Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 06.09.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

b) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke C za ugao od 120° u pozitivnom smjeru.

c) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno.)

d) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

e) U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Dokazati da je s simetrala duži MN ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N$.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

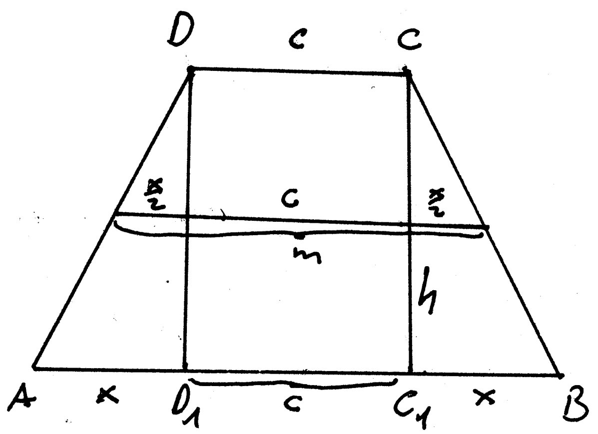
Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

Napomena: Konveksan četverougao $\square ABCD$ kod kojeg su uglovi kod tjemena A i D pravi, a stranice AD i BC međusobno podudarne, zove se Sakerijev.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike. I način:

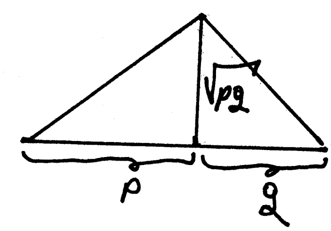


$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$

$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c)\cdot x}$

$m = 5 \Rightarrow x + c = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$\Downarrow$

$5x = 75$

$x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$

$P = 25\sqrt{3}$ cm^2

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a + c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

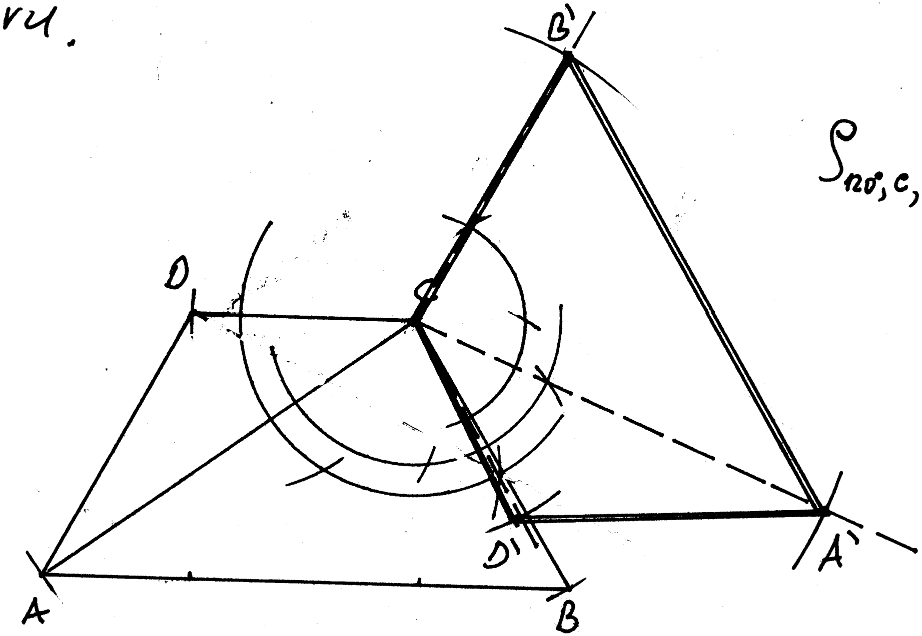
$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$P = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2

(#) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7$ cm rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

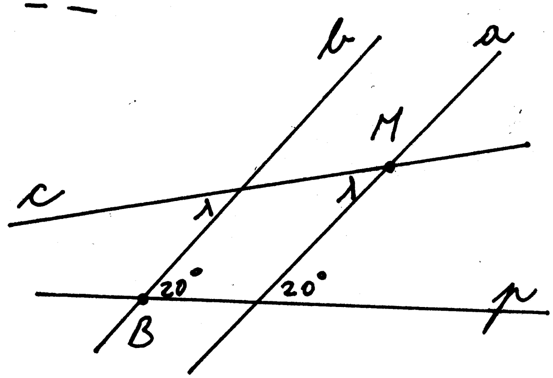
Rj.

