Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

b) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Polazeći od definicije pravilnog šestougla (pretpostavljajući da više ništa ne znamo o pravilnom šestouglu) dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

c) U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

d) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

e) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

Zadatak br. 2

Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Zadatak br. 3

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.
(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

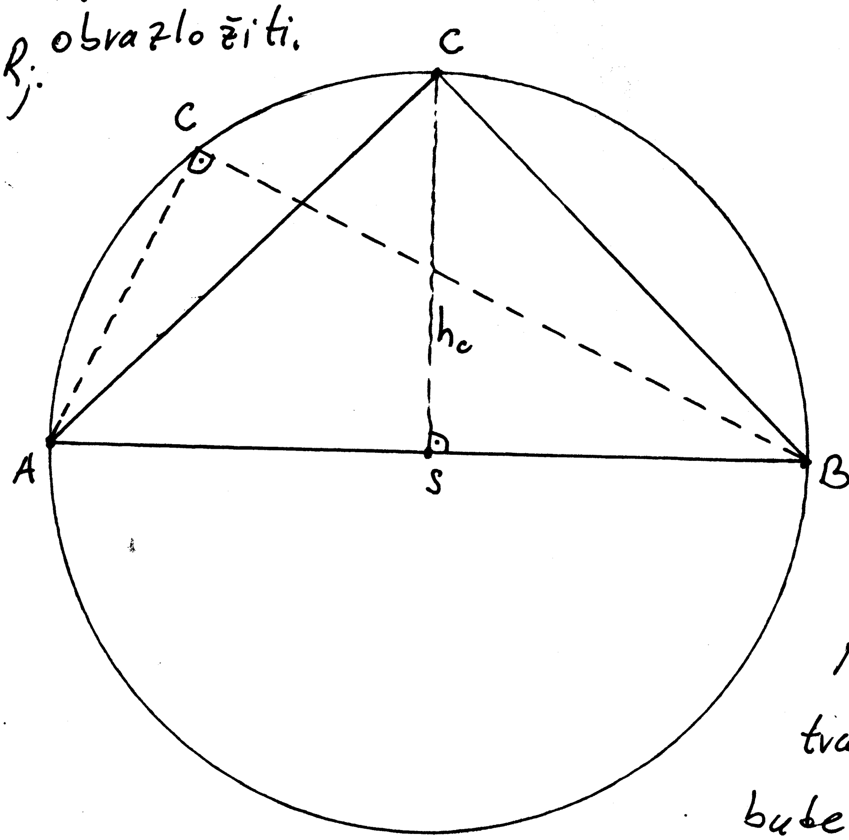
