Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Nacrtati trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

b) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

c) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

d) Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N,M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

e) Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

Zadatak br. 2

U ravni je dato n duži $(n \geq 3)$, takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Zadatak br. 3

Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.
Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B) = B$.

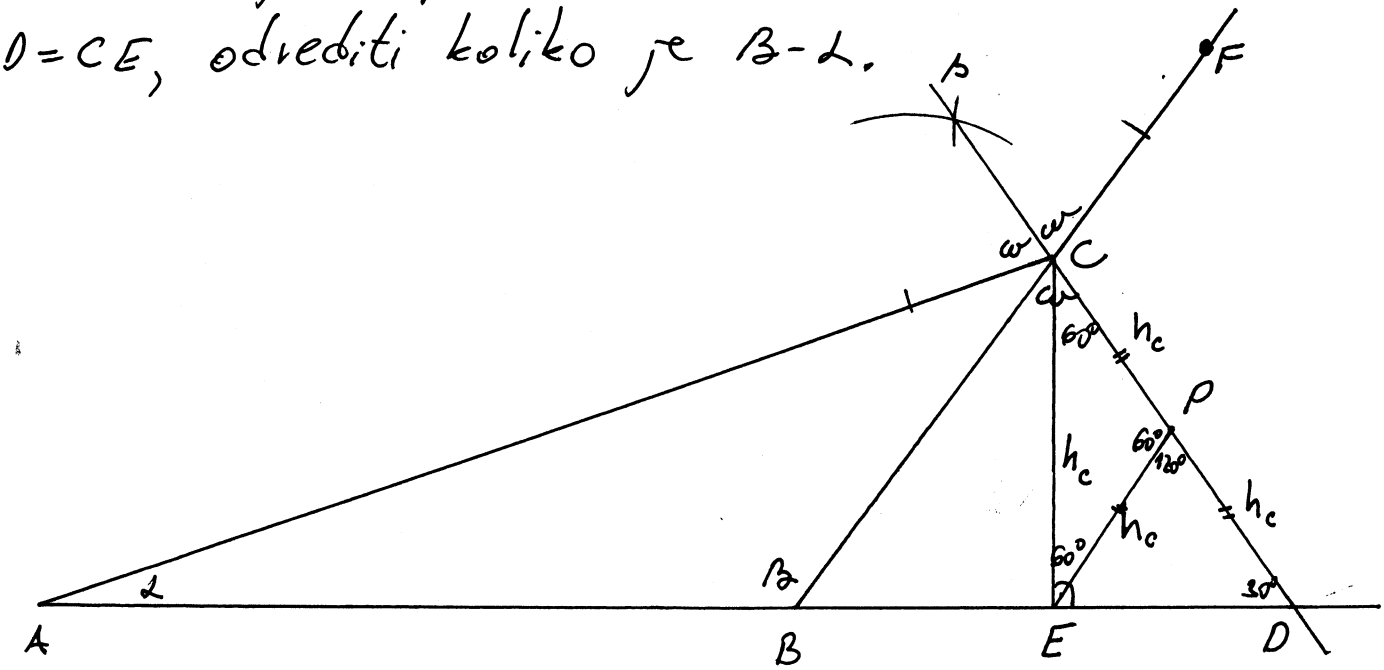
Zadatak br. 4

Dat je trougao $\triangle ABC$ i proizvoljna tačka P na krugu opisanom oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Nacrtaj trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2} CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.



Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\measuredangle ACF$ označimo sa 2ω (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\measuredangle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo $\triangle EDC$ (pravougli trougao) kod kojeg imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo središte stranice CD možemo primijetiti da je $CP \cong DP = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

$\triangle EPC$ jks $\Rightarrow \measuredangle EPC = 60° \Rightarrow \measuredangle EPD = 120° \overset{\triangle EDP \text{ jkk}}{\Rightarrow} \measuredangle EDP = 30°$.