$\rho_{120°, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$



(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno).

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od $20°$. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

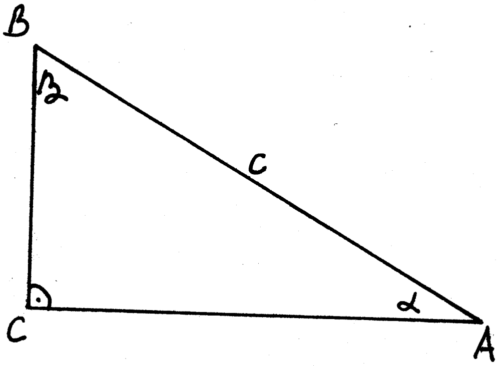
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c.

Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

(#) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

R: Analiza

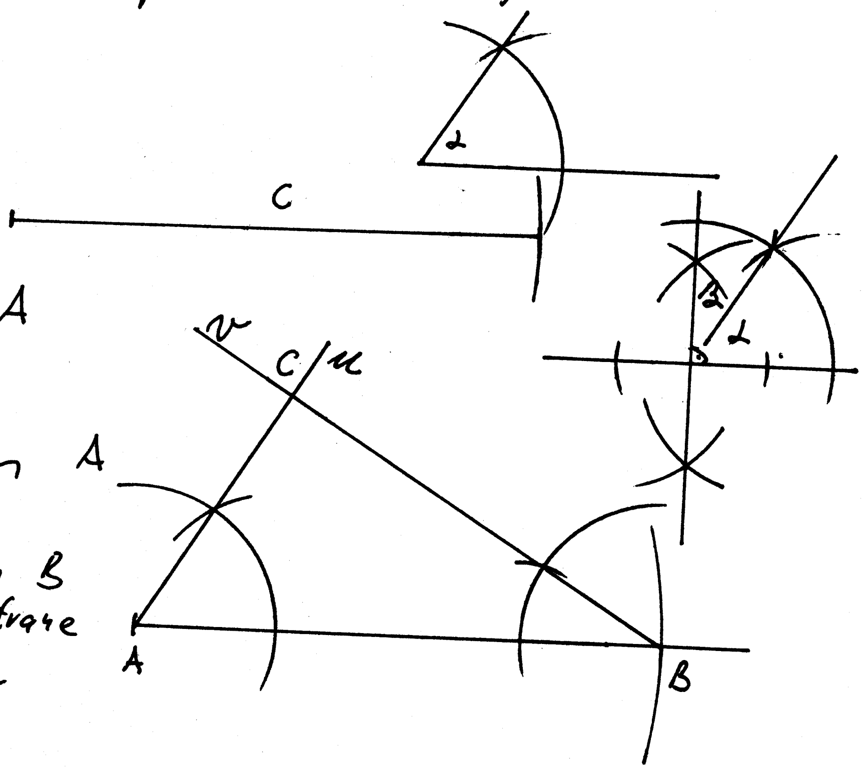
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\triangle ABC$ pravougli trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90° - \alpha$. $(\alpha+\beta+90°=180°)$



Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na njoj, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija

1. α, c $(\alpha < 90°)$
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\angle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\angle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. $\triangle ABC$



Dokaz

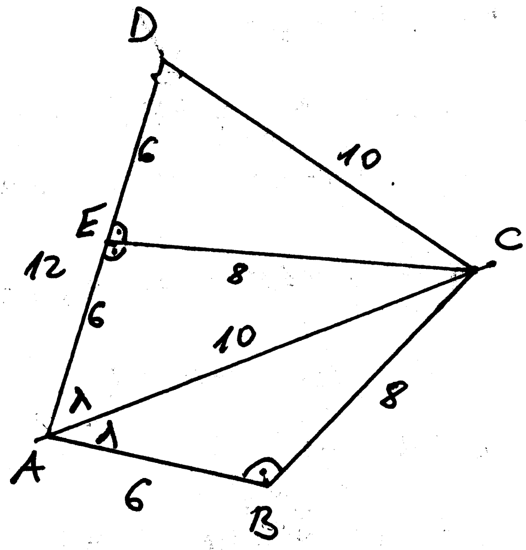
Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Nađi površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.



