Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 22.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

b) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

c) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

d) Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

e) Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Zadatak br. 2

Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.

Zadatak br. 3

Odrediti sve transformacije podudarnosti u ravni koje preslikavaju polupravu h u samu sebe.

Zadatak br. 4

Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geq B_1C_1$ ako i samo ako je $\measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1$.

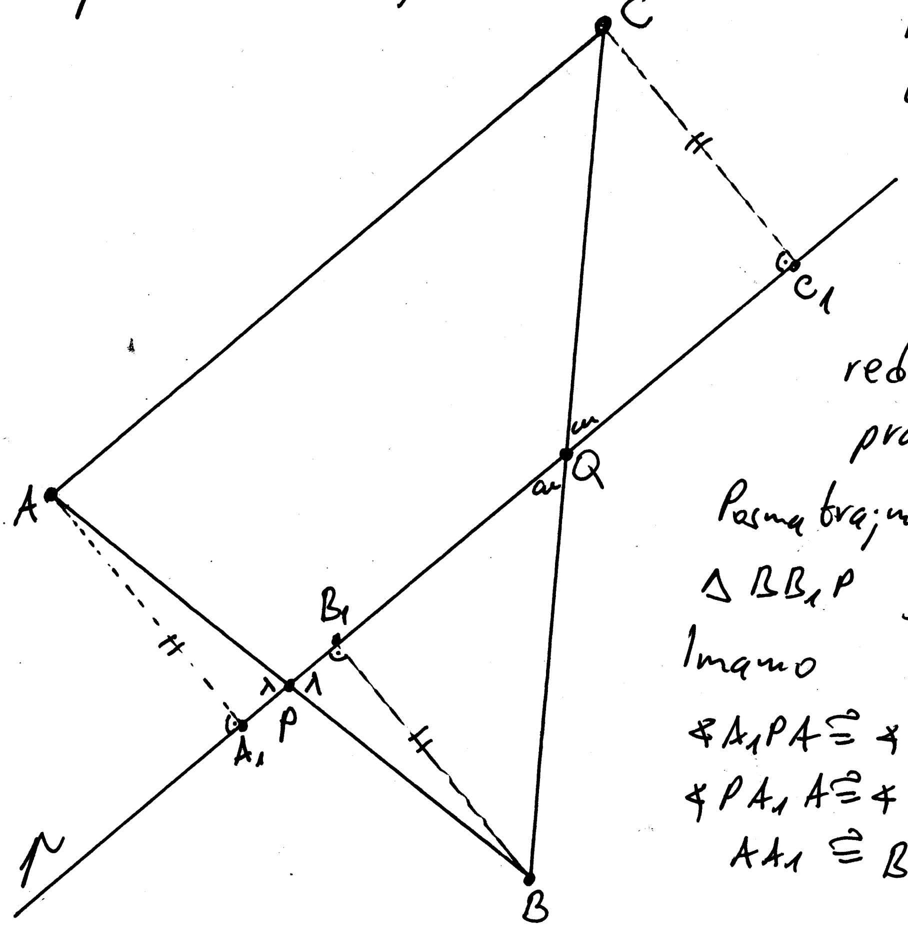
(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je raspored tački kao na slici. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.



Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

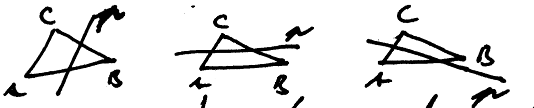
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A_1PA \cong \sphericalangle B_1PB = \lambda \\ \sphericalangle PA_1A \cong \sphericalangle PB_1B = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B_1QB \cong \sphericalangle C_1QC = \omega \\ \sphericalangle BB_1Q \cong \sphericalangle CC_1Q = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primijetiti da prava p prolazi kroz sredine stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

