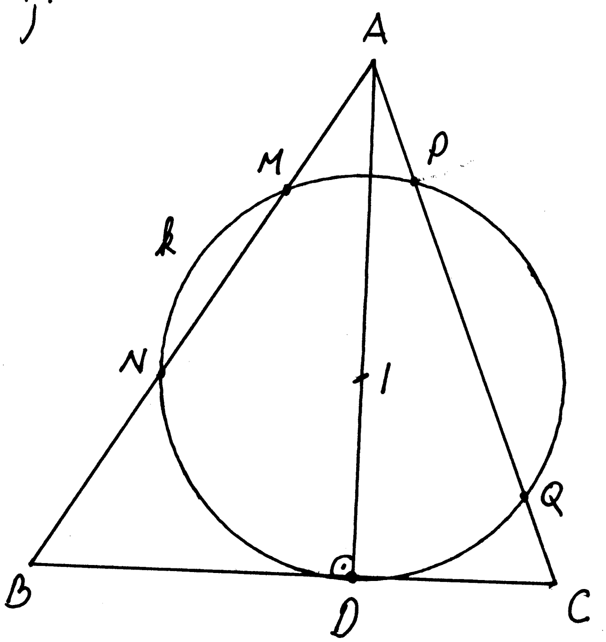
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_g \cdot g}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r \cdot g}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

(#) Visina iz vrha A trougla $\Delta ABC$ presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

Rj.:




Kako krug k dodiruje stranicu BC u tački D to je njegov centar I na visini AD.

$\Delta ABD$ pravougli

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad \ldots (1)$$

Dalje iz potencije tačke B u odnosu na krug k imamo

$$BD^2 = BN \cdot BM \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BN \cdot BM \\ &= AB^2 - (AB - AN)(AB - AM) \\ &= \cancel{AB^2} - \cancel{AB^2} + AB \cdot AM + AB\,AN - AM\,AN \end{aligned}$$

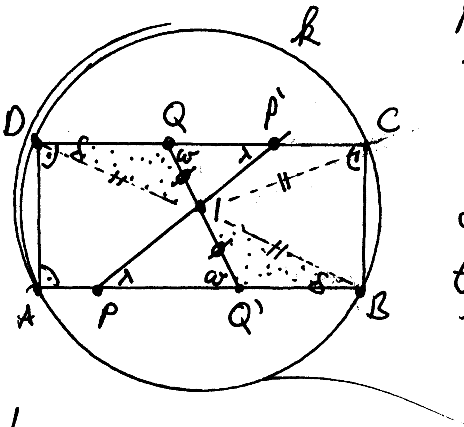
$$AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$$

q.e.d.

(#) Dat je krug $k$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije dvije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

Rj: Analiza

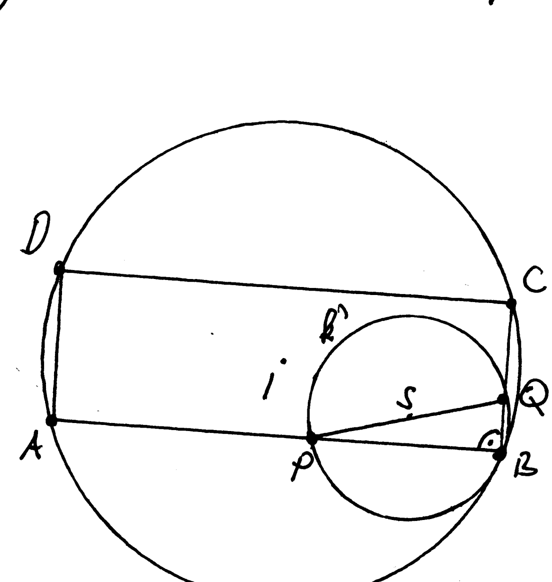
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi pravougaonik, gdje su tačke $P$ i $Q$ date tačke koje pripadaju stranicama pravougaonika.




Kako je ugao nad prečnikom prav to su dijagonale pravougaonika ujedno i prečnici od $k$ tj. $AC \cap BD = \{I\}$

I slučaj:
Tačke $P$ i $Q$ pripadaju suprotnim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in CD$. Neka je $p(P,I) \cap CD = \{P'\}$ i $p(Q,I) \cap AB = \{Q'\}$. Postavljamo pitanje: Da li je $\Delta PQ'I \cong \Delta IP'Q$? Da, ova dva trougla su podudarna
ZA VJEŽBU OVO RASMISLITI
(na osnovu $UUS \Rightarrow \Delta Q'BI \cong \Delta QDI \Rightarrow$ na osn. $UUS \Rightarrow \Delta PQ'I \cong \Delta P'QI$)
Sad kako možemo konstruisati tačke $P'$ i $Q'$ time možemo konstruisati i prave $p(P,Q')$, $p(Q,P')$ a time i traženi pravougaonik.