$AB < BC, \quad BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD, \quad CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD, \quad AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36 \text{ cm} \Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8, \; CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

ΔECD je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

$P_{\Delta ACD} = \dfrac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$

$P_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$

$P_{\square ABCD} = 72 \text{ cm}^2$

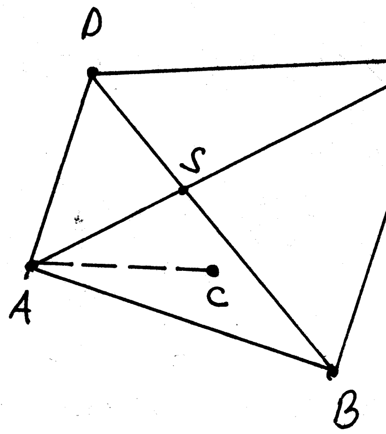
(#) Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.

Rj.

„$\Rightarrow$": četverougao konveksan $\Rightarrow$ svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla

---

Rj.



U jednom od ranijih zadataka smo pokazali da je četverougao konveksan akko mu se dijagonale sijeku neka je $AC \cap BD = \{S\}$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji vrh četverougla koji leži u unutrašnjosti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha.

Pretpostavimo da je to vrh C

$C \in$ unutr. $\Delta ABD \Rightarrow AC \cap BD = \emptyset$

\# kontradikcija (sa $AC \cap BD \neq \emptyset$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome:

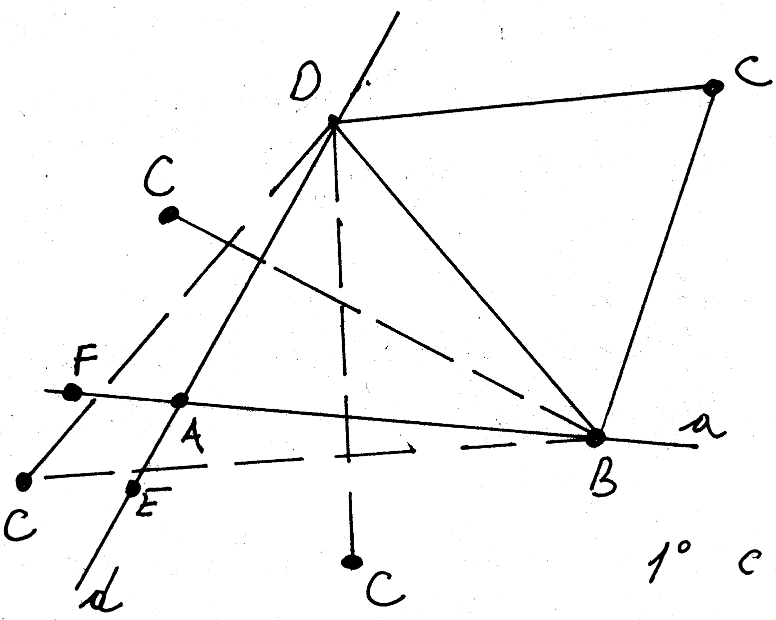
Svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla

q.e.d.

„$\Leftarrow$": svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla $\Rightarrow$ četverougao konveksan

---

Rj. Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da dati četverougao $\square ABCD$ nije konveksan. To znači da mu se dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ ne sijeku.



Uvedimo oznake

$a = p(A,B)$

$d = p(A,D)$

$E: D-A-E, \quad F: B-A-F$

Kako tačka C leži u spoljašnjoj oblasti $\triangle ABD$ moguć je tačno jedan od sljedeća tri slučaja

1° $C \in pr[a,E) \cap pr[d,B) \cap pr[p(B,C),A)$

2° $C \in pr[a,E) \cap pr[d,F)$

3° $C \in pr[a,D) \cap pr[d,F) \cap pr[p(B,C),A)$

Pitanje: Postoje još tri slučaja koja nismo uzeli u razmatranje. Koji su to slučajevi i zašto ih ne razmatramo?

