Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 02.07.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

b) Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

c) Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, polupravа CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

d) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

e) Deltoid $\square SOUL$ rotirati oko tačke O za ugao od 150° u negativnom smjeru, a zatim novodobijeni četverougao preslikati centralnom simetrijom s centrom simetrije u tački S.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Dokazati da prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Dokazati da je samo tačka S, $\{S\} = a \cap b$, fiksna tačka transformacije podudarnosti $\pi = \sigma_a \circ \sigma_b$ $(a \not\equiv b)$.

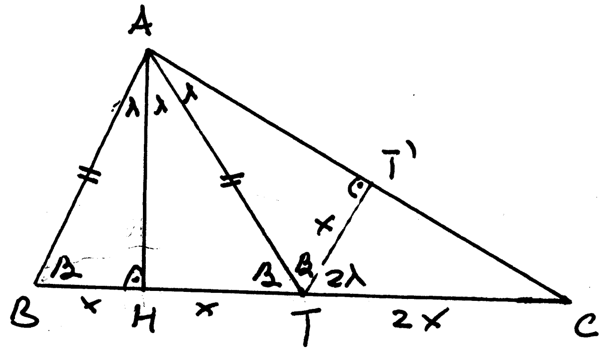
Zadatak br. 4 (20 bodova)

U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$?

Rj.



Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.
Primjetimo da je zbog podudarnosti USU $\triangle AHB \cong \triangle AHT$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong HT = x$$

Neka je T' ortogonalna projekcija tačke T na AC.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle TT'A \cong \measuredangle ABH = 90^\circ \\ \measuredangle TAT' \cong \measuredangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle TT'A \cong \triangle BHA$$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong TT' = x \quad i \quad \measuredangle T'TA \cong \measuredangle HBA = \beta$$

Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \measuredangle CTT' = 2\lambda$. $\triangle TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm i $AD = 7$ cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znamo samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

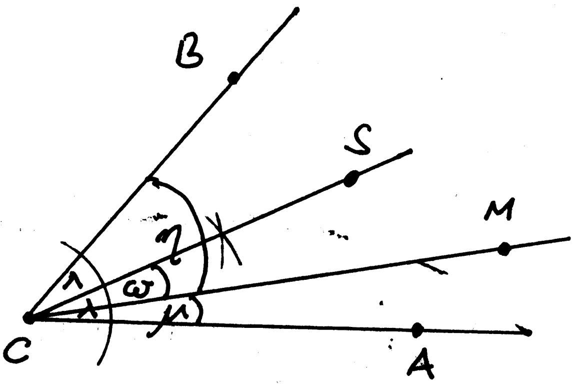
U četverougao se može upisati krug

$AB + CD = BC + AD$ (četverougao je tangentni)

(#) Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je

$$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB),$$

Rj:



Uvedimo oznake:

$\lambda = \measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB$

$\omega = \measuredangle SCM$

$\mu = \measuredangle MCA$ i $\eta = \measuredangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

tj.

$$\measuredangle SCM = \measuredangle ACS - \measuredangle MCA$$
$$\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle SCB \quad + \; (\measuredangle ACS \cong \measuredangle SCB)$$

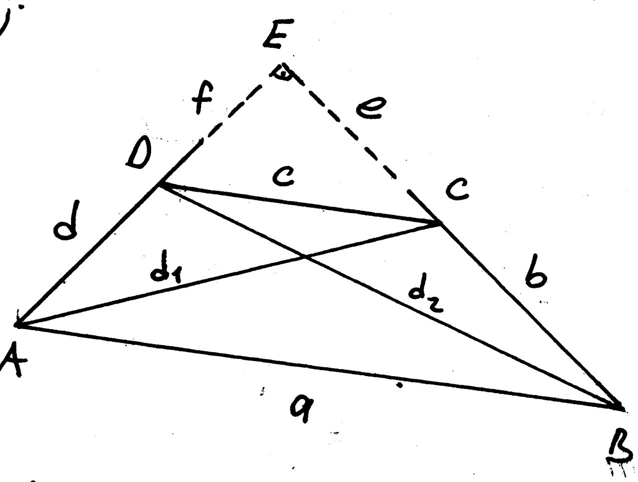
$$2\measuredangle SCM = \measuredangle MCB - \measuredangle MCA$$

$$\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCB - \measuredangle MCA)$$

q.e.d.