Zadatak br. 4

Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

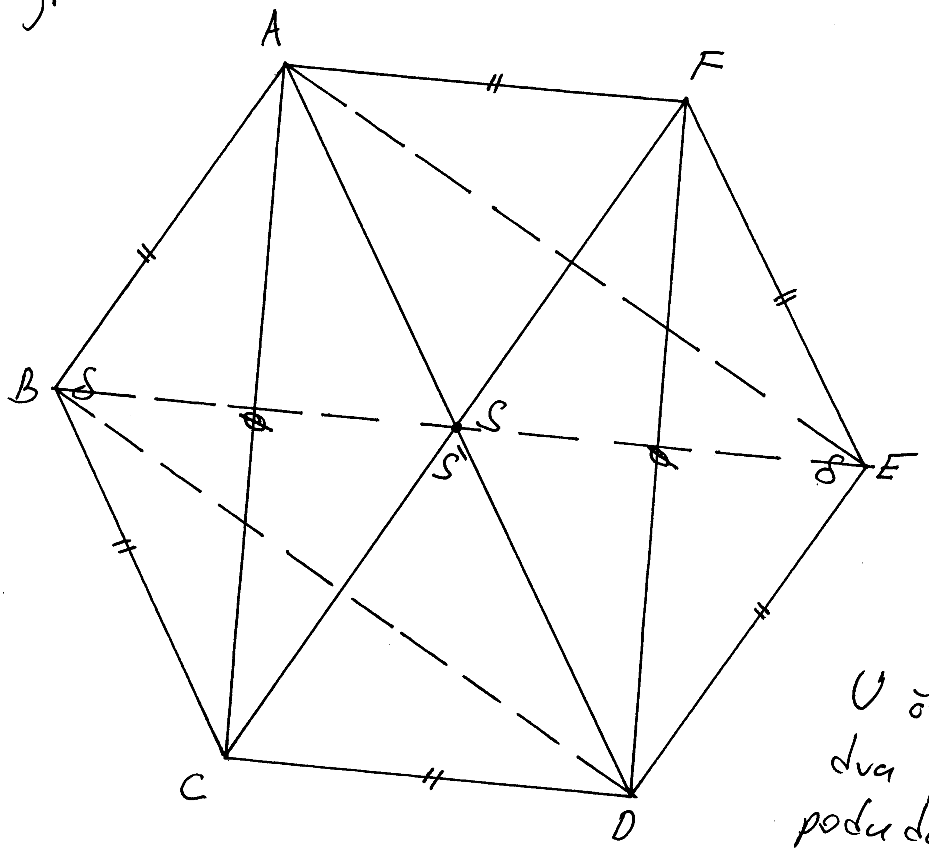
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.

Posmatrajmo ΔABC i ΔFDE.

Imamo:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong EF \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspramnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow \square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

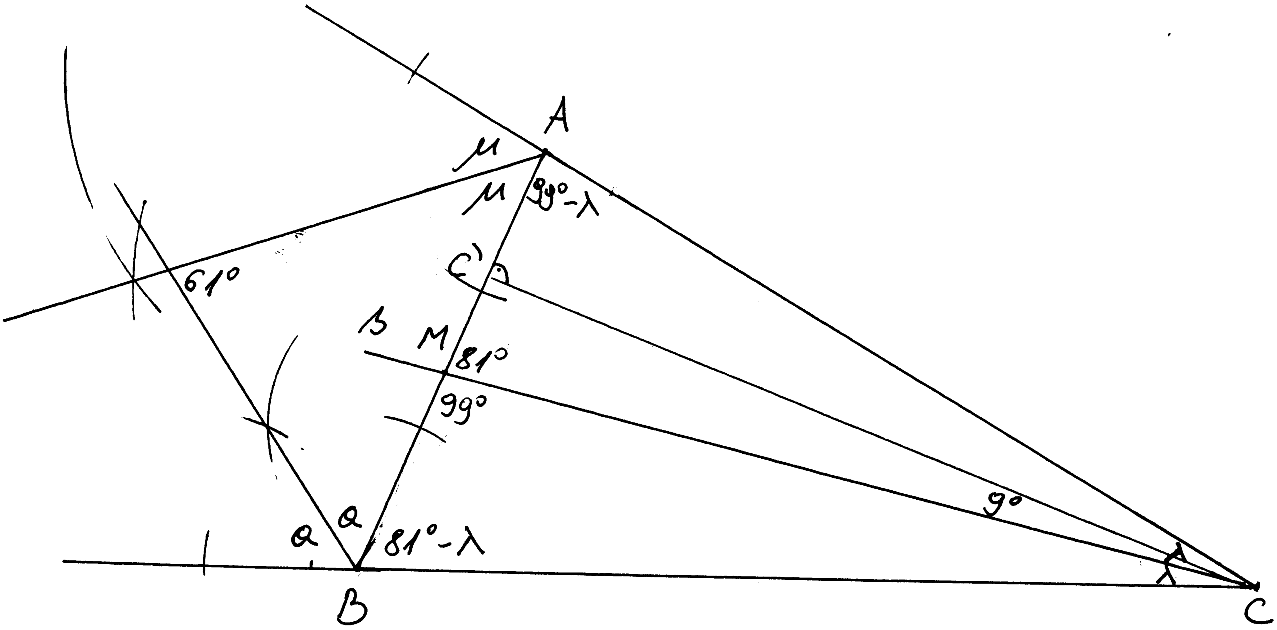
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow S'$ sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow$$ dijagonale AD, CF i BE se sijeku u tački S

q.e.d.