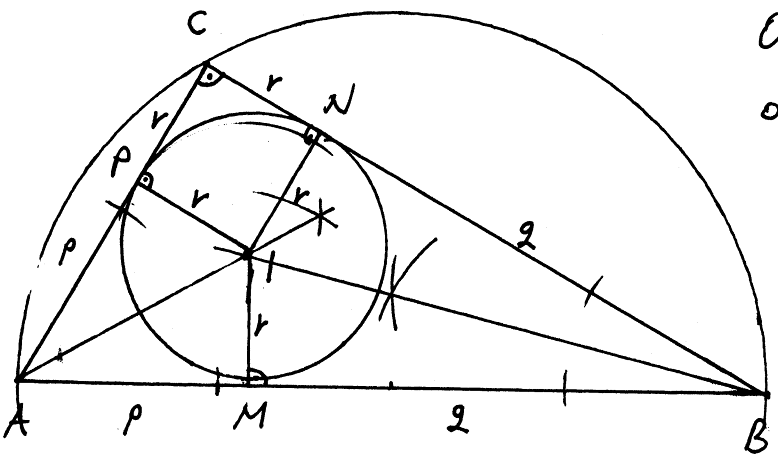
Ugao $\measuredangle ACF$ vanjski ugao $\triangle ABC \Rightarrow 2\omega = \alpha + \beta$ ...(1)

Ugao $\measuredangle ABC$ vanjski ugao $\triangle BDC \Rightarrow \beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow 2\beta - 60° = \alpha + \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je

$IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \dots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad | : 2$$

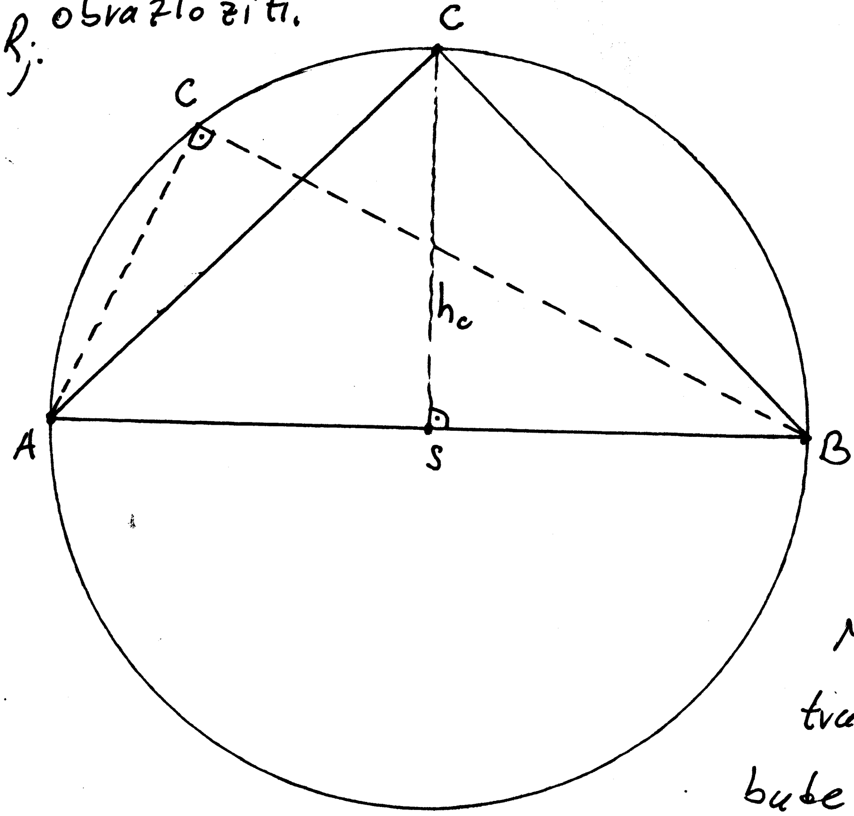
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \dots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

