Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

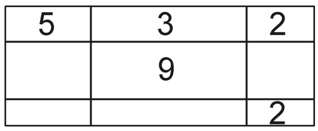
a) U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

b) Data je prava a. Konstruisati pravu p koja prolazi kroz datu tačku M koja ne pripada pravoj a, i koja siječe datu pravu a pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisti približno tačno.)

c) U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je M centar kruga k''.

d) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

e) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.



Zadatak br. 2

Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Zadatak br. 3

Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

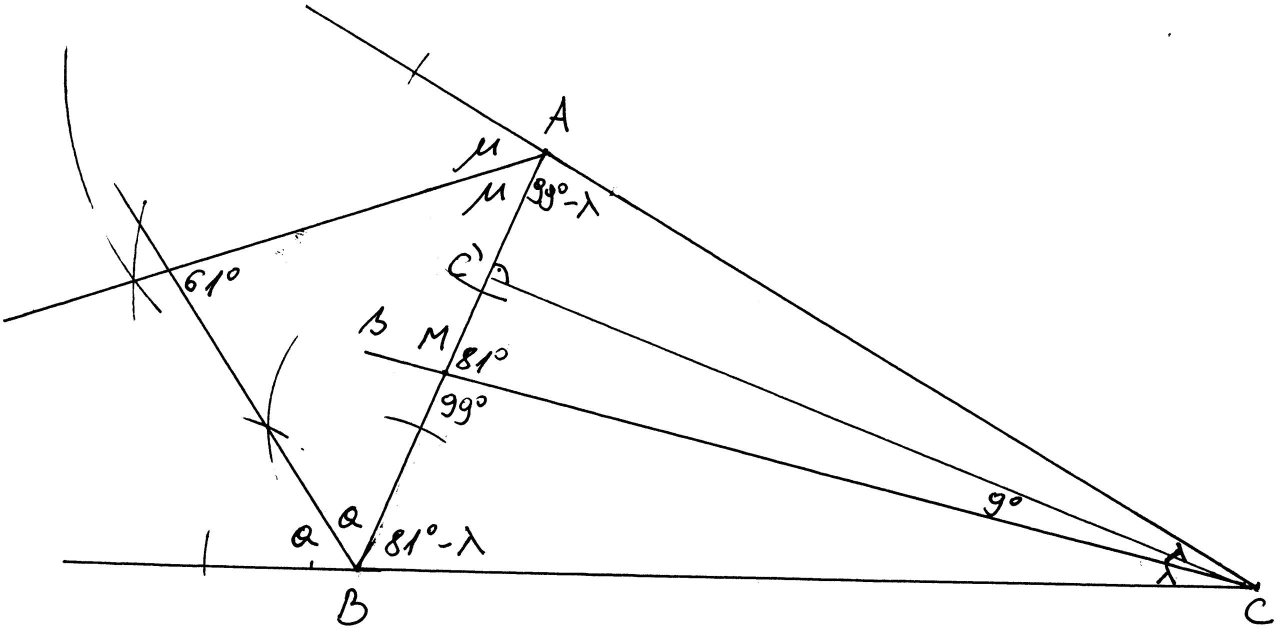
Zadatak br. 4

Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle CMC' = 81°$; $\measuredangle BMC = 99°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 99° - \lambda$; $\beta = 81° - \lambda$

$$\left.\begin{aligned} 2\mu + 99° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \quad \dots (*)$$