(#) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

ΔACE je pravougli sa hipotenuzom AC

$$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2 \quad \ldots (1)$$

ΔBDE je pravougli sa hipotenuzom BD

$$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2 \quad \ldots (2)$$

ΔABE je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

ΔDCE je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

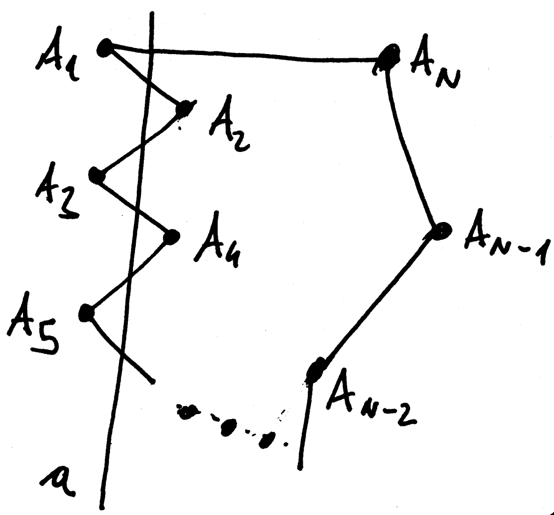
tj. $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.

#) Dokazati da prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Rj. Neka je dat mnogougao $A_1A_2A_3\ldots A_N$ (koji ima neparan broj stranica, time i neparan broj vrhova). N - neparan broj.

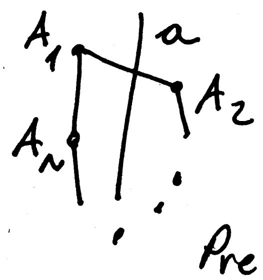
Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji prava koja siječe sve stranice ovog mnogougla.



Posmatrajmo $\Delta A_1A_2A_3$. Kako prava a siječe stranicu A_1A_2 i stranicu A_2A_3 to su tačke A_1 i A_3 sa iste strane prave sa koje nije tačka A_2.

Posmatrajmo $\Delta A_2A_3A_4$. Kako prava a siječe stranice A_2A_3 i A_3A_4 to su A_2 i A_4 sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_3. Nastavljajući ovaj proces dolazimo do zaključka da su vrhovi $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{N-2}, A_N$ sa jedne strane prave dok su vrhovi $A_2, A_4, \ldots, A_{N-1}$ sa druge strane prave a.

Sad ako posmatramo $\Delta A_1A_2A_N$ imamo da su A_1 i A_N sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_2,



tj. dobijamo da prava a ne siječe stranicu A_1A_N.

#kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

(#) Dokazati da je samo tačka S, $\{S\} = a \cap b$ fiksna tačka transformacije podudarnosti $\Pi = \sigma_a \circ \sigma_b$ $(a \not\equiv b)$.

Rj: postavka zadatka

| Napomena: Transformacija $\sigma_a \circ \sigma_b$ predstavlja rotaciju oko tačke S.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ prave} \\ a \not\equiv b \\ \{S\} = a \cap b \\ \Pi = \sigma_a \circ \sigma_b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Pi(S) = S \\ \forall (X \not\equiv S)\ \Pi(X) = X' : X' \not\equiv X \end{array}$$

---

a) Provjerimo da li je tačka S fiksna tačka transformacije podudarnosti Π

$$\Pi(S) = \sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=\!=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=\!=} S \qquad \text{tj. } \Pi(S) = S$$

Tačka S jest fiksna tačka transformacije

b) Pokažimo jedinstvenost tačke S. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da pored tačke S postoji tačka $X \not\equiv S$ takva da $\Pi(X) = X$.

$a \cap b = \{S\}$ i $X \not\equiv S \Rightarrow X \in a \cap b$ Razmotrimo dva slučaja:

1° $X \in b$

Tad $\sigma_b(X) = X$ i $\Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) \overset{X \in b}{=\!=} \sigma_a(X) \overset{\Pi(X)=X}{=\!=} X \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in a$ (kako je i $X \in b$) $\Rightarrow X \in a \cap b \Rightarrow X \equiv S$

kontradik. $(X \not\equiv S)$

2° $X \notin b$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tad } \sigma_b(X) = X' \text{ i } X \not\equiv X' \text{ (} b \text{ simetrala duži } XX'\text{)} \\ \Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = \sigma_a(X') \overset{\Pi(X)=X}{=\!=} X \text{ (} a \text{ simetrala duži } XX'\text{)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

