Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

c) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

d) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

e) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Zadatak br. 2

Dokazati tvrđenja:
a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;
b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Zadatak br. 3

Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

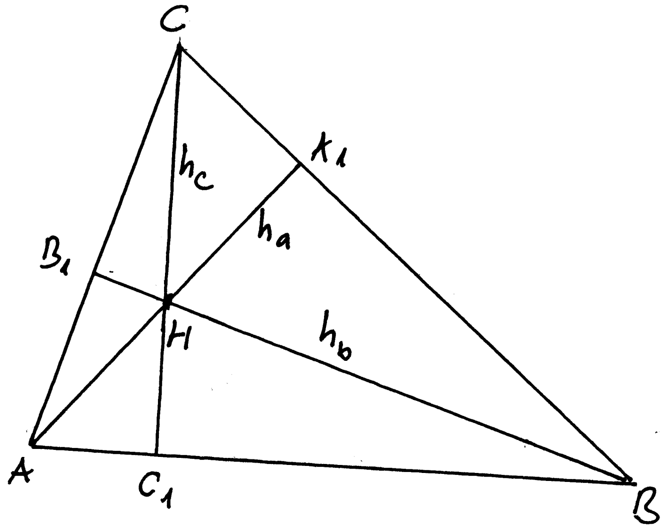
Zadatak br. 4

Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

7) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

Rj.



$h_a = 2\,cm$

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$h_b = 4\,cm$

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$$

$h_c = 6\,cm$

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{6c}{2} = 3c$$

Sad imamo

$$a = 2b = 3c \quad \text{tj.} \quad b = \frac{1}{2}a$$

$$c = \frac{1}{3}a$$

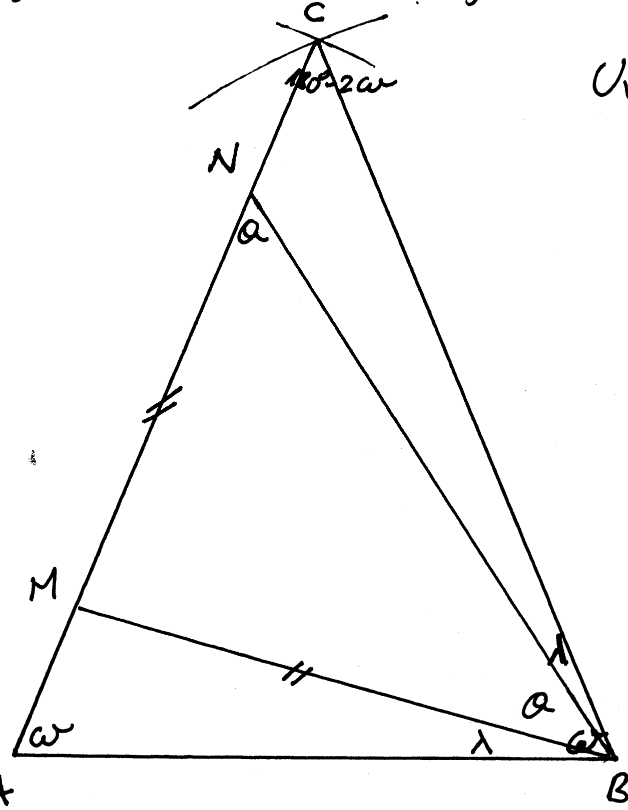
Kako je

$$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a \quad \text{tj.} \quad b + c < a$$

trougao sa datim dužinama visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\sphericalangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN = \lambda$
(prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \sphericalangle MBN \cong \sphericalangle BNM = \alpha$.