U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC<BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C,M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow \measuredangle CMC' = 81°$; $\measuredangle BMC = 99°$

$$\Rightarrow \alpha = 99° - \lambda \ ; \ \beta = 81° - \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu + 99° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \ \ldots (*)$$

$$\theta + \mu + 61° = 180° \quad / \cdot 2$$

$$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$$

$$2\theta + 2\mu = 238° \ \ldots (**)$$

$(*) ; (**) \Rightarrow$

$$180° + 2\lambda = 238°$$

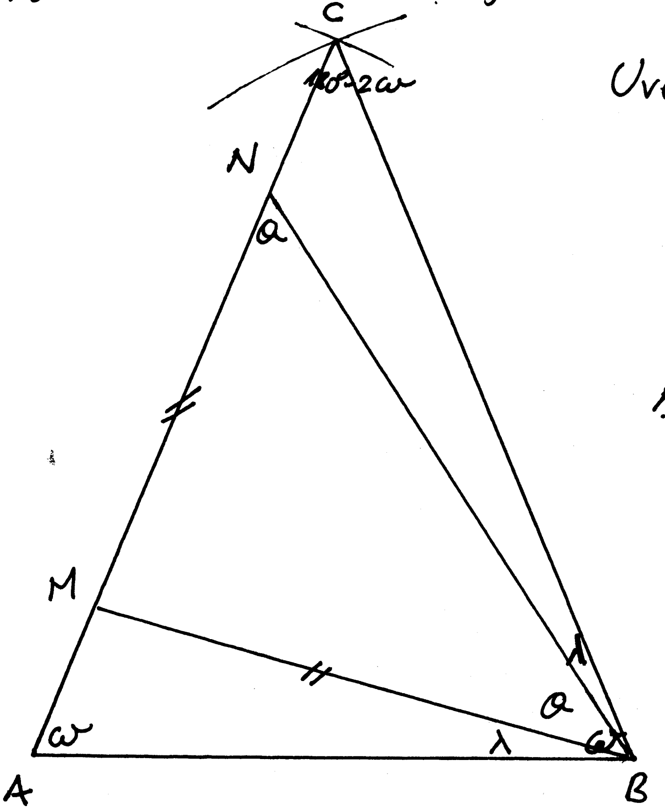
$$2\lambda = 58°$$

$$\lambda = 29°$$

$$\Rightarrow \alpha = 70°, \ \beta = 52° \ ; \ \gamma = 58°$$

(#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC ($AC = BC$). Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\sphericalangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN = \lambda$
(prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \sphericalangle MBN \cong \sphericalangle BNM = \theta$.

Sad primjetimo

$\sphericalangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\sphericalangle BNA$ vanjski ugao ΔABC to je

$\theta = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\sphericalangle BMA$ vanjski ugao ΔABM) $\Rightarrow$

$$\sphericalangle AMB = 2\theta = 360° - 4\omega + 2\lambda$$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$$\underline{\omega} + \lambda + 360° \underline{- 4\omega} + 2\lambda = 180°$$

$$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$$

$$\omega = 60° + \lambda \Rightarrow \theta = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$$

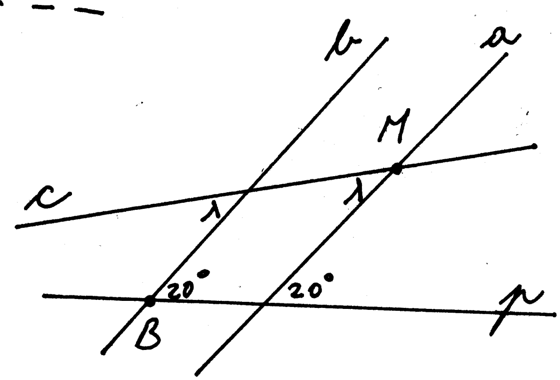
$$\theta = 60° - \lambda$$

Na kraju $\sphericalangle ABN = \lambda + \theta = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

$$\sphericalangle ABN = 60°.$$

(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno).