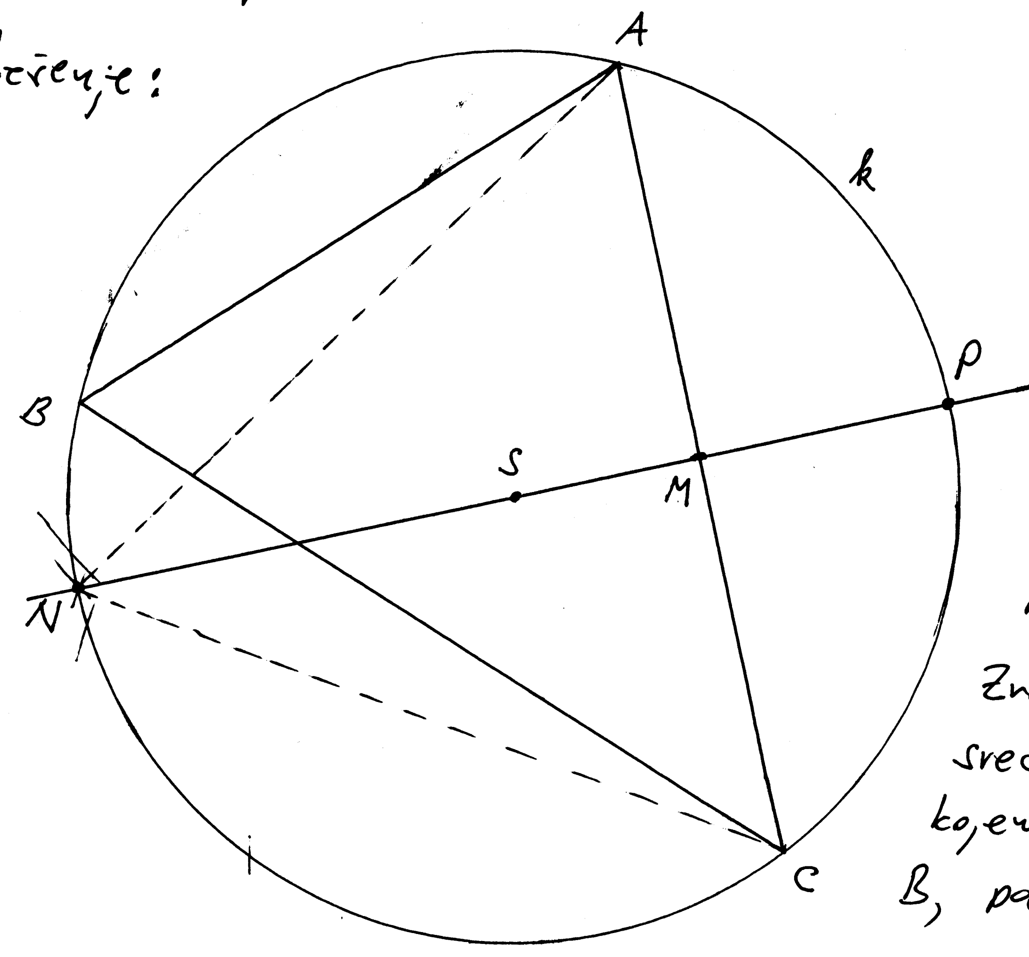
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla ΔABC, $AB < AC$, i neka je tačka N središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku preseka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \text{ (M sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