Dokaz

Da ne vrijedi 2° i 3° slučaj ostavljeno za vježbu. Pokazaćemo da ne vrijedi 1°.

Ako bi bilo $C \in pr[a,E) \cap pr[d,B) \cap pr[p(B,C),A)$, kako C leži u spoljašnjoj oblasti $\triangle ABD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cap CD \neq \emptyset$
kontradikcija
(stranice u četverouglu se ne sijeku)

Prema tome nije 1°, 2° i 3°

Pretpostavka da četverougao $\square ABCD$ nije konveksan nas dovodi u kontradikciju pa ta tvrdnja nije tačna.

$\therefore$

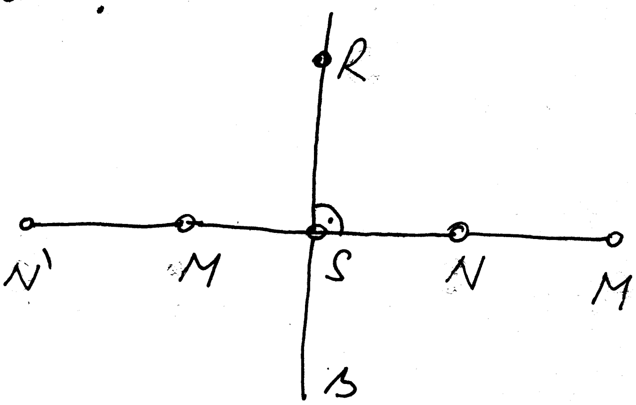
Četverougao $\square ABCD$ jest konveksan

q.e.d.

(#) Dokazati da je s simetrala duži MN ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N$.

Rj. „$\Rightarrow$": s simetrala duži MN $\Rightarrow$ $\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N$.

Da bi pokazali jednakost $\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N$ potrebno je i dovoljno pokazati da ta jednakost vrijedi za tri nekolinearne tačke.



Neka je s simetrala duži MN. Uzmimo proizvoljnu tačku $R \in s$ ($R \not\equiv S$, gdje je $S = s \cap AB$). Pokažimo da jednakost vrijedi za tri nekolinearne tačke M, N i R.

a) za tačku M

$$\sigma_M \circ \sigma_s(M) = \sigma_M(\sigma_s(M)) \overset{s \text{ simetrala duži } MN}{=} \sigma_M(N) = N' \quad \dots(*)$$

tako da je M sredina duži NN'

$$\sigma_s \circ \sigma_N(M) = \sigma_s(\sigma_N(M)) = \sigma_s(M'),$$

tako da je N sredina duži MM'

Sad imamo

S sredina MN $\Rightarrow$ $MS \cong SN$
M sredina NN' $\Rightarrow$ $MN' \cong MN$
N sredina MM' $\Rightarrow$ $NM' \cong NM$

$\Rightarrow$ $MN' + MS = SN + NM'$

$\Rightarrow$ S sredina duži $M'N'$ $\Rightarrow$ kako $S \in s$ i $s \perp p(M,N)$

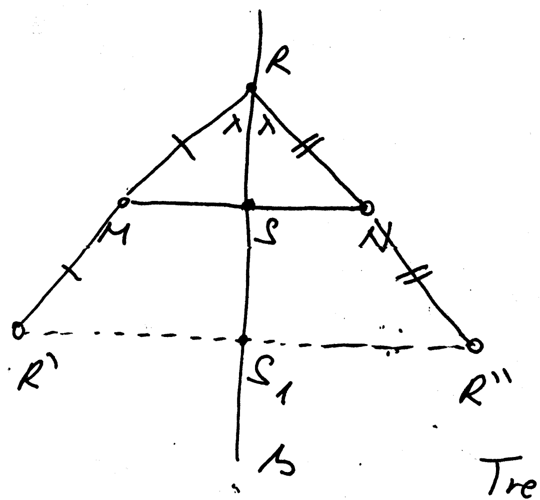
s simetrala duži $M'N'$ tj. $\sigma_s(M') = N'$ $\dots(**)$