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c. Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

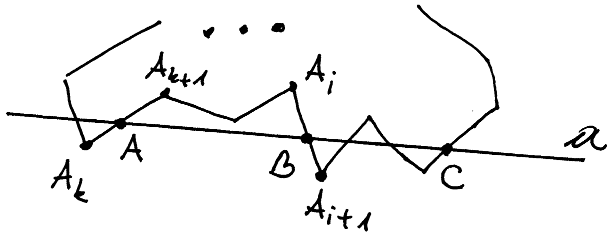
Rj. postavka zadatka

$A_1A_2A_3\ldots A_n$ mnogougao
prava a
} $\Rightarrow$ prava a i mnogougao mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ $\forall n\geq 6$ i prava a koja ne sadrži ni jednu njegovu stranicu.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da prava a i mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ imaju najmanje tri zajedničke tačke A, B i C, i pretpostavimo da je poredak na pravoj a $A-B-C$ (druga dva moguća poretka su $A-C-B$ i $B-A-C$).

Pokazaćemo da ako imamo ovaj slučaj mnogougao nije konveksan i doći do željene kontradikcije.



Mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ konveksan $\Rightarrow$ $AB, BC, AC \subseteq$ unutar mnogougla

Pretpostavimo da tačka $B \in A_iA_{i+1}$.

Znamo da ako je mnogougao konveksan tada se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

Prema toj tvrdnji svi vrhovi mnogougla se nalaze sa jedne strane prave $p(A_i, A_{i+1})$ $\Rightarrow$ ne mogu istovremeno i tačka A i tačka C pripadati mnogouglu $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ nije konveksan # kontradikcija (prema pretpostavci mnogougao je konveksan)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome konveksan mnogougao i prava koja ne sadrže nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke q.e.d.

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow a, b$ i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

$\underline{a, b}, c, d$ tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_d \circ \sigma_c(S) \Rightarrow \sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = \sigma_d(S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

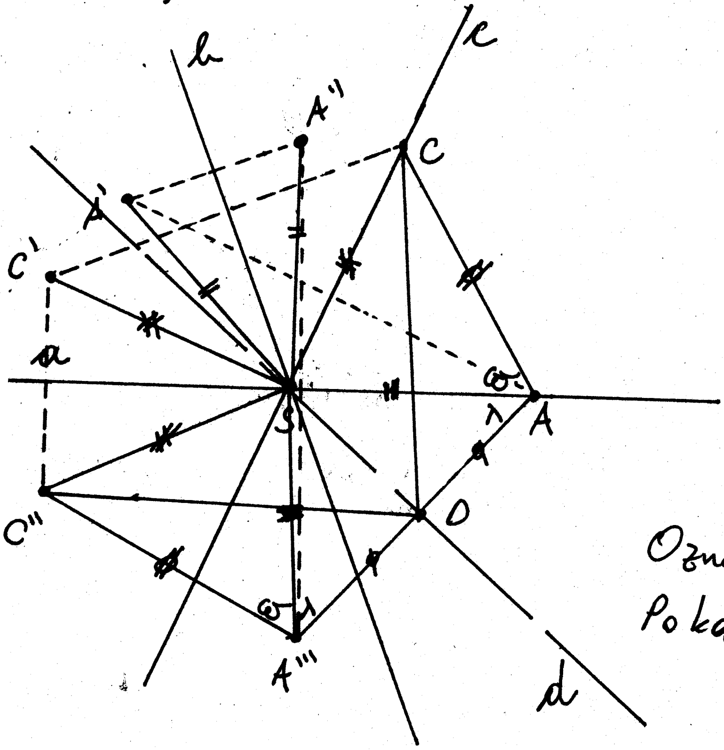
$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$ i

$\sigma_c(S) = S$ to znači (to je moguće samo u slučaju) da se c i d sijeku u tački S.