II slučaj
Tačke $P$ i $Q$ pripadaju susjednim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in BC$. Kako je $\measuredangle ABC = 90°$ To je i $\measuredangle PBQ = 90° \Rightarrow \Delta PBQ$ je pravougli. $\Rightarrow$ centar $S$ kruga opisanog oko $\Delta PBQ$ se nalazi na sredini $PQ$.



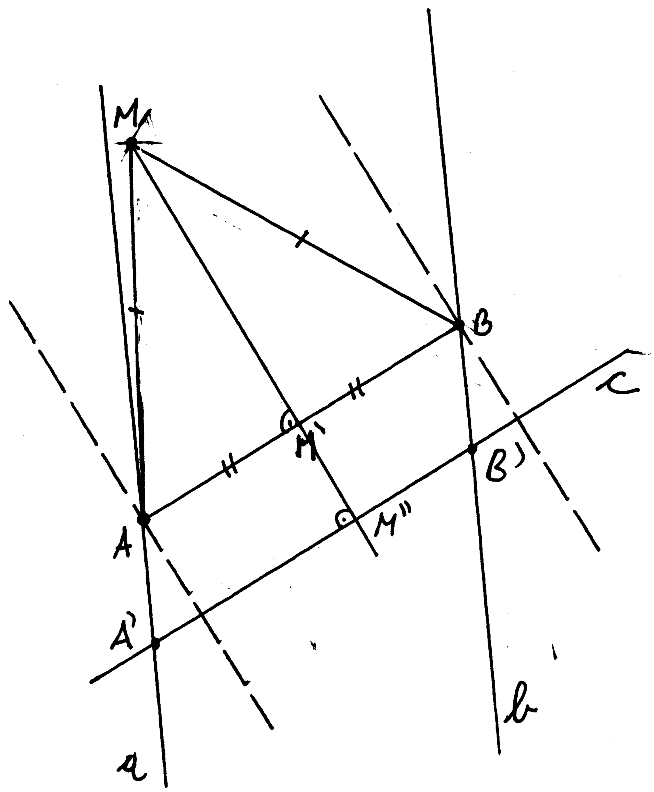

Kako su $P$ i $Q$ dvije date tačke, to nije teško konstruisati tačku $B$ a poslije nje i pravougaonik $ABCD$.

(#) Date su paralelne prave $a$ i $b$, tačka $M$ između njih i prava $c$ koja nije paralelna ni sa $a$, ni sa $b$. Konstruisati jednakokraki trougao $\Delta MAB$, sa osnovicom $AB$, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A,B) \parallel c$.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\Delta ABM$ traženi jednakokraki trougao takav da $A \in a$, $B \in b$, $a \parallel b$, $p(A,B) \parallel c$, $c \nparallel a$, $c \nparallel b$, $M$ tačka između pravih $a$ i $b$.




Ako iz vrha $M$ spustimo visinu $MM'$ na osnovicu $AB$ nije teško pokazati da je $AM' \cong BM'$ tj. da je $M'$ središte $AB$ (ovo možemo zaključiti iz $\Delta AM'M \cong \Delta BM'M$ gdje podudarnost trouglova slijedi iz SSU).

Dalje uvedimo oznake $c \cap a = \{A'\}$; $c \cap b = \{B'\}$, $p(M,M') \cap c = \{M''\}$.

