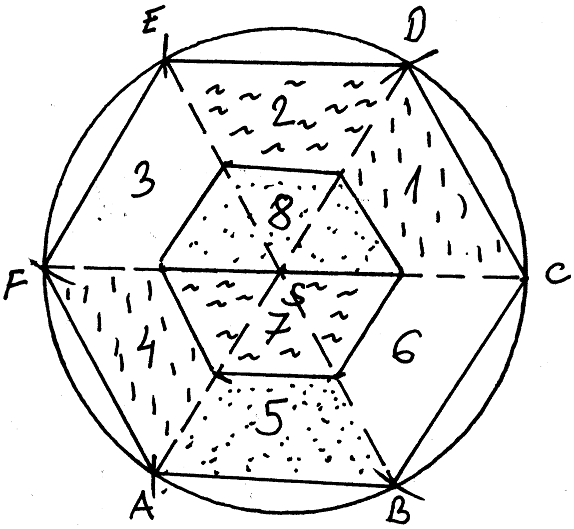
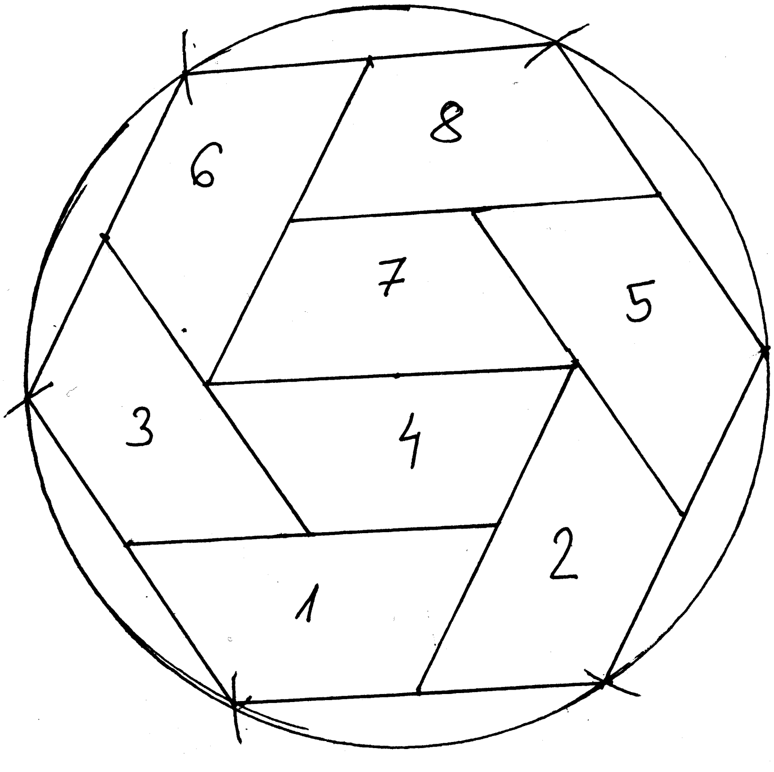
(#) U dati pravilan šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova. (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao $\triangle ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$) i dijagonale AD, BE i CF se polove.) Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

Rj.



Označimo sa S presjek dijagonala. Posmatrajmo srednje linije trouglova $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, $\triangle EDS$, $\triangle EFS$. Srednje linije ovih trouglova su podudarne među sobom. Ovo nas lagano vodi do rješenja zadatka. (vidi sliku lijevo)

Iskoristivši neke druge osobine možemo riješiti zadatak i na drugi način:

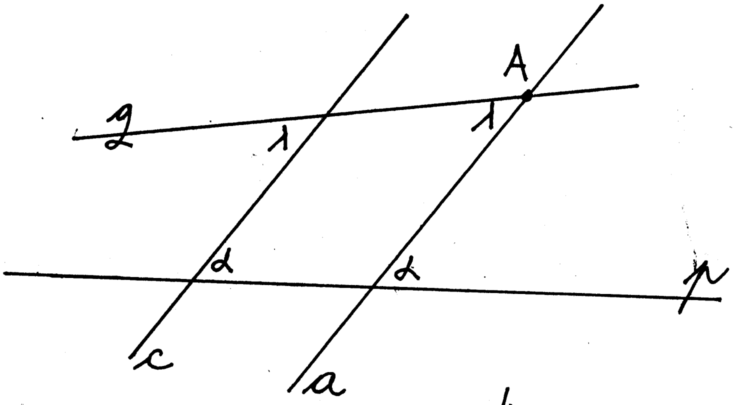


Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu p pod uglom α.