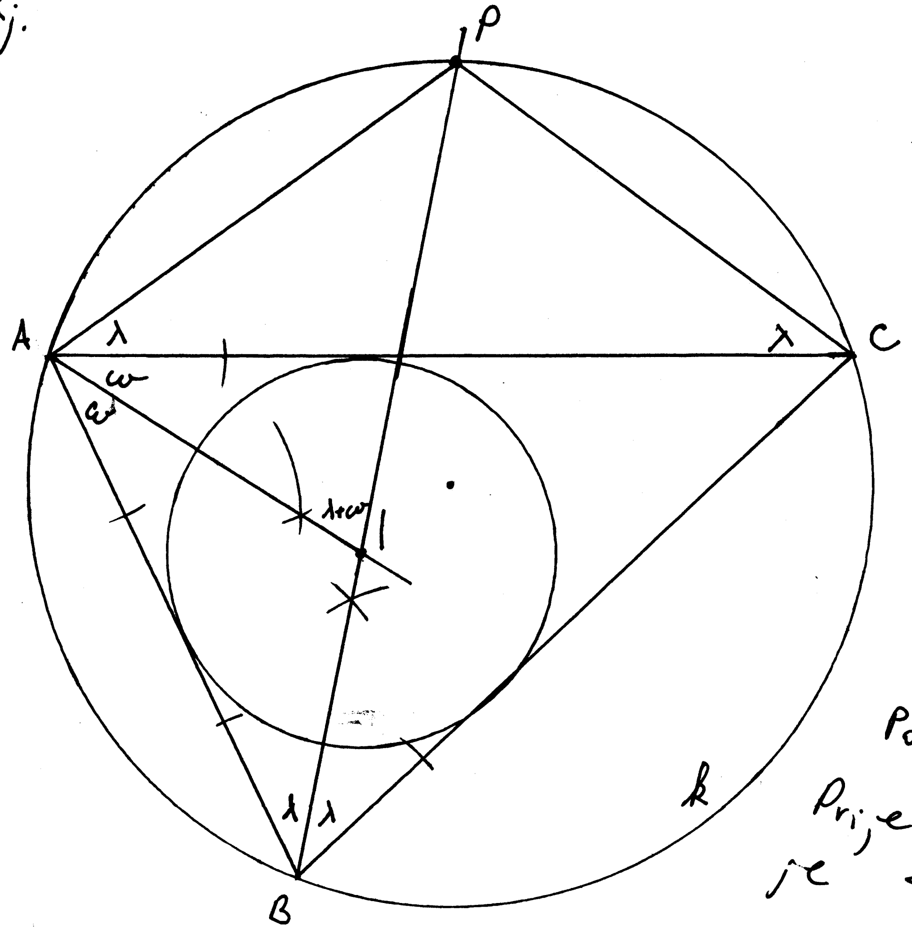
Diskusija



Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB<BC$), k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave pp$[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle CBP = \lambda$. Četvorougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \lambda$ i

$\measuredangle PCA = \measuredangle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad ΔAIP. Prije toga primjetimo da je $\measuredangle BAI \cong \measuredangle CAI = \omega$

(ZAŠTO?)

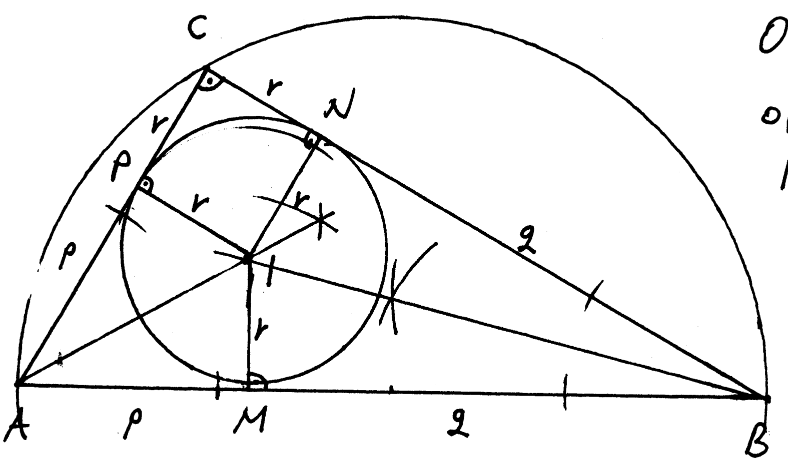
U trouglu ΔPAI $\measuredangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\measuredangle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\measuredangle PIA = \measuredangle ABI + \measuredangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\measuredangle PAI \cong \measuredangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk

q.e.d.

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je
$IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad /:2$$

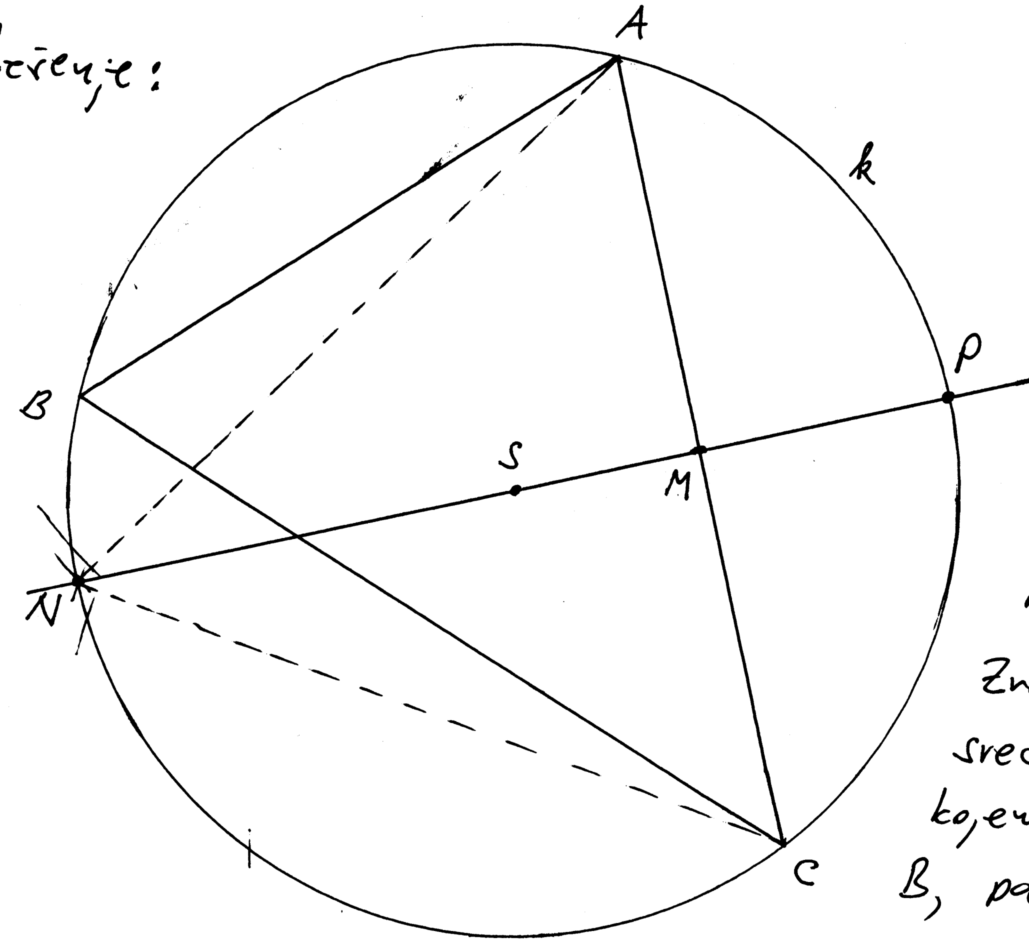
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, $AB < AC$
i neka je tačka N središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku preseka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \text{ (M sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