$\theta + \mu + 61° = 180°$ $/\cdot 2$

$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$

$2\theta + 2\mu = 238°$ ... $(**)$

$(*)$; $(**)$ $\Rightarrow$

$180° + 2\lambda = 238°$

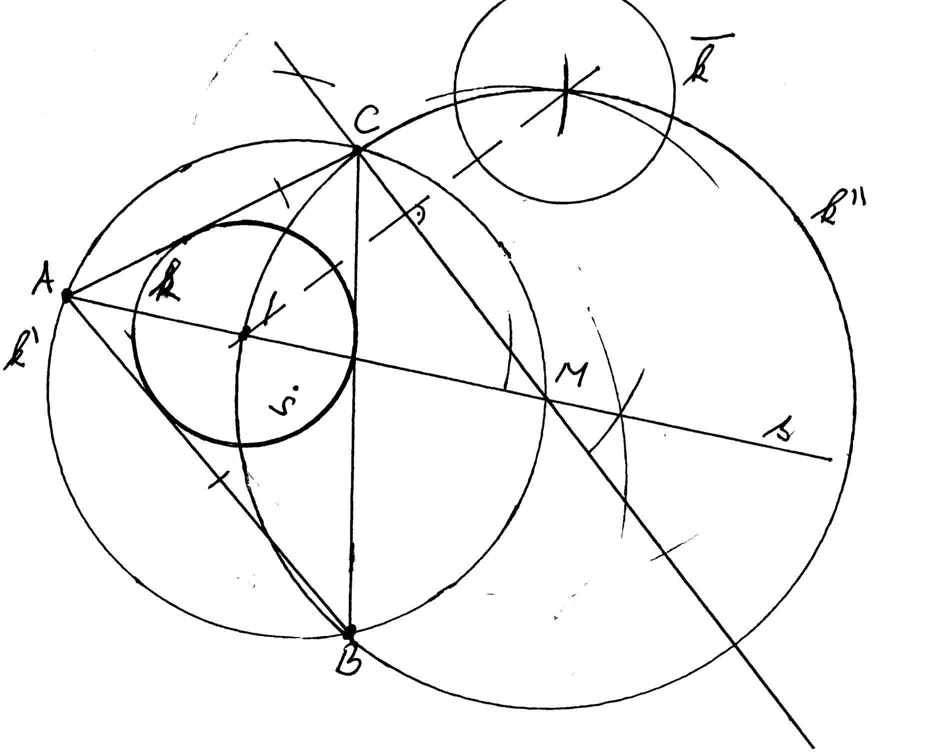
$2\lambda = 58°$

$\lambda = 29°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 70°$, $\beta = 52°$; $\gamma = 58°$

(#) U $\triangle ABC$ je upisan krug k sa centrom u I. Centar opisanog kruga k'' oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $p[A,I)$ i kruga k' koji je opisana oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

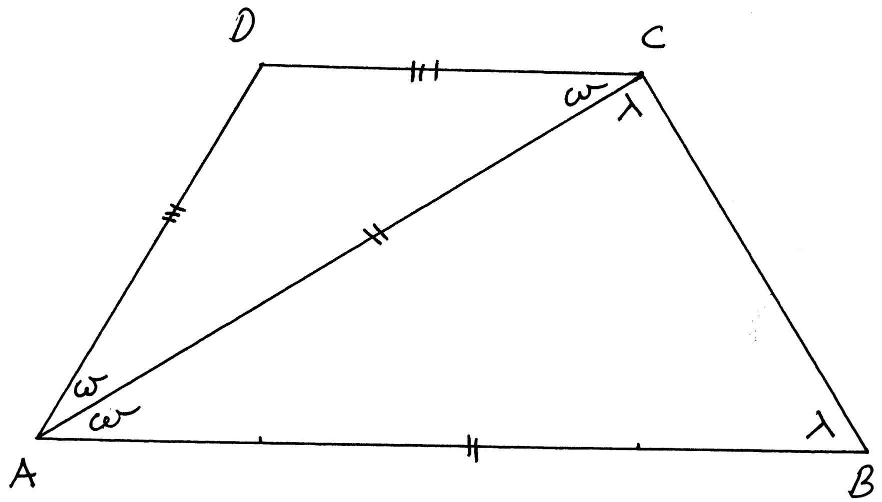
R: Prvo ćemo nacrtati $k'(S,r')$, pa ćemo nacrtati $\triangle ABC$, pa simetralu s ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M,r'')$ i na kraju $k(I,r)$



$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$

(#) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R:



jkk trapez $\square ABCD$ ima podudarne stranice AD i BC, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

AB je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to $\triangle ABC$ jkk sa $AB \cong AC$ i $\triangle ADC$ jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo

$$\begin{aligned} 2\omega &= \lambda \\ 2\lambda + \omega &= 180^\circ \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$4\lambda + 2\omega = 360^\circ$$
$$5\lambda = 360^\circ$$
$$\lambda = 72^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A = 72^\circ$, $\measuredangle B = 72^\circ$, $\measuredangle C = 108^\circ$, $\measuredangle D = 108^\circ$