Pa iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\sigma_M \circ \sigma_s(M) = \sigma_s \circ \sigma_N(M)$

q.e.d.

b) dokaz za tačku N uraditi za vježbu

c) za tačku R, $R \not\equiv S$, $R \in s$



$$\sigma_M \circ \sigma_s(R) = \sigma_M(\sigma_s(R)) \xRightarrow{R \in s} \sigma_M(R) = R'$$

$$\Downarrow$$

M sredina duži RR'

$$\sigma_s \circ \sigma_N(R) = \sigma_s(\sigma_N(R)) = \sigma_s(R'') \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ N sredina duži $R'R''$

Trebamo pokazati da je s simetrala duži RR''.
Neka je $s \cap RR'' = \{S_1\}$.

Posmatrajmo $\triangle MSR$ i $\triangle NSR$. Primetimo

$$\left.\begin{array}{l} MS \cong NS \\ \measuredangle MSR \cong \measuredangle NSR = 90^\circ \\ RS \cong RS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle MSR \cong \triangle NSR$$

$$\Downarrow$$

$$MR \cong NR \text{ i } \measuredangle MRS \cong \measuredangle NRS = \lambda$$

Kako je $MR \cong MR'$ i $NR \cong NR'$ i $MR \cong NR \Rightarrow RR' \cong RR''$

Posmatrajmo $\triangle R'S_1R$ i $\triangle R''S_1R$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} R'R \cong R''R \\ \measuredangle R'RS_1 \cong \measuredangle R''RS_1 = \lambda \\ RS_1 \cong RS_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle R'S_1R \cong \triangle R''S_1R$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle R'S_1R \cong \measuredangle R''RS_1$$

Kako su $\measuredangle R'S_1R$ i $\measuredangle R''RS_1$ naporedni uglovi to

$$\measuredangle R'S_1R \cong \measuredangle R''RS_1 = 90^\circ \Rightarrow s \text{ simetrala}$$

$$\sigma_M \circ \sigma_s(R) = \sigma_s \circ \sigma_N(R) = R'$$

Pokazali smo da je

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_M \circ \sigma_s(M) = \sigma_s \circ \sigma_N(M) \\ \sigma_M \circ \sigma_s(N) = \sigma_s \circ \sigma_N(N) \\ \sigma_M \circ \sigma_s(R) = \sigma_s \circ \sigma_N(R) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{tačke}]{\substack{M, N \text{ i } R \text{ tri} \\ \text{nekolinearne}}} \sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N$$

q.e.d.

"$\Leftarrow$": $\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N \Rightarrow s$ simetrala duži MN

$\sigma_M \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_N \quad / \circ \sigma_s$ sa desne strane

$\sigma_M \circ \underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} = \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s$

$\sigma_M = \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s$

Ako pokažemo da je $\sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s = \sigma_{\sigma_s(B)}$, kako je $\sigma_M = \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s$ dobićemo da je $M = \sigma_s(B) \Rightarrow$ naša tvrdnja

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti $\gamma = \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s$.
Neka je $\sigma_s(N) = X$ tj. tačka X dobijeno preslikavanjem tačke N osnom simetrijom s osom u s (s simetrala duži NX).

$\gamma(X) = \sigma_s(\sigma_N(\sigma_s(X))) = \sigma_s(\sigma_N(N)) = \sigma_s(N) \overset{s \text{ sim } NX}{=\!=} X$ tj. $\gamma(X) = X$ ...(1)

Kako je još $\gamma \circ \gamma = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} \circ \sigma_B \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \underbrace{\sigma_B \circ \sigma_B}_{id} \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_s = id$

tj. $\gamma \circ \gamma = id$ ..(2) to iz (1) i (2) zaključujemo da je γ involtivna transformacija. Prema prethodnom zadatku involtivne transformacije su
a) identitet
b) osna simetrija
c) centralna simetrija

Da li je a), b) ili c) ćemo odrediti na osnovu broja fiksnih tački. Koliko osna simetrija ima fiksnih tački?
Pretpostavimo da $\exists Y: \gamma(Y) = Y$ $\quad \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s(Y) = Y \; / \sigma_s$ sa lijeve str.