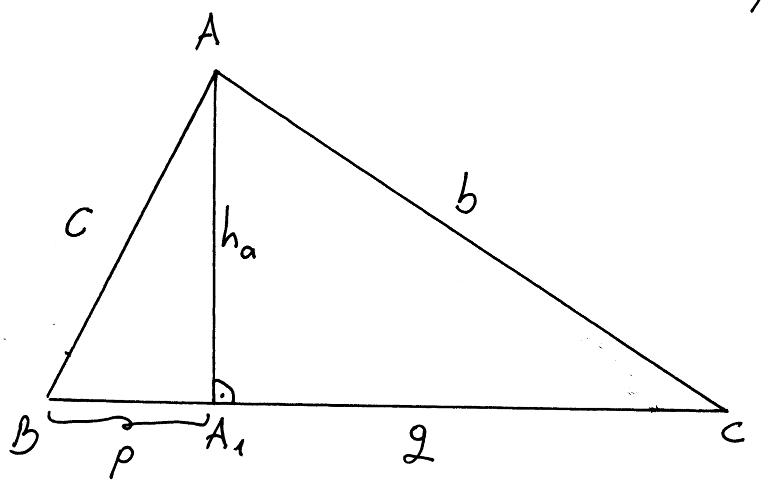
$$\measuredangle AMN \cong \measuredangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj.: raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BA_1A} + P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A} = \frac{p \cdot h_a}{2}$$

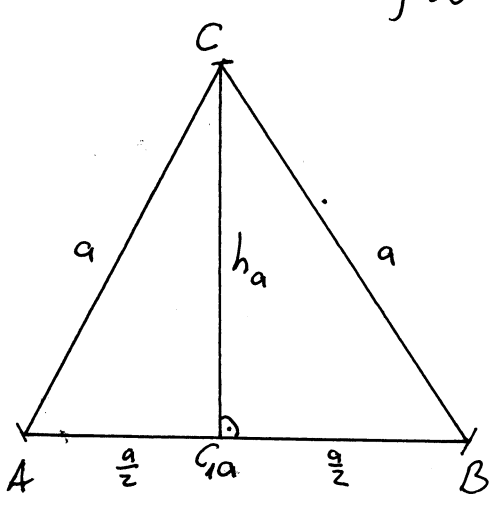
$$P_{\Delta A_1CA} = \frac{q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{p \cdot h_a}{2} + \frac{q \cdot h_a}{2} = \frac{p \cdot h_a + q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{(p+q)\, h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AC_1C} + P_{\Delta BCC_1}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta AC_1C} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \\ P_{\Delta BCC_1} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \end{aligned}\right\} \quad P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

4_0) Dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.

Rj: postavka zadatka:

$\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \cap \beta = \emptyset \quad \vee \quad \alpha \cap \beta = p$

Imamo dva dijela dokaza

a) $\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta, \quad \alpha \cap \beta \neq \emptyset \quad \Rightarrow \alpha \cap \beta = p$

b) $\alpha, \beta, \quad \alpha \cap \beta = p \quad \Rightarrow \quad \alpha \cap \beta \neq \emptyset$

Slučaj pod b) je trivijalan. Dokažimo slučaj pod a).

Kako je $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ to $\exists$ tačka A: $A \in \alpha \cap \beta$

$A \in \alpha$ i $A \in \beta$ prema aksiomi I_7 $\exists B: B \in \alpha$ i $B \in \beta$

Za A i B prema I_1, I_2 $\exists!$ prava p: $A \in a$ i $B \in a$

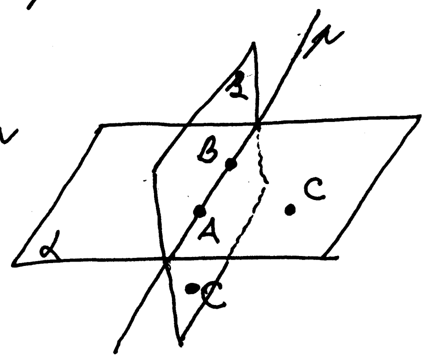
Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \alpha, B \in \alpha$ prema I_6 $p \subseteq \alpha$

Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \beta, B \in \beta$ prema I_6 $p \subseteq \beta$

Dokažimo još da je $\alpha \cap \beta = p$

Pretpostavimo da pored prave p $\exists C \notin p$ takva da je $p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta$.