(#) Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj.: Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ e\cdot b = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ a\cdot\frac{3}{b} = 5 \\ 3a = 5b \\ a = \frac{5}{3}b \end{array} \qquad e\cdot a = e\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}eb = 5\cdot 3 = 15$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ b\cdot e = 9 \\ c\cdot d = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\cdot d = 2 \\ c\cdot\frac{3}{b} = 2 \\ 3c = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{array} \qquad e\cdot c = e\cdot\frac{2}{3}b = \frac{2}{3}eb = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot b = 9 \Rightarrow e = \frac{9}{b} \\ e\cdot c = 6 \\ f\cdot c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e\cdot c = 6 \\ \frac{9}{b}\cdot c = 6 \\ 9c = 6b \quad /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2b = 3c \\ b = \frac{3}{2}c \end{array} \qquad f\cdot b = f\cdot\frac{3}{2}c = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e = 15 \Rightarrow e = \frac{15}{a} \\ e\cdot b = 9 \\ f\cdot b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e\cdot b = 9 \\ \frac{15}{a}\cdot b = 9 \\ 15b = 9a \quad /:3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3a = 5b \\ a = \frac{5}{3}b \end{array} \qquad f\cdot a = f\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$$

$10 + 30 + 10$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

(#) Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Rj.

postavka zadatka

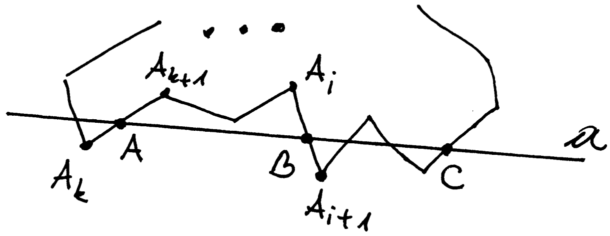
$A_1A_2A_3\ldots A_n$ mnogougao
prava a

$\Rightarrow$ prava a i mnogougao mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ $\forall n\geq 6$ i prava a koja ne sadrži ni jednu njegovu stranicu.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da prava a i mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ imaju najmanje tri zajedničke tačke A, B i C, i pretpostavimo da je poredak na pravoj a $A-B-C$ (druga dva moguća poretka su $A-C-B$ i $B-A-C$).

Pokazaćemo da ako imamo ovaj slučaj mnogougao nije konveksan i doći do željene kontradikcije



Mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ konveksan $\Rightarrow$ $AB, BC, AC \subseteq$ unutar mnogougla

Pretpostavimo da tačka $B \in A_iA_{i+1}$.

Znamo da ako je mnogougao konveksan tada se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

Prema toj tvrdnji svi vrhovi mnogougla se nalaze sa jedne strane prave $p(A_i A_{i+1})$ $\Rightarrow$ ne mogu istovremeno i tačka A i tačka C pripadati mnogouglu $\Rightarrow$

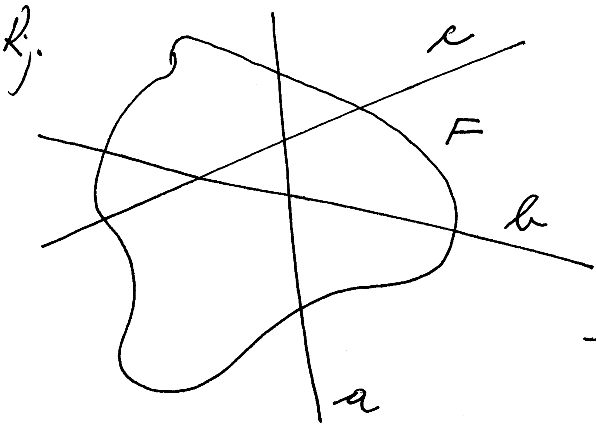
$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ nije konveksan # kontradikcija (prema pretpostavci mnogougao je konveksan)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome konveksan mnogougao i prava koja ne sadrže nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke q.e.d.

(#) Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F)=F$.

Rj.



postavka zadatka:

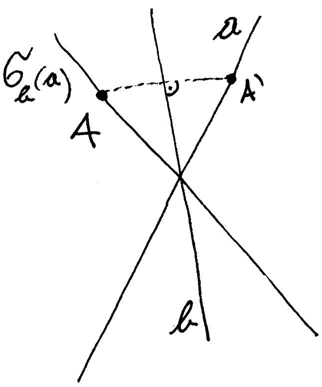
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_a(F)=F\\ \sigma_b(F)=F\\ \sigma_b(a)=c\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_c(F)=F.$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti $\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

(Zašto smo uzeli ovu transformaciju podudarnosti u razmatranje?) (želimo pokazati da je $\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$).

Uzmimo proizvoljnu tačku A prave $\sigma_b(a)$.

$$\gamma(A)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(A)))\overset{b\text{ sim }AA'}{=\!=\!=}\sigma_b(\sigma_a(A'))\overset{A'\in a}{=\!=\!=}\sigma_b(A')\overset{b\text{ sim }AA'}{=\!=\!=}A$$



A je fiksna tačka transformacije γ.