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow a, b$ i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\mathcal{I} = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\mathcal{I}(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\mathcal{I}(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow$ $S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\mathcal{I}(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dijela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow$ $CD \cong C''D$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow$ d simetrala CC''

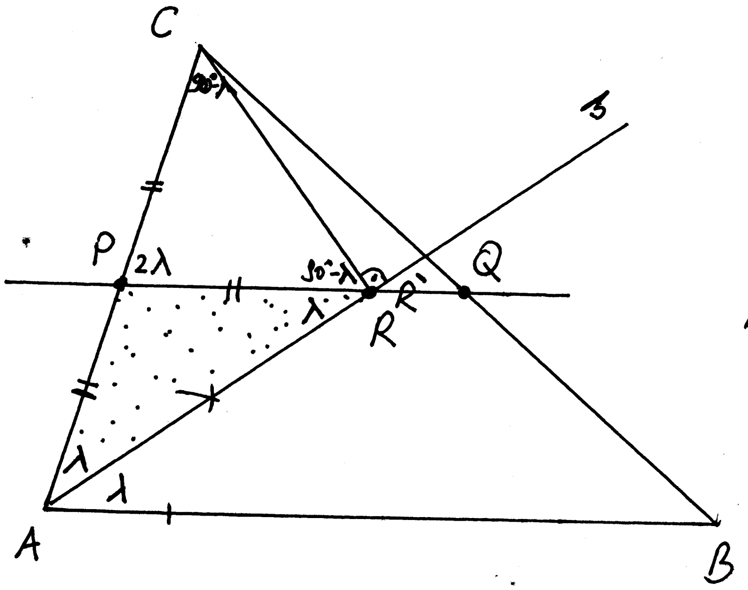
Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{I}(S) = S \\ \mathcal{I}(A) = A''' \\ \mathcal{I}(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nekolinearne}]{A,\,S,\,C} \sigma_d = \mathcal{I} \text{ tj. } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

(#) Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla ΔABC, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ P \text{ sredina } AC \\ Q \text{ sredina } BC \\ s \text{ simetrala ugla } \measuredangle BAC \\ R \text{ ortogonalna projekcija tjemena } C \text{ na } s \end{array}\right\} \Rightarrow P, Q \text{ i } R \text{ su kolinearne tačke}$$



P sredina AC, Q sredina BC

$\Rightarrow PQ$ srednja linija trougla

$\Rightarrow PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$PQ \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle QPC = 2\lambda$

Označimo sa R' presjek simetrale s i $p(P,Q)$.

Posmatrajmo $\Delta APR'$. Vanjski ugao tog trougla je $\measuredangle R'PC = 2\lambda$. Kako je vanjski ugao jednak zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla i $\measuredangle R'AP = \lambda$ imamo da je $\measuredangle AR'P = \lambda$.

$\Rightarrow \Delta APR'$ je jkk. tj. $AP \cong PR'$.

P je sredina $AC \Rightarrow AP \cong PC \Rightarrow \Delta CPR'$ je jkk sa osnovicom u CR, i uglom $\measuredangle CPR = 2\lambda$.

Imamo da $\measuredangle PCR' \cong \measuredangle PR'C = 90° - \lambda$.

$$\measuredangle AR'C = \lambda + 90° - \lambda = 90° \xRightarrow{R \text{ ortog. pr. na } s} R' \equiv R$$

Prema tome tačke R, P i Q su kolinearne

q.e.d.