Za p i C prema zadatku 1_0 postoji $\exists! \gamma: p \subseteq \gamma$ i $C \in \gamma$.



Sad imamo $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \cap \beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha \equiv \beta$

#kontradikcija (sa $\alpha \not\equiv \beta$)

Do kontradikcije smo mogli doći i na drugi način:

$p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta \quad \Rightarrow \quad C \in \alpha$ i $C \in \beta$

$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ i $A \in \beta, B \in \beta, C \in \beta$ prema I_1, I_2 $\alpha \equiv \beta$

#kontradikcija

Pretpostavka da pored prave p postoji još neka tačka na presjeku dvije ravni nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome $\alpha \cap \beta = p$.

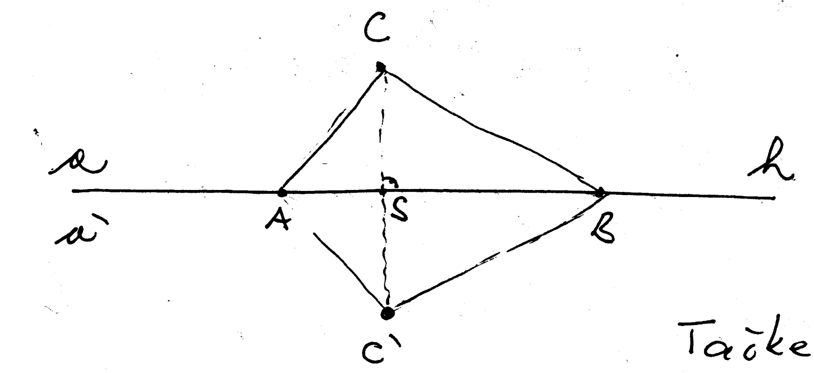
Kako su obe tvrdnje pod a) i b) tačne, slijedi da

ili $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili $\alpha \cap \beta = p$ q.e.d.

(5) Odrediti sve transformacije podudarnosti u ravni koje preslikavaju polupravu h na samu sebe.

Rj. poluprava h
transform. podud. Π : $\Pi(h)=h$ $\Big\} \Rightarrow \Pi = ?$

— — —



Neka je a' poluprava sa početnom tačkom A koja dopunjuje polupravu h do prave a.
Uzmimo tačku $B \in h$ i tačku $C \notin a$.
Tačke A, B i C su nekolinearne.

Pokazaćemo prvo da postoji, pa ćemo odrediti šta je u stvari ta transformacija.

a) Definišimo Π na sljedeći način

$\Pi(A)=A$
$\Pi(B)=B$
$\Pi(C)=C$

A, B, C nekolinearne $\Rightarrow \Pi(h)=h$

šta je Π ?

Identična transformacija svaku svoju tačku preslikava na samu sebe pa je $\Pi \equiv id$ tj. $id(h)=h$.

b) Posmatrajmo transformaciju podudarnosti koja ima sljedeće osobine: $\Pi(A)=A$

$\Pi(B)=B$

$\Pi(C)=C'$: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

A, B, C nekolinearne

$\Pi(h)=h$

Šta je Π?