Neka je $\sigma_s(Y) = Y'$ tj. s simetrala duži YY'. $\quad \sigma_N \circ \sigma_s(Y) = \sigma_s(Y)$ ... (*)

$\sigma_N(\sigma_s(Y)) = \sigma_N(Y') \overset{(*)}{=\!=} Y' \Rightarrow Y' = N$ tj. $\sigma_s(Y) = N$

Sad imamo $\sigma_s(X) = N = \sigma_s(Y) \Rightarrow X \equiv Y \Rightarrow \gamma$ ima samo jednu fiksnu tačku i to je tačka X

$\gamma = \sigma_X = \sigma_{\sigma_s(N)} \Rightarrow \sigma_M = \sigma_s \circ \sigma_N \circ \sigma_s = \sigma_{\sigma_s(N)}$

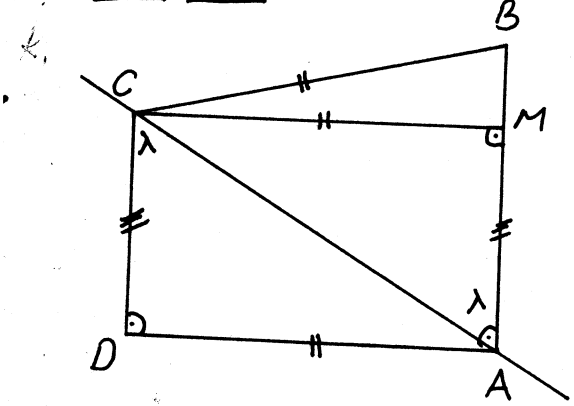
$\Rightarrow \sigma_M = \sigma_{\sigma_s(N)} \Rightarrow \sigma_s(N) = M \Rightarrow s$ simetrala duži AB

q.e.d.

(#) Dokazati da je u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ Sakerijev} \\ (\measuredangle A \text{ i } \measuredangle D \text{ su pravi, } AD \cong BC)\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle C \cong \measuredangle D$$



Pokažimo prvo da je stranica $AB \cong CD$.

Ako bi bilo da je $AB > CD$ imali bi: $\exists M: A-M-B$ i $AM \cong CD$.

Kako je $\measuredangle D = \measuredangle A = 90°$ to je $p(A,B) \parallel p(C,D)$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ACD \cong \measuredangle CAM = \lambda$

Posmatrajmo $\triangle ACD$ i $\triangle CAM$

$$\left.\begin{array}{l} CD \cong AM \\ \measuredangle DCA \cong \measuredangle CAM = \lambda \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle CDA \cong \triangle AMC$$

$$\Downarrow$$

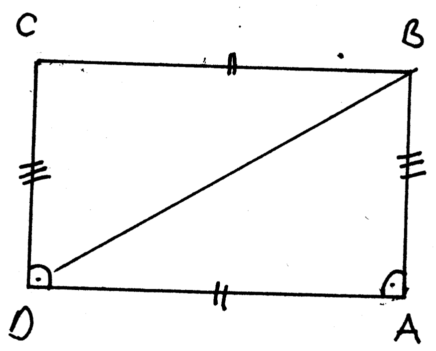
$$AD \cong MC \quad \text{i} \quad \measuredangle ADC \cong \measuredangle AMC = 90°$$

U $\triangle CMB$ imamo da je $\measuredangle CMB = 90°$ i $CM \cong CB$.

\# kontradikcija

($\triangle CMB$ je jkk i ne može imati ugao od $90°$ na osnovici)

Prema tome nije $AB > CD$. Slično bi pokazali da nije $CD > AB$. Prema tome $AB \cong CD$.



Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} CD \cong AB \\ BC \cong AD \\ BD \cong BD \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle DCB \cong \triangle DAB$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle DCB \cong \measuredangle DAB = 90°$$

Prema tome $\measuredangle D \cong \measuredangle C$

q.e.d.