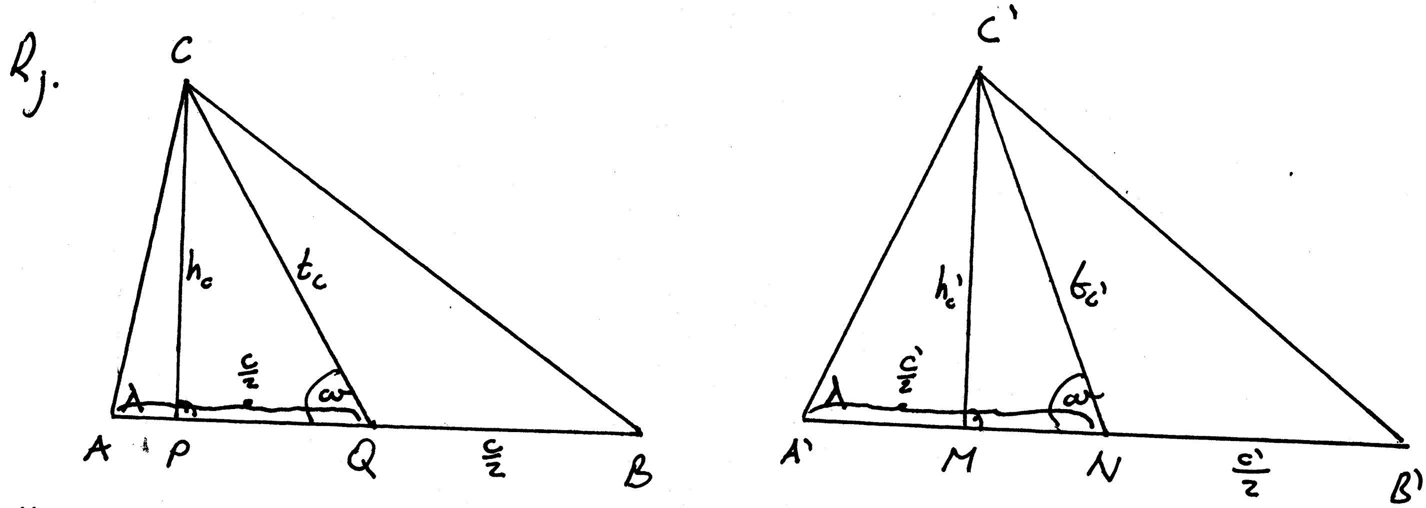
$$\measuredangle AMN \cong \measuredangle CMN = 90° \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c'$, $h_c=h_{c'}$ i $t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova C i C'.

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo ΔPQC i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \\ CP \cong C'M \ (h_c=h_c') \\ \measuredangle CPQ \cong \measuredangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ugao naspram veće stranice}]{SSU} \Delta PQC \cong \Delta MNC'$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega$$

Kako je $c=c'$ to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo ΔAQC i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N \ (\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}) \\ \measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N \ (t_c=t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta AQC \cong \Delta A'NC'$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAQ \cong \measuredangle C'A'N = \lambda$$
$$\text{i } AC \cong A'C'$$

Na kraju posmatrajmo ΔABC i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

q.e.d.

(#) U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Rj. postavka zadatka

dato je n duži $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}$ tako da svake tri imaju zajedničku tačku $\Bigg\} \Longrightarrow$ postoji zajednička tačku za sve duži

---

Zadatak dokažimo matematičkom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE

$k=3$: Neka su date tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{31}A_{32}$. Dvije duži mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku. Prema pretpostavci tri duži imaju zajedničku tačku, prema tome tvrdnja je tačna za tri duži

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da postoji zajednička tačka za k duži gdje je $3 \leq k \leq n$. Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da postoji zajednička tačka za $n+1$ duž.

Pa posmatrajmo $n+1$-nu duž $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}, A_{n+1,1}A_{n+1,2}$

Na osnovu pretpostavke n duži $A_{11}A_{12}, A_{21}A_{22}, \dots, A_{n1}A_{n2}$ imaju neku zajedničku tačku B. Na osnovu pretpostavke zadatka tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ imaju zajedničku tačku. Kako duži $A_{11}A_{12}$ i $A_{21}A_{22}$ već imaju zajedničku tačku B to će i duž $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ sadržavati tačku B. Prema tome tačka B je zajednička tačka za $n+1$-nu duž $A_{11}A_{21}, \dots, A_{n+1,1}A_{n+1,2}$.