C i C' leže u različitim poluravnima s ivicom u pravoj a

$\Rightarrow CC' \cap a = \{S\} \Rightarrow \sphericalangle CSA \cong \sphericalangle C'SA =$ prav ugao

$\triangle ABC \cong \triangle ABC' \Rightarrow AC = AC'$

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ AS \cong AS \\ \sphericalangle ASC \cong \sphericalangle ASC' = \text{prav ugao} \end{array}\right\} \xRightarrow{SSU} \triangle ASC \cong \triangle ASC'$$

(ugao naspram veće stranice)

$\Downarrow$

$CS \cong C'S$

$\Downarrow$

a simetrala duži CC'

pa $\sigma_a(C) = C'$

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_a(A) = A & (A \in a) \\ \sigma_a(B) = B & (B \in a) \\ \sigma_a(C) = C' & \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi \equiv \sigma_a$$

tj. $\sigma_a(h) = h$

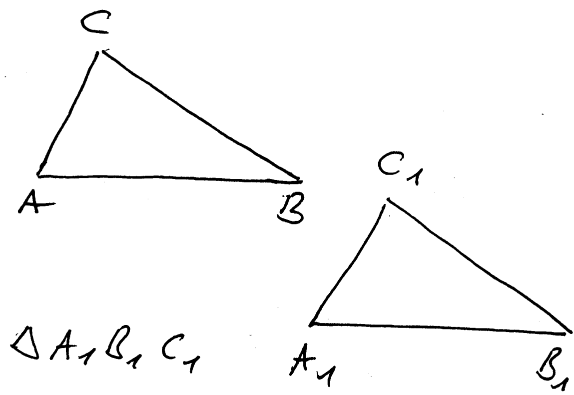
Našli smo dvije transformacije podudarnosti

1. identitet
2. osna simetrija u pravoj koja sadrži polupravu h.

10. Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geq B_1C_1$ ako i samo ako je $\sphericalangle BAC \geq \sphericalangle B_1A_1C_1$.

Rj. potreban uslov "$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1 \\ AC \cong A_1C_1 \\ BC \geq B_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BAC \geq \sphericalangle B_1A_1C_1$$



Ako bi bilo $BC \cong B_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A_1B_1 \\ AC \cong A_1C_1 \\ BC \cong B_1C_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SSS} \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

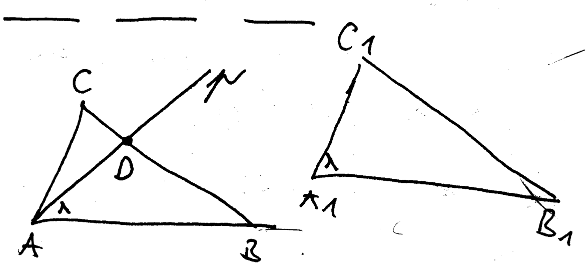
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$$

q.e.d.

Za $BC > B_1C_1$ dokaz je malo komplikovaniji pa ćemo mu se vratiti kasnije.

dovoljan uslov "$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1,\ AC \cong A_1C_1 \\ \sphericalangle BAC \geq \sphericalangle B_1A_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BC \geq B_1C_1$$



Ako bi bilo $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A_1C_1 \\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B_1A_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

$$BC = B_1C_1$$

q.e.d.

Pretpostavimo da je $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$. Iz aksiome podudarnosti za $\sphericalangle B_1A_1C_1$ $\exists$ poluprava p : $\sphericalangle BAp \cong \sphericalangle B_1A_1C_1$. $p \cap BC = \{D\}$.

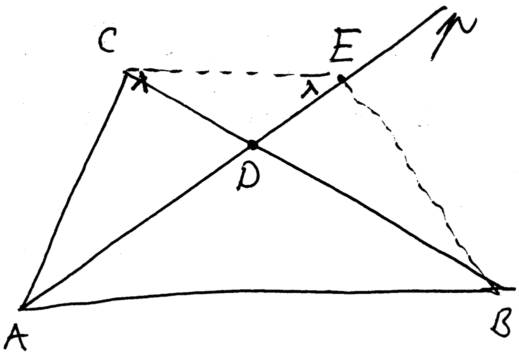
Na polupravoj p $\exists E$: $AE \cong AC$.