Primjetimo da je $\square A'B'BA$ paralelogram (ZAŠTO?), pa je

$$AB \cong A'B'$$

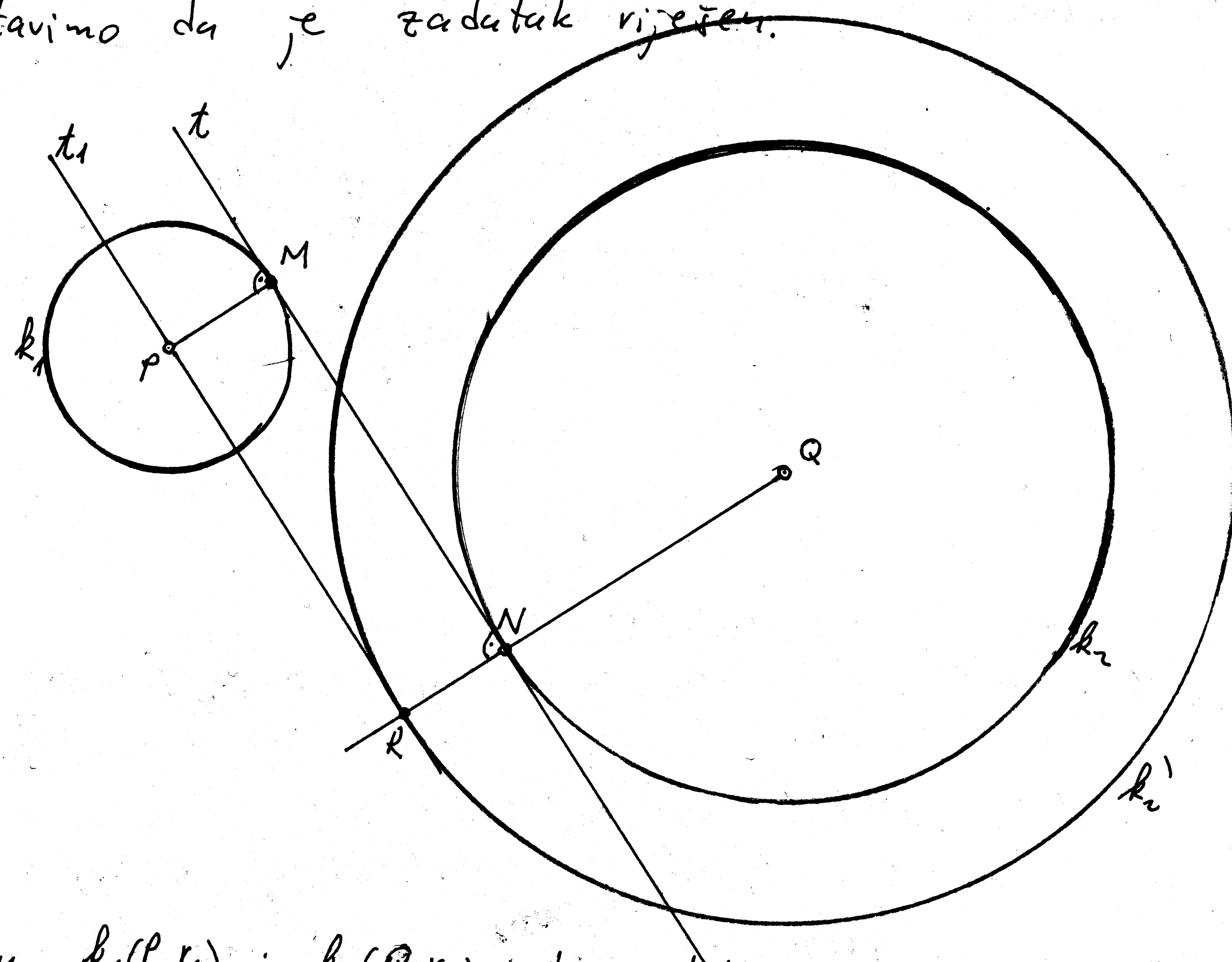
$\Rightarrow$ poznata nam je dužina od $\frac{1}{2}AB$.

Kako nam je data tačka $M$ i prava $c$ to tačku $M''$ možemo konstruisati ($\measuredangle MM''c = 90^\circ$). Kako se tačke $A$ i $B$ nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}AB$ od prave $p(M,M'')$, a poznate su nam prave $a$ i $b$, to tačke $A$ i $B$ nije teško konstruisati, a poslije njih i $\Delta ABM$.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.




Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je $t$ njihova zajednička tangenta. Označimo sa $M$ i $N$ tačke dodira tangente $t$ sa $k_1$ i $k_2$ redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

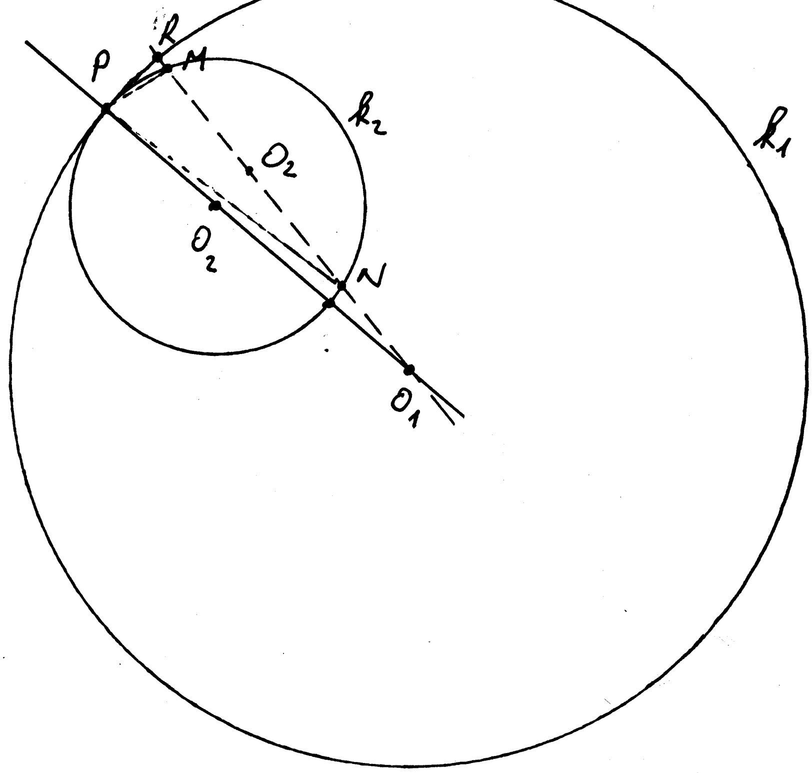
$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu $k_2'$ mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku $R$ (tangenta na kružnicu $k_2'$ iz tačke $P$).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu $t$.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug $k_1$ u tački $P$. Dokazati da su tačke $O_1, O_2$ i $P$ kolinearne.

Rj.




Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka $O_2$ ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je $MN$ prečnik kruga $k_2$. Recimo da je poredak $O_1 - N - O_2 - M$. Neka je $R$ tačka na $k_1$ t.d. $N - M - R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\sphericalangle MPN = 90°$. Kako je $\sphericalangle MPO_1 > \sphericalangle MPN \Rightarrow \sphericalangle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica $MO_1$ je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

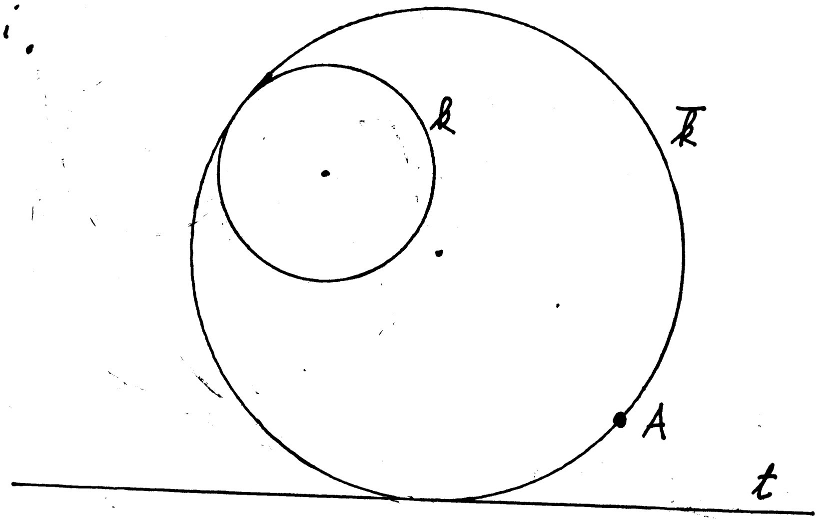
#kontradikcija

($PO_1$ i $RO_1$ su poluprečnici kruga $k_1$ i kako je $O_1 - M - R$ to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke $O_1$, $O_2$ i $P$ su kolinearne