Sad primjetimo

$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2\omega$

Kako je $\sphericalangle BNA$ vanjski ugao ΔABC to je

$\alpha = 180^\circ - 2\omega + \lambda$

(kako je $\sphericalangle BMA$ vanjski ugao ΔABM) $\Rightarrow$

$$\sphericalangle AMB = 2\alpha = 360^\circ - 4\omega + 2\lambda$$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$$\underline{\omega} + \lambda + 360^\circ \underline{- 4\omega} + 2\lambda = 180^\circ$$

$$3\omega - 3\lambda = 180^\circ \quad /:3$$

$$\omega = 60^\circ + \lambda \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 120^\circ - 2\lambda + \lambda$$

$$\alpha = 60^\circ - \lambda$$

Na kraju $\sphericalangle ABN = \lambda + \alpha = \lambda + 60^\circ - \lambda = 60^\circ$

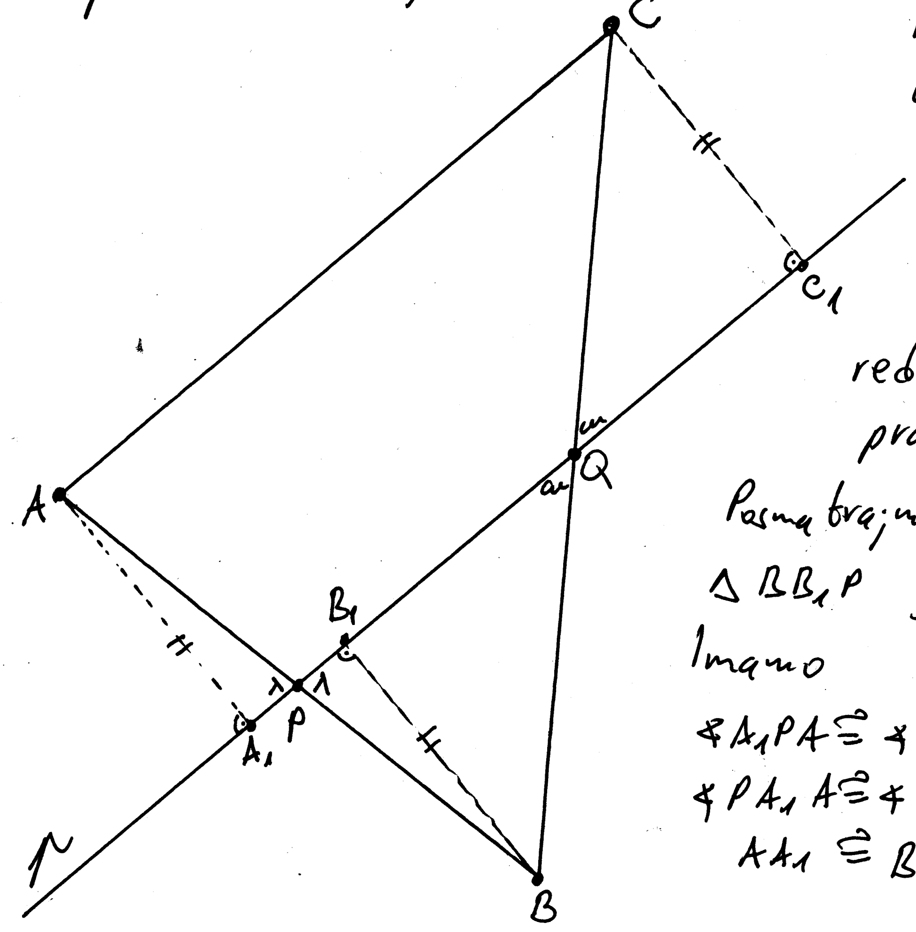
$$\sphericalangle ABN = 60^\circ.$$

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je poredak tački kao na slici. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.



Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

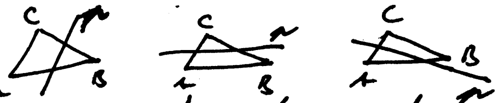
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A_1PA \cong \sphericalangle B_1PB = \lambda \\ \sphericalangle PA_1A \cong \sphericalangle PB_1B = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B_1QB \cong \sphericalangle C_1QC = \omega \\ \sphericalangle BB_1Q \cong \sphericalangle CC_1Q = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primjetiti da prava p prolazi kroz sredine stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