Za tačke D i E moguć je jedan od sljedeća tri odnosa:

1° $A-D-E$

2° $D \equiv E$

3° $A-E-D$.



Ako bi važio poredak $A-D-E$, imali bi $AC=AE \Rightarrow$

$\sphericalangle ACE = \sphericalangle AEC = \lambda$.

Posmatram $\triangle CBE$.

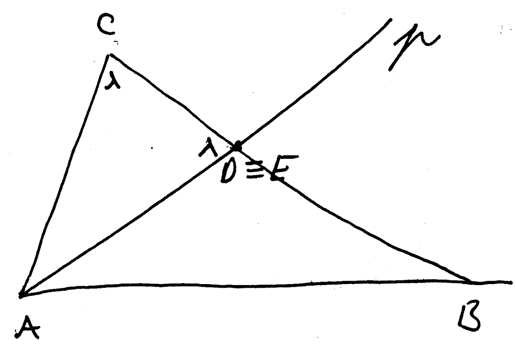
$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE > \sphericalangle DCE$.

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ pa prema tome:

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle BCE \Rightarrow BC > BE$

tj $BC > B_1C_1$

q.e.d.

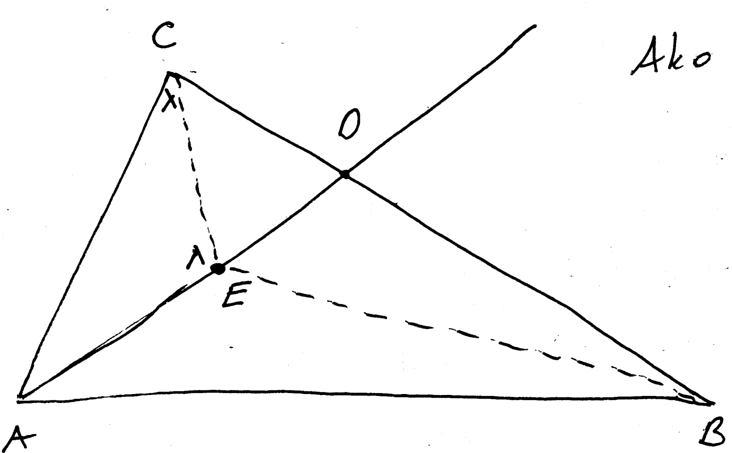


Ako bi vrijedilo $D \equiv E$

iz poretka $B-D-C \Rightarrow BD < BC$

tj. $B_1C_1 < BC$

q.e.d.



Ako bi bilo $A-E-D$

$AE = AC \Rightarrow \sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \lambda$

λ oštar ugao pa kako je $\sphericalangle CED$ vanjski susjedni ugao uglu $\sphericalangle AEC$ to je $\sphericalangle CED$ tup.

Slijedi da je $\sphericalangle ECD$ oštar pa kako je $\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ to je i $\sphericalangle CEB$ tup ugao. Prema tome

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle ECD \implies BC > BE$ tj. $BC > B_1C_1$

q.e.d.

Bez obzira koji od slučajeva za tačke D i E da se dogodi pokazali smo da $BC > B_1C_1$

q.e.d.

Vratimo se na potreban uslov.

$$\text{„}\Rightarrow\text{“}: \quad \left.\begin{array}{c} \Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1,\quad AC \cong A_1C_1 \\ BC > B_1C_1 \end{array}\right\} \implies \sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$$

— — —

Ako pretpostavim suprotno tvrdnji tj. da je $\sphericalangle BAC \leq \sphericalangle B_1A_1C_1$ prema dovoljnom uslovu dobiću:

$$BC \leq B_1C_1$$

kontradikcija (sa hipotezom $BC > B_1C_1$)

Prema tome mora vrijediti $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$

q.e.d.