ZAKLJUČAK

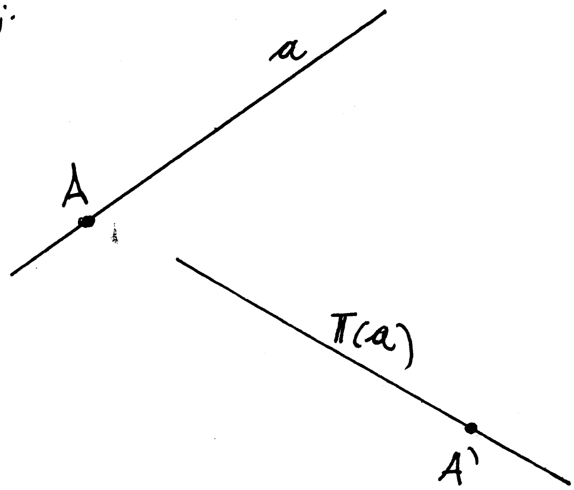
Za $n \in N$ datih duži u ravni gdje je $n \geq 3$, ako svake tri od njih imaju zajedničku tačku tada postoji zajednička tačka za sve duži.

q.e.d.

Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.

Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B) = B$.

R:



postavka zadatka

π transf. podud.
$\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$ transf. podud. $\Big\} \Rightarrow$ sve tačke transf. α su fiksne tačke, α je ______.

______ ______ ______

Neka je A' proizvoljna tačka sa prave $\pi(a)$. Znamo da $\exists$ tačka $A \in a$ t.d. $\pi(A) = A'$ $(\pi^{-1}(A') = A)$.

Sad imamo $\alpha(A') = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}(A') = \pi(\sigma_a(\pi^{-1}(A'))) = \pi(\sigma_a(A)) \overset{A \in a}{=} \pi(A) = A'$

tj. $\alpha(A') = A'$. Kako je A' proizvoljna tačka sa $\pi(a)$ možemo zaključiti:
Sve tačke prave $\pi(a)$ su fiksne tačke transformacije α.

q.e.d.

Odredimo šta predstavlja α.

$$\alpha \circ \alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \underbrace{\pi^{-1} \circ \pi}_{id} \circ \sigma_a \circ \pi^{-1} = \pi \circ \underbrace{\sigma_a \circ \sigma_a}_{id} \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi^{-1} = id$$

tj. $\alpha \circ \alpha = id \Rightarrow$. α je involutivna transformacija pa može biti:

1. identitet
2. centralna simetrija
3. osna simetrija

Ako bi α bila identitet imali bi $\alpha = id$

$\pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1} = id \quad / \circ \pi$ sa desne str.

$\pi \circ \sigma_a = \pi \quad / \pi^{-1} \circ$ sa lijeve str.

$\sigma_a = id$ # kontradikcija (osna simetrija nije identitet)

α ne može biti centralna simetrija zato što centralna simetrija ima samo jednu fiksnu tačku, a mi smo pokazali da α ima sve tačke sa prave $\pi(a)$ kao fiksne tačke.

Prema tome α je osna simetrija.

Osa simetrije transformacije α je prava $\pi(a)$, tj.