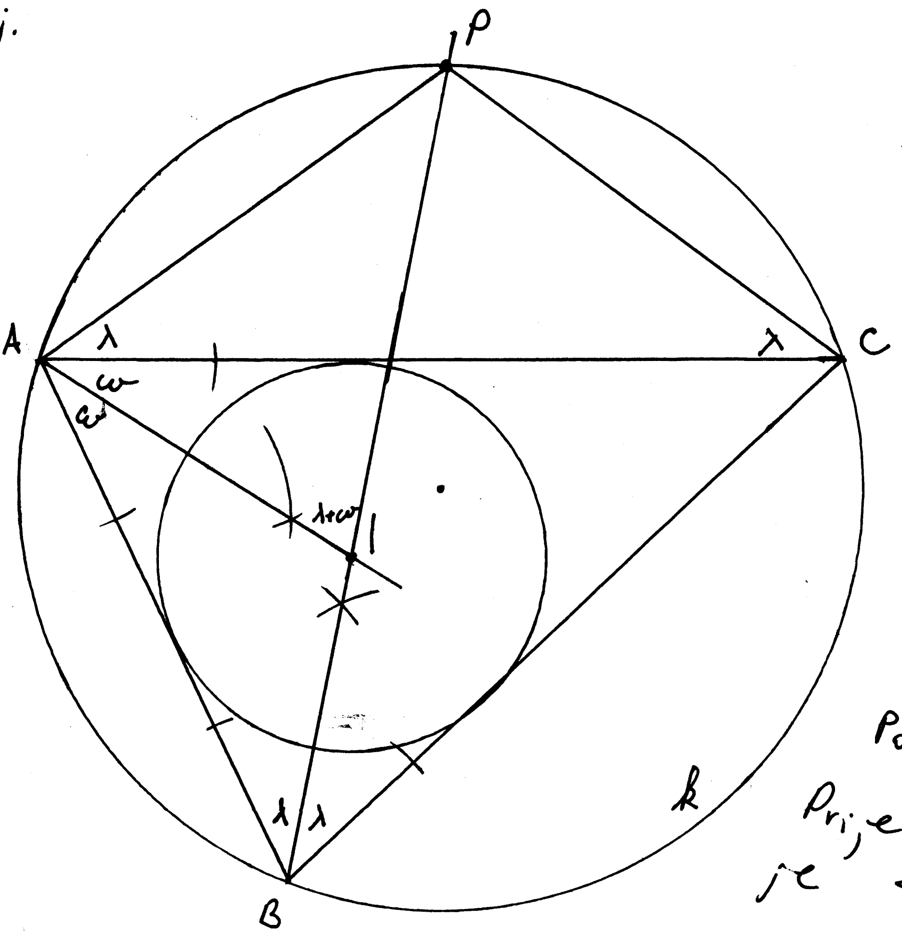
Diskusija



Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC $(AB<BC)$, k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave pp$[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle CBP = \lambda$. Četvorougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \lambda$ i

$\measuredangle PCA = \measuredangle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad ΔAIP. Prije toga primjetimo da je $\measuredangle BAI \cong \measuredangle CAI = \omega$

(ZAŠTO?)

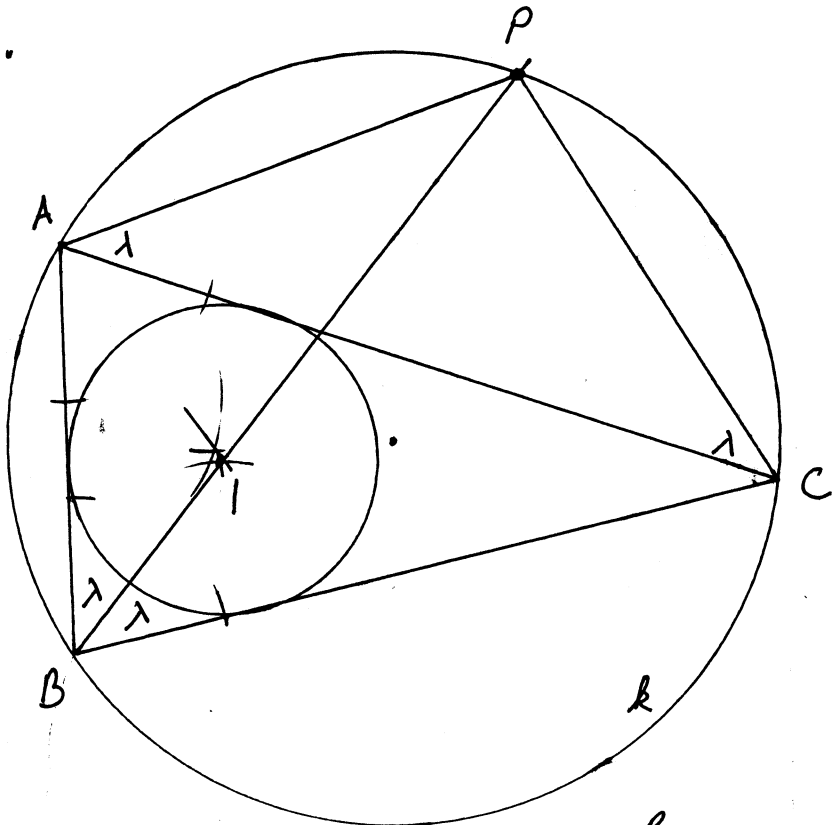
U trouglu ΔPAI $\measuredangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\measuredangle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\measuredangle PIA = \measuredangle ABI + \measuredangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\measuredangle PAI \cong \measuredangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC $(AB<BC)$. Neka je k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Rj.