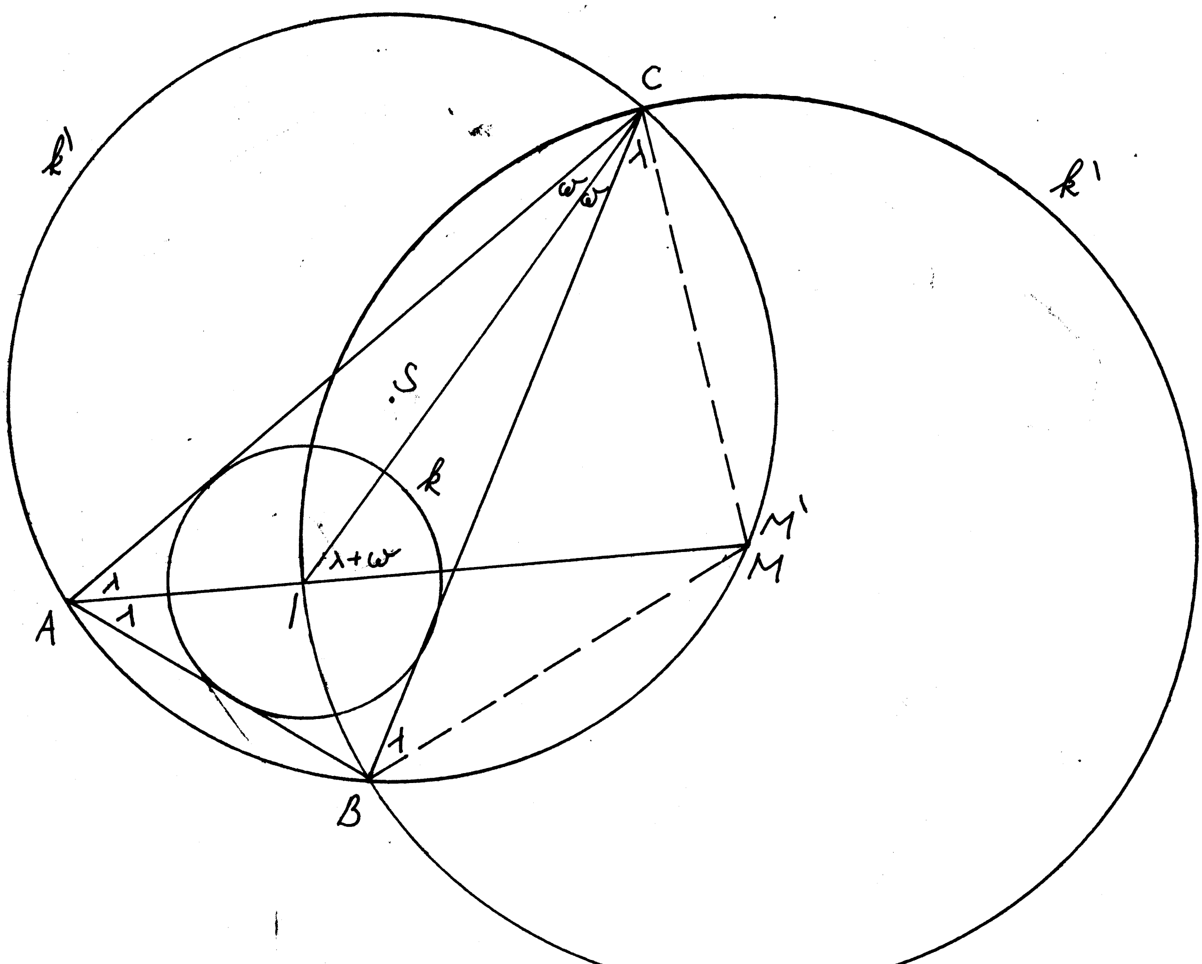
$\Rightarrow a$ i b simetrale duži $XX' \Rightarrow a \equiv b$ # kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

Pretpostavka da tačka S nije jedina fiksna tačka transformacije podudarnosti Π nas dovodi u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome: S je jedina fiksna tačka transformacije Π q.e.d.

(#) U $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

Rj. postavka zadatka $\triangle ABC$,

$$\left.\begin{array}{l} k(I, r) \text{ upisana kružnica u } \triangle ABC \\ k'(S, r') \text{ kružnica opisana oko } \triangle ABC \\ k''(M, r'') \text{ kružnica opisana oko } \triangle BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A, I) \cap k' = \{M\}$$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A, I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\sphericalangle CAI \cong \sphericalangle BAI = \lambda$ i $\sphericalangle ACI \cong \sphericalangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow$ $\sphericalangle M'BC \cong \sphericalangle CAM' = \lambda$ i $\sphericalangle BCM' \cong \sphericalangle BAM' = \lambda$

$\triangle CBM'$ je jkk sa osnovicom u BC $\Rightarrow$ M' pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\sphericalangle M'IC$ je vanjski ugao $\triangle AIC$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\triangle M'CI$ je jkk sa osnovicom u IC $\Rightarrow$ M' pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow$ M' je centar opisane kružnice $\triangle CIB$ $\Rightarrow$ $M \equiv M'$

$\Rightarrow pp[A, I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.