Kako je A proizvoljna tačka to su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke transformacije podud. γ.

Kako je još $\gamma\circ\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b=id$ to je γ involutivna transform. podudarnosti pa γ može biti

- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

γ nije identitet ni centralna simetrija (ZAŠTO?). Prema tome γ je osna simetrija, pa kako su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke $\gamma=\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

Sad imamo

$$\sigma_c(F)=\sigma_{\sigma_b(a)}(F)=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b(F)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(F)))=\sigma_b(\sigma_a(F))=\sigma_b(F)$$
$$=F \text{ q.e.d.}$$

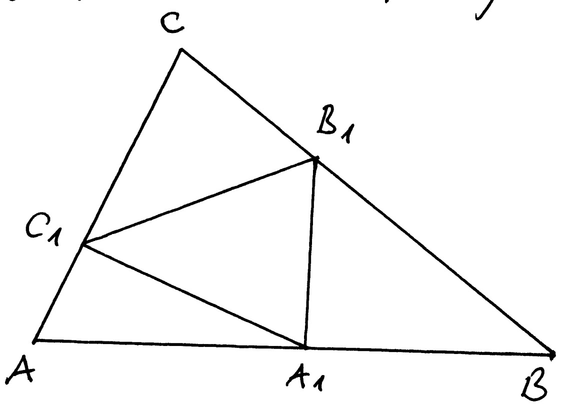
(#) Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ A_1, B_1, C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC\end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

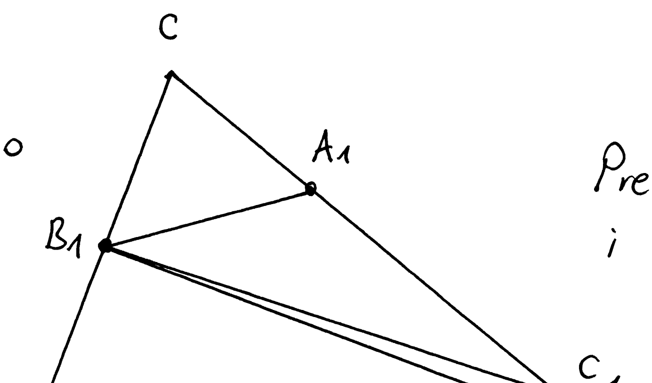
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} & A_1B_1 < A_1B + BB_1\\ & B_1C_1 < CC_1 + CB_1\\ + & A_1C_1 < AA_1 + AC_1\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}\end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

$$\begin{array}{rl} & A_1B = A_1B\\ & A_1B_1 < B_1C + CA_1\\ + & B_1B < AB_1 + AB\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1B} < O_{\Delta ABC}\end{array} \quad \ldots(1)$$

$$\begin{array}{rl} & B_1C_1 < B_1B + BC_1\\ & B_1A_1 = B_1A_1\\ + & A_1C_1 = A_1C_1\\ \hline & O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta B_1BA_1}\end{array} \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

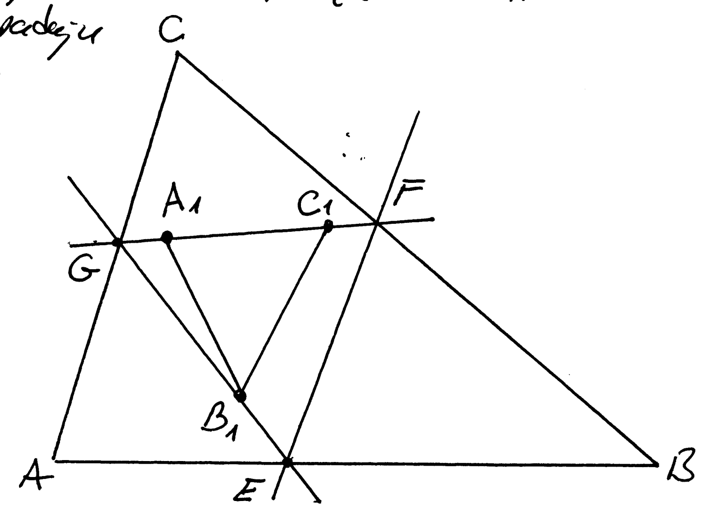
Na osnovu ova dva slučaja rješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1, C_1) \cap BC = \{F\}$

$p(A_1, C_1) \cap AC = \{G\}$

$p(G, B_1) \cap AB = \{E\}$



$$\left.\begin{array}{l}1^\circ \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG}\\ 2^\circ \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG} \text{ q.e.d.}$$