P središte luka AC

$\Rightarrow$ P je podjednako udaljena od tački A i C $\Rightarrow$ ΔACP jk

$\Rightarrow$ $\sphericalangle PAC \cong \sphericalangle PCA = \lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imamo da

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \lambda$ i

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle ACP = \lambda$

pa je BP simetrala ugla $\sphericalangle ABC$.

Kako je tačka I presjek simetrala uglova to je

$I \in BP$

q.e.d.

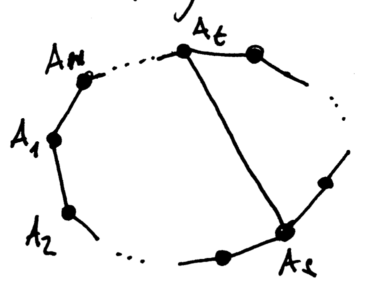
(#) Dokazati tvrđenja:

(a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;

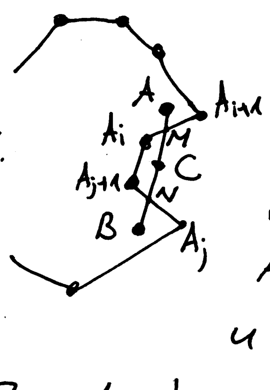
(b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Rj. Prisjetimo se definicije konveksnosti: Za figuru F u ravni ili u prostoru kažemo da je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F imamo da sve tačke duži AB pripadaju figuri F.

a) Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ konveksan mnogougao. Trebamo dokazati da svaka dijagonala dijeli ovaj mnogougao na dva konveksna mnogougla.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoji dijagonala A_tA_s koja dijeli mnogougao na dva mnogougla od kojih jedan nije konveksan. Mnogougao koji nije konveksan označimo sa $A_sA_{s+1}\ldots A_t$. Kako mnogougao nije konveksan to znači da postoje dvije tačke A i B koje pripadaju unutrašnjosti mnogougla ali $AB \not\subset A_sA_{s+1}\ldots A_t$. To znači da $\exists$ tačka $C \in AB$ takva da $C \notin$ unutrašnjosti mnogougla.



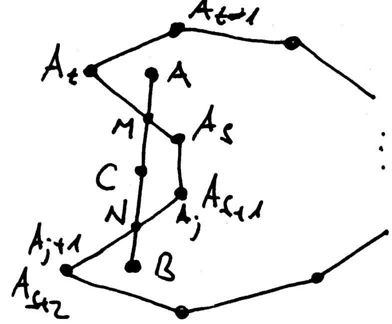
Ako sad posmatramo duži AC i BC, kako A i B pripadaju unutrašnjosti a tačka C vanjskoj oblasti mnogougla to AC siječe neku stranicu mnogougla A_iA_{i+1} u tački M a BC neku drugu stranicu A_jA_{j+1} u tački N.

