Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 18.06.2010

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

b) Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.

c) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao $\triangle BCP$ jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$.

d) Četverougao $\square INFO$ je upisan u kružnicu k i $\{S\} = IF \cap NO$. Ako su $\measuredangle NIF = 35°$ i $\measuredangle IFO = 85°$ odredi ugao $\measuredangle FSN$.

d) U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Dokazati da je S sredina duži AB ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

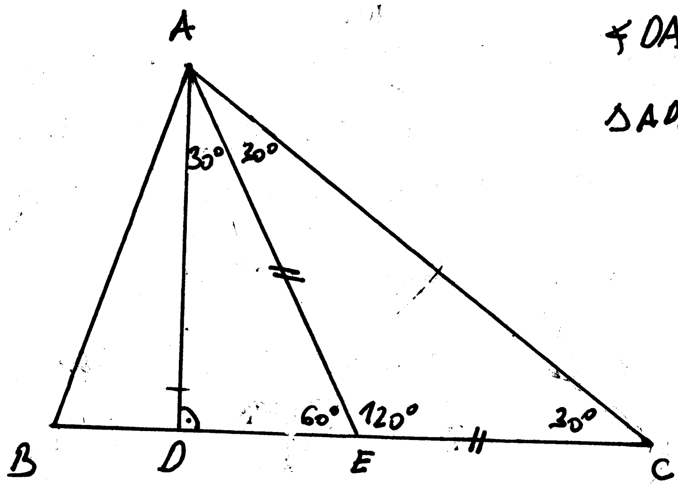
Zadatak br. 4 (20 bodova)

U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od prave CD su podudarna, a pored toga je $AC + CB \cong AD + DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

(Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) U trouglu ΔABC je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla ΔABC i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\measuredangle DAE \cong \measuredangle CAE = 30°$

ΔADE pravougli $\Rightarrow \measuredangle AEC = 120°$

(vanjski ugao ΔADE)

$\Rightarrow \measuredangle ACE = 30° \Rightarrow \Delta AEC$ jkk

tj. $AE = EC$

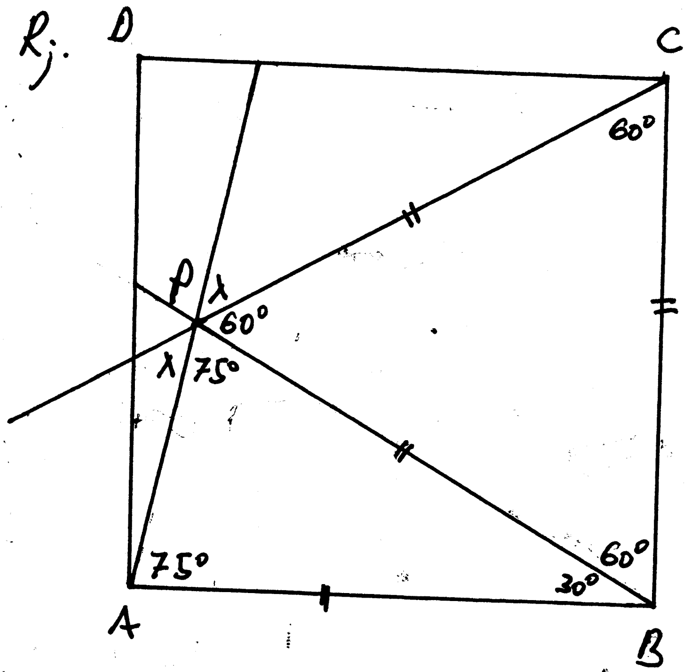
ΔABC jkk $\Rightarrow$

$\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA = 75°$

$\alpha = 75°, \beta = 75°, \gamma = 30°$

(#) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



ΔBCP jkk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\measuredangle ABC = 90° \Rightarrow \measuredangle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \Delta ABP$ jkk