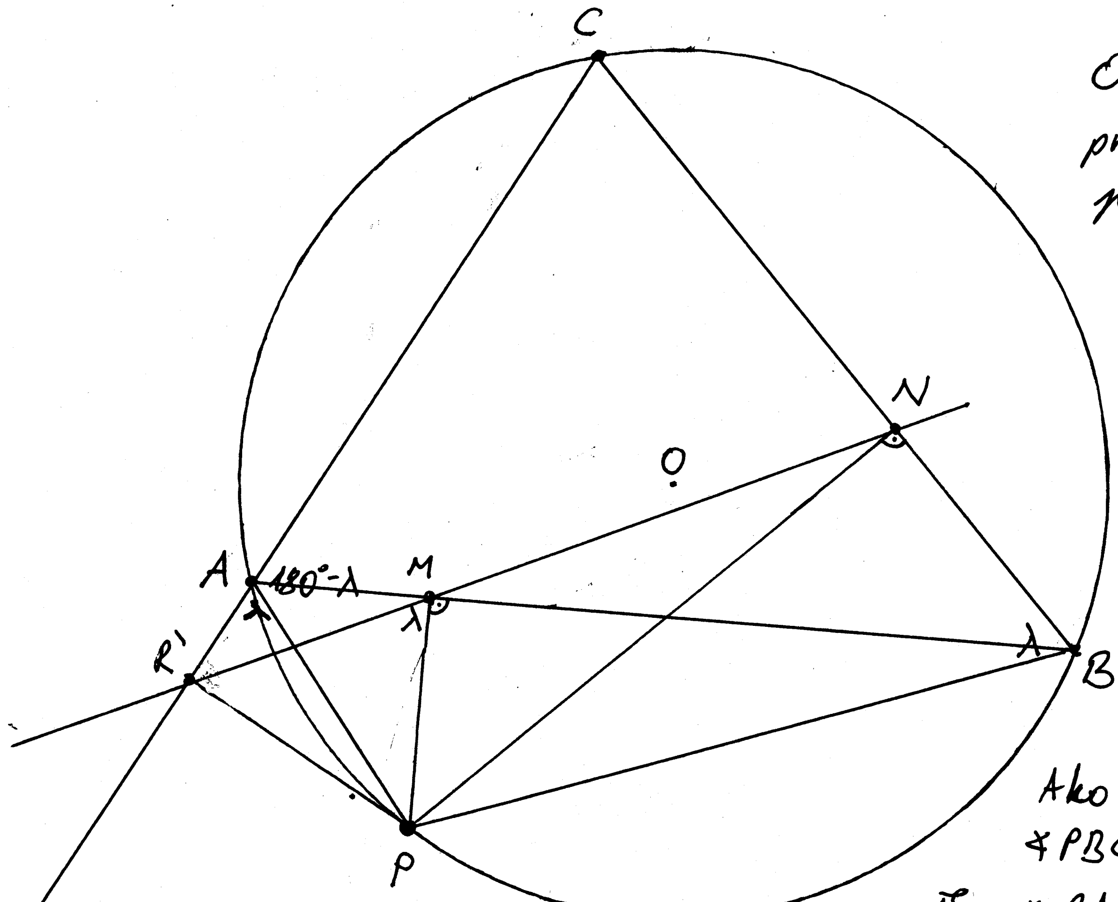
$$\alpha = \sigma_{\pi(a)} .$$

(#) Dat je trougao ΔABC i proizvoljna tačka P na krugu opisanoj oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

Rj. postavka zadatka

ΔABC
$k(O,r)$ krug opisan oko ΔABC
$P \in k$
M, N i R redom ortogonalne projekcije tačke P na $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$

$\Rightarrow$ tačke M, N i R su kolinearne



Označimo sa R' presjek pravih $p(M,N)$ i $p(A,C)$. Ako pokažemo da je $\measuredangle CR'P$ prav, naš dokaz je gotov. Posmatrajmo $\square APBC$ (tetivni četverougao). Ako označimo $\measuredangle PBC = \lambda$ imamo da je $\measuredangle PAC = 180° - \lambda$

$\Rightarrow \measuredangle PAR' = \lambda$. Četverougao $\square PBNM$ je tetivni (uglovi $\measuredangle BNP$ i $\measuredangle BMP$ gledaju na istu stranicu PB i podudarni su) $\Rightarrow \measuredangle NMP = 180° - \lambda \Rightarrow \measuredangle PMR' = \lambda$. Primjetimo sad da je $\square R'PMA$ tetivni ($\measuredangle PMR' \cong \measuredangle PAR' = \lambda$) $\Rightarrow \measuredangle PR'A + \measuredangle PMA = 180°$, pa kako je $\measuredangle PMA = 90° \Rightarrow \measuredangle PR'A = 90° \Rightarrow R' \equiv R \Rightarrow$ tačke M, N i R su kolinear.
q.e.d.