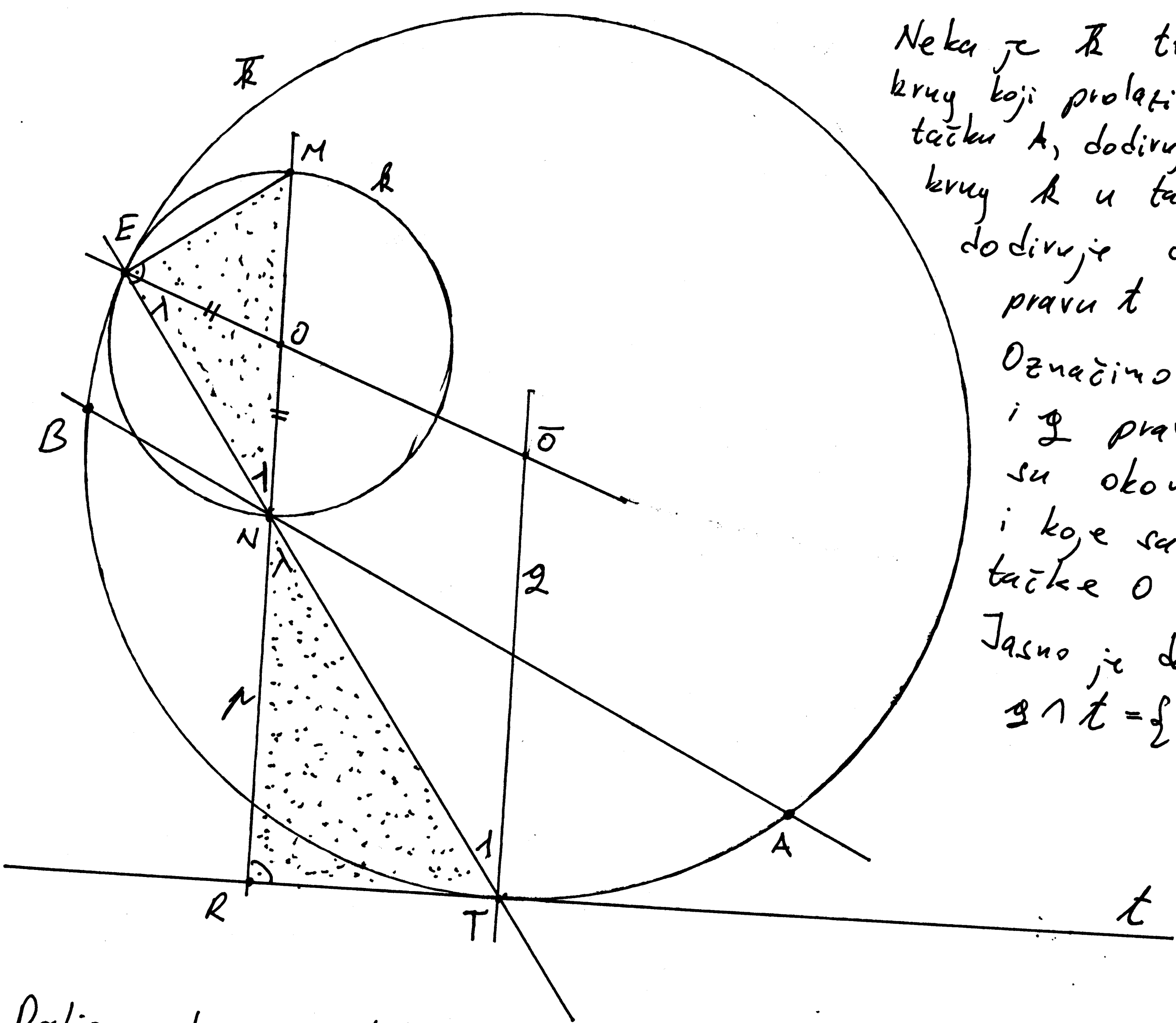
q.e.d.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka $A$ i prava $t$. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku $A$, i dodiruje krug $k$ i pravu $t$ kao na skici.




Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.




Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku $A$, dodiruje dati krug $k$ u tački $E$ i dodiruje datu pravu $t$ u tački $T$. Označimo sa $p$ i $q$ prave koje su okomite na $t$ i koje sadrže redom tačke $O$ i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$. Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku $O$ (ZAŠTO? Objasniti ovo). Posmatrajmo sad trouglove $\Delta EON$ i $\Delta E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako $\Delta EON$ je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj $p$ imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo $\Delta RTN$ i $\Delta ENM$. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao $\lambda$ pa je i treći ugao podudaran.

$$\Delta RTN \overset{(\text{slič. UUU})}{\Longrightarrow} \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots (1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap k = \{A, B\}$ t. d. $B-N-A$. Ako posmatramo krug $k$ imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \quad NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots (3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke $A, N, M, R$ to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku $B$ pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke $A$ i $B$ tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku $T$.
Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.