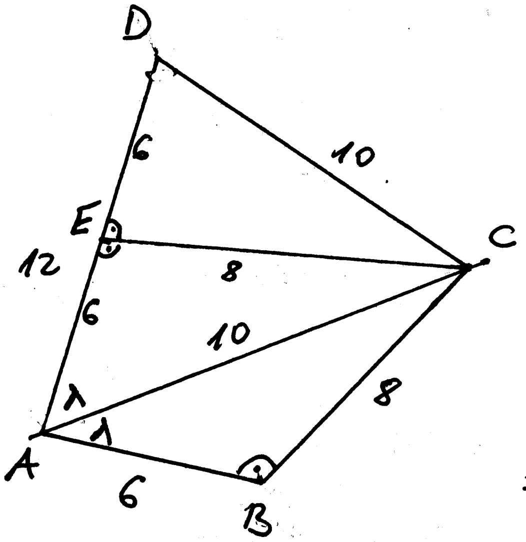
$\Rightarrow \measuredangle BAP \cong \measuredangle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

$\lambda = 45°$

(#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.



$AB < BC$, $BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD$, $CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD$, $AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36$ cm $\Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8$, $CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

$\triangle ECD$ je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

$P_{\triangle ACD} = \dfrac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$

$P_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$

$P_{\square ABCD} = 72$ cm^2

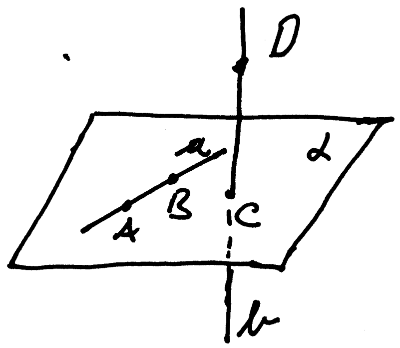
#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.

R: postavka zadatka

prava a $\Longrightarrow$ $\exists b :$ a i b ne pripadaju istoj ravni

---



Neka je data prava a.
Prema aksiomi I_3 $\exists C : C \notin a$, i prema istoj aksiomi $\exists A, B :$ $A, B \in a$.

Za tačke A, B i C (koje su nekolinearne) prema aksiomi I_1 i I_6 $\exists$ tačno jedna ravan α : $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$. Za ravan α prema aksiomi I_8 $\exists$ tačka D takva da $D \notin \alpha$. Prava $p(D, C)$ je tražena prava.

Uvedimo oznaku $b = p(D, C)$.

Ako bi prave a i b bile komplanarne, tj. pripadale nekoj ravni β, imali bi da $A, B, C, D \in \beta$.

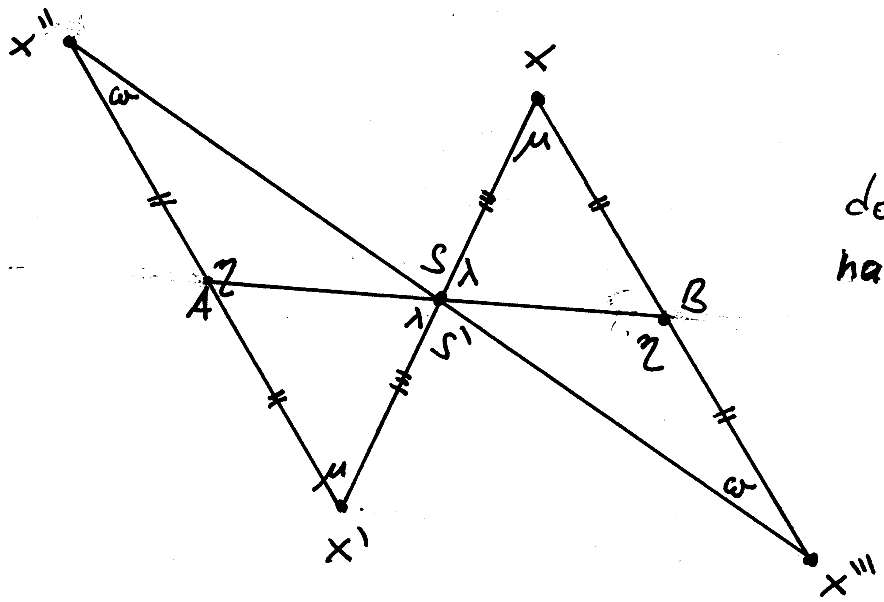
$$\left.\begin{matrix} A, B, C \in \alpha \\ A, B, C \in \beta \end{matrix}\right\} \xRightarrow{I_4, I_5} \alpha \equiv \beta \Rightarrow b \subset \alpha \Rightarrow D \in \alpha$$

#kontradikcija

Pretpostavka da su prave a i b komplanarne nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni. q.e.d.