Za tačke M i N je moguć jedan od sljedeća dva slučaja:

1° tačka M ili N pripada dijagonali A_sA_t mnogougla $A_1A_2\ldots A_n$

2° tačke M i N ne pripadaju dijagonali A_sA_t mnogougla $A_1A_2\ldots A_n$

Pa razmotrimo prvi slučaj.



Recimo da M pripada dijagonali A_tA_s mnogougla $A_1A_2\dots A_N$ (slično razmatranje bi imali i za slučaj da tačka N pripada dijagonali).

Posmatrajmo mnogougao $A_1A_2\dots A_N$ i stranicu A_jA_{j+1} mnogougla kojoj pripada tačka N. Znamo da su tačke B i C sa različitih strana $p(A_j, A_{j+1})$. Ovo znači da poluravan sa ivicom u $p(A_j, A_{j+1})$ koja sadrži tačku B ne sadrži sve vrhove (npr. ne sadrži vrh A_t)

#kontradikcija

(za konveksan mnogougao svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu mnogougla).

Prema tome prvi slučaj nije moguć.

Međutim ako bi bio drugi slučaj odmah imam da su A i B unutrašnje tačke mnogougla $A_1A_2\dots A_N$ ali $AB \not\subset$ mnogouglu $\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\dots A_N$ nije konveksan

#kontradikcija (mnogougao je konveksan)

Možemo zaključiti: Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

b) Dokaz za ovaj dio se lagano može svesti na dio pod a).
Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\dots A_N$ i neka su A i B proizvoljne tačke na različitim stranicama mnogougla.
Sad možemo posmatrati mnogougao $A_1A_2\dots A_iAA_{i+1}\dots A_jBA_{j+1}\dots A_N$ i sprovesti razmatranje kao u slučaju pod a). Prema tome svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

(#) Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna – sama sebi inverzna).

Rj.

postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ transformacija podudarnosti} \\ \quad\text{u ravni} \\ \pi \circ \pi = id \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \text{ je } \underline{\qquad\qquad}; \ \underline{\qquad\qquad}.$$

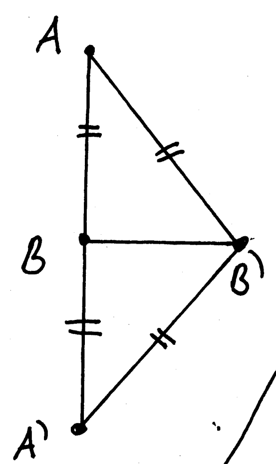
$$\pi \circ \pi = id \Rightarrow \pi = id \vee \pi \neq id$$

Kako je id (identitet) transformacija podudarnosti u ravni i vrijedi $id \circ id = id$ $\Rightarrow$ id je involutivna transformacije podudarnosti u ravni.

Neka je sad $\pi \neq id$ involutivna transformacija podud. u ravni. π nije identitet pa $\exists$ tačka A takva da $\pi(A) = A'$. Kako je π involutivna transformacija to $\pi \circ \pi(A) = A$ tj.

$\pi(\pi(A)) = \pi(A') = A$. Prema tome imamo

$$\pi(A) = A' \ ; \ \pi(A') = A.$$



Označimo sa B sredinu duži AA'. Za tačku B je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja:

1° $\pi(B) = B$

2° $\pi(B) = B'$; $B \neq B'$.

Da bi odredili šta je π, posmatraćemo ponašanje involutivne transf. podud. π na tri nekolinearne tačke u ravni.

Ako bi bio drugi slučaj, kako transformacija π čuva dužine, bi imali sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong \pi(A)\pi(B) = A'B' \\ AB \cong A'B \ \text{(B sredina AB)} \\ A'B \cong \pi(A')\pi(B) = AB' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A i A' leže na simetrali duži } BB'$$

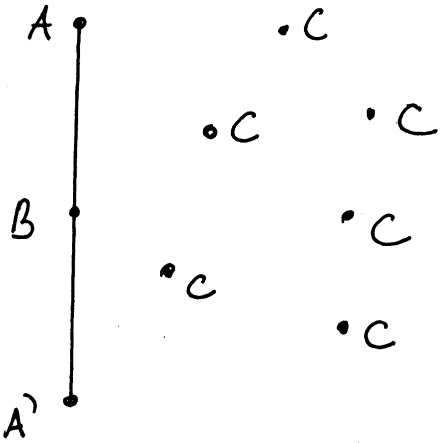
$$\Downarrow$$

$B \notin p(A, A')$
#kontradikcija
(sa činjenicom da je B sredina AA')

Prema tome pretpostavka da je 2° nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Tj. imamo

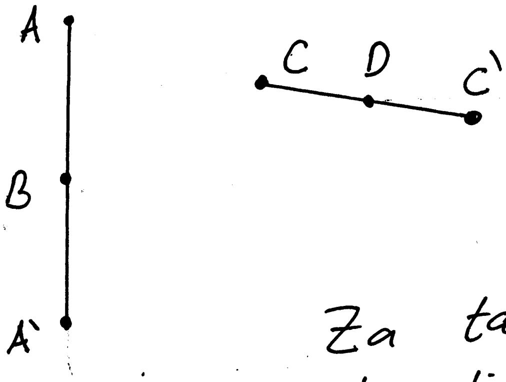
$$\pi(B) = B$$

Sad se pitamo da li postoji tačka C ($C \notin p(A, A')$) t.d. $\pi(C) \neq C$?



Ako bi bilo $\pi(C) = C$ za svaku tačku $C \notin p(A, A')$, kako π čuva dužine imali bi $AC \cong A'C$ $\forall C$ što je očigledno nemoguće (samo tačke sa simetrale duži AA' imaju tu osobinu).

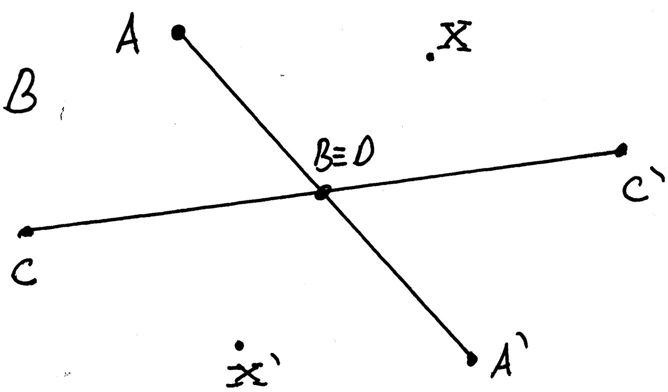
Prema tome $\exists$ tačka C t.d. $\pi(C) = C'$ i $C \neq C'$.



Ako sa D označimo sredinu duži CC' na isti način kao maloprije nije teško pokazati da je $\pi(D) = D$.

Za tačku D je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja: 1° $D \equiv B$
2° $D \neq B$.

1° $D \equiv B$



Tačke A, B i C su nekolinearne i za njih važi sljedeće: $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B$, $\pi(C) = C'$

$\pi(A)=A'$ i B sredina duži AA'

$\pi(C)=C'$ i B sredina duži CC'

Za proizvoljnu tačku X iz ravni ABC takvu da $X\neq B$ imamo da je ili $\pi(X)=X$ ili $\pi(X)=X'$ $(X\neq X')$.

Ako bi bilo $\pi(X)=X$ nije teško pokazati da bi tada X pripadala simetrali duži AA' i simetrali duži CC'. Kako su to dvije različite simetrale a X pripada i jednoj i drugoj X je presječna tačka simetrala. Ali, kako se ove simetrale sijeku u tački B (OBJASNITI ZAŠTO) dobili bi da je $X\equiv B$ # kontradikcija.

Prema tome mora biti $\pi(X)=X'$ i $X\neq X'$. Sad imam

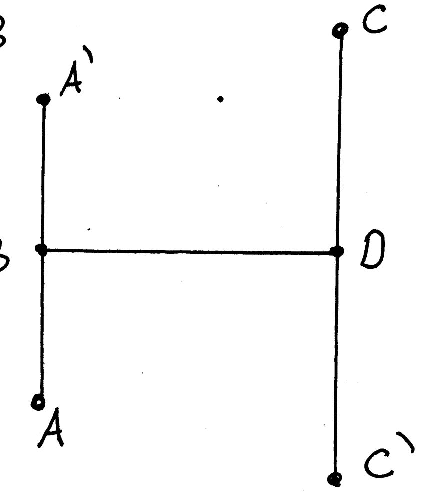
$$\left.\begin{array}{l} AX\cong \pi(A)\pi(X)=A'X' \\ XB\cong \pi(X)\pi(B)=X'B \\ AB\cong A'B \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ABX\cong\triangle A'BX'$$

$$\Downarrow$$

B je sredina XX'

Prema tome naša transformacija podudarnosti π ima samo jednu fiksnu tačku B; svaku tačku X iz ravni preslikava u neku novu tačku X' tako da je B sredina duži XX'. Iste ove osobine ima i centralna simetrija. Prema tome π je centralna simetrija sa centrom simetrije u tački B.

2° $D\neq B$



Pokazati za vežbu da u ovom slučaju π mora biti osna simetrija sa osom u pravoj $p(B,D)$.

Prema tome našli smo tri involutivne transformacije podudarnosti u ravni:

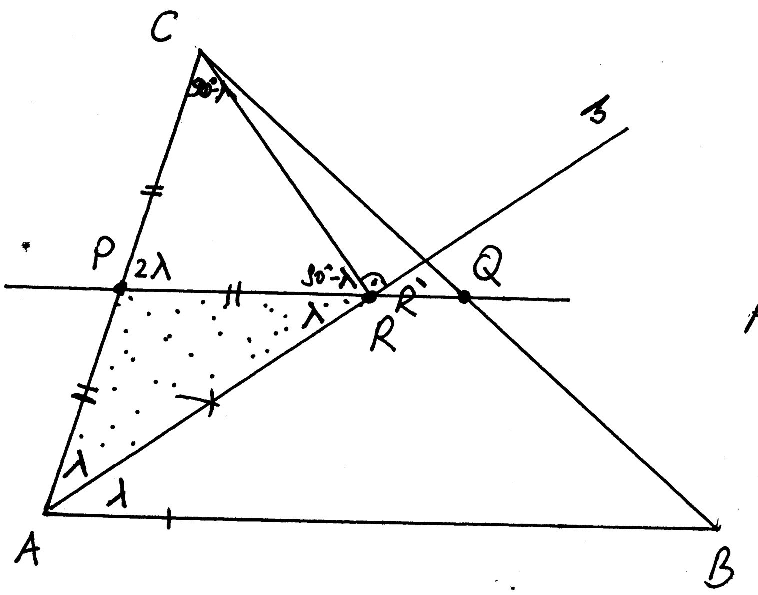
1. identitet 2. centralna simetrija 3. osna simetrija.

(#) Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla ΔABC, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\sphericalangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

Rj.

postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ P \text{ sredina } AC \\ Q \text{ sredina } BC \\ s \text{ simetrala ugla } \sphericalangle BAC \\ R \text{ ortogonalna projekcija tjemena } C \text{ na } s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P, Q \text{ i } R \\ \text{su kolinearne} \\ \text{tačke} \end{array}$$



P sredina AC, Q sredina BC

$\Rightarrow PQ$ srednja linija trougla

$\Rightarrow PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$PQ \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle QPC = 2\lambda$

Označimo sa R' presjek simetrale s i $p(P,Q)$.

Posmatrajmo $\Delta APR'$. Vanjski ugao tog trougla je $\sphericalangle R'PC = 2\lambda$. Kako je vanjski ugao jednak zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla i $\sphericalangle R'AP = \lambda$ imamo da je $\sphericalangle AR'P = \lambda$.

$\Rightarrow \Delta APR'$ je jkk. tj. $AP \cong PR'$.

P je sredina AC $\Rightarrow AP \cong PC \Rightarrow \Delta CPR'$ je jkk sa osnovicom u CR, i uglom $\sphericalangle CPR = 2\lambda$.

Imamo da $\sphericalangle PCR' \cong \sphericalangle PR'C = 90^\circ - \lambda$.

$$\sphericalangle AR'C = \lambda + 90^\circ - \lambda = 90^\circ \xRightarrow{R \text{ ortog. pr. na } s} R' \equiv R$$

Prema tome tačke R, P i Q su kolinearne

q.e.d.