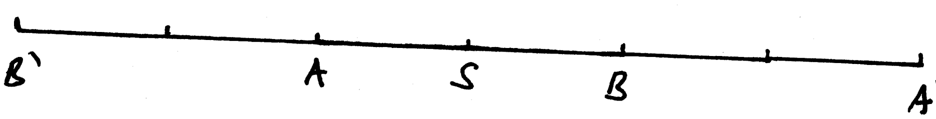
(#) Dokazati da je S sredina duži AB ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

Rj. „$\Rightarrow$": S sredina duži AB $\Rightarrow$ $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.



Da bi dokazali jednakost
$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$
dovoljno ju je dokazati na tri nekolinearne tačke.
Posmatraćemo tačke A, B i $X \notin p(A,B)$.
S je sredina duži AB.

a) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = \sigma_A(\sigma_S(A)) = \sigma_A(B) = B'$ (A je sredina BB')
$(\sigma_S \circ \sigma_B)(A) = \sigma_S(\sigma_B(A)) = \sigma_S(A')$ (B je sredina AA')



$\left.\begin{array}{l} BA \cong B'A \\ AB \cong A'B \\ AS \cong BS \end{array}\right\} B'S \cong A'S$

$\Rightarrow \sigma_S(A') = B'$ Prema tome $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(A)$

b) $\left.\begin{array}{l} (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = \sigma_A(\sigma_S(B)) = \sigma_A(A) = A \\ (\sigma_S \circ \sigma_B)(B) = \sigma_S(\sigma_B(B)) = \sigma_S(B) = A \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(B)$

c) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(X) = \sigma_A(\sigma_S(X)) = \sigma_A(X')$ ($SX \cong SX'$) (S sredina XX')
$\sigma_A(X') = X''$ ($AX' \cong AX''$) (A sredina $X'X''$)

$(\sigma_S \circ \sigma_B)(X) = \sigma_S(\sigma_B(X)) = \sigma_S(X''')$ (B sredina XX''') ($XB \cong X'''B$)

Trebamo pokazati da je S sredina $X''X'''$.

$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ \measuredangle XSB \cong \measuredangle X'SA = \lambda \\ AS \cong BS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle XSB \cong \triangle ASX'$
$\Downarrow$
$AX' \cong BX$; $\measuredangle SXB \cong \measuredangle SX'A = \mu$

Primjetimo sad da je $x'x'' \cong xx'''$, i primjetimo da je

$\mu(x', x'') \parallel \mu(x, x''') \Rightarrow \measuredangle Ax''S \cong \measuredangle Bx'''S$ i $\measuredangle x''AS \cong \measuredangle x'''BS = \eta$

Ako sa S' označim presjek $\{S'\} = AB \cap x''x'''$ iz podudarnosti SUS (ugao ω, $Ax'' \cong Bx'''$, ugao η) slijedi da je $\Delta x''AS' \cong \Delta x'''BS'$

$$\Downarrow$$

$$AS' \cong BS'$$

tj. $S \equiv S'$

Konačno iz

$$\left.\begin{array}{l} x'x'' \cong xx''' \\ \measuredangle x''x'S = \measuredangle Sxx''' = \mu \\ xS \cong x'S \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta x''x'S \cong \Delta Sxx'''$$

$$\Downarrow$$

$$x''S \cong x'''S$$

(S je sredina duži $x''x'''$)

Znači $\sigma_S(x''') = x''$

Dobili smo $(\sigma_A \circ \sigma_S)(x) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(x)$

Prema tome, iz a), b) i c) $\Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$

q.e.d.

„$\Leftarrow$": $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \Rightarrow S$ sredina duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_S$ sa desne

$\sigma_A = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$ Označimo sa $\gamma = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$.

Nije teško pokazati da je γ involutivna transformacija čija je jedina fiksna tačka $\sigma_S(B)$ (OVE DVIJE TVRDNJE DOKAZATI ZA VJEŽBU).

Prema tome imamo ili a) γ je identitet ili
b) γ je osna simetrija
c) γ je centralna simetrija

a) i b) nije (ZAŠTO) $\Rightarrow \gamma$ je centralna simetrija sa centrom u tački $\sigma_S(B) \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{\sigma_S(B)} \Rightarrow A = \sigma_S(B)$

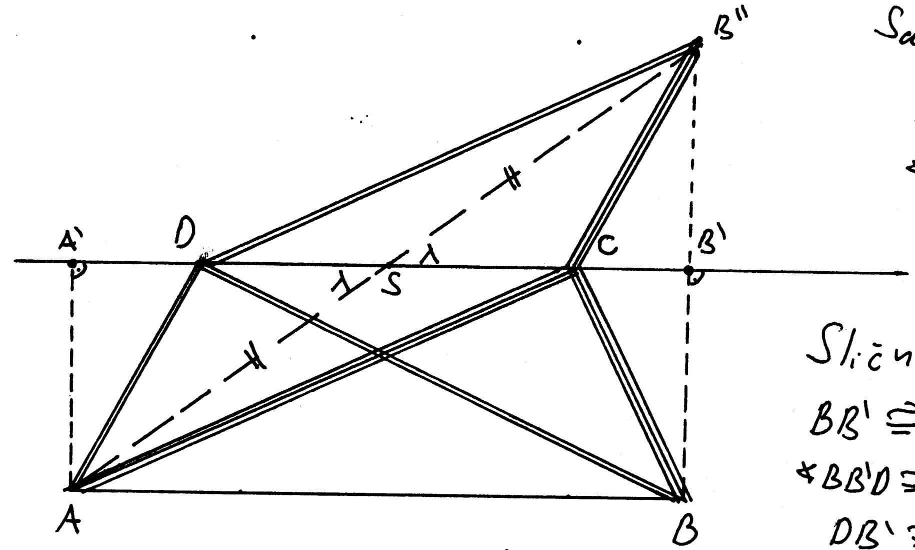
$\Rightarrow S$ je sredina duži AB

q.e.d.

U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ rastojanja tjemena A i B od prave $p(C,D)$ su podudarna, a pored toga je $AC+CB \cong AD+DB$. Dokazati da je $AD \cong BC$ i $AC \cong BD$.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan, } A' \text{ ortog. proj. tač } A \text{ na } p(C,D) \\ B' \text{ ortog. proj. tač } B \text{ na } p(C,D),\ AA' \cong BB' \\ AC+CB \cong AD+BD \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} AD \cong BC \\ i \\ AC \cong BD \end{array}$$



Uzmimo tačku B'' takvu da je $BB' \cong BB''$ i $B-B'-B''$

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle CB'B \cong \measuredangle CB'B'' = \text{prav} \\ B'C \cong B'C \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle CBB' \cong \triangle CB''B' \quad \Downarrow \quad BC \cong B''C$$

Slično:

$$\left.\begin{array}{l} BB' \cong B'B'' \\ \measuredangle BB'D \cong \measuredangle B''B'D = \text{prav} \\ DB' \cong DB' \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle DB'B \cong \triangle DB'B'' \quad \Downarrow \quad BD \cong B''D$$

Posmatrajmo dijagonalu AB'' četverougla $\square ACB''D$ ($AC+CB'' \cong AD+DB''$)

Označimo sa $\{S\} = AB'' \cap CD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle SA'A \cong \measuredangle SB'B'' \\ \quad \text{(prav ugao)} \\ \measuredangle A'SA \cong \measuredangle B'SB'' = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ AA' \cong B''B' \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle ASA' \cong \triangle B''SB' \quad \Downarrow \quad AS \cong SB''$$

Sad ako duž SD nanesem na polupravu $pp[S,C)$ nije teško pokazati da se mora desiti slučaj $SD \cong SC$, tj. u $\square ACB''D$ dijagonale se polove.

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong B''S \\ \measuredangle ASD \cong B''SC = \lambda \\ CS \cong SD \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASD \cong B''SC$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong B''C \\ B''C \cong BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD \cong BC$$

q.e.d.

Kako je još

$AC + \underline{CB} \cong \underline{\underline{AD}} + BD$

i $AD \cong BC$

$$\Downarrow$$

$AC \cong BD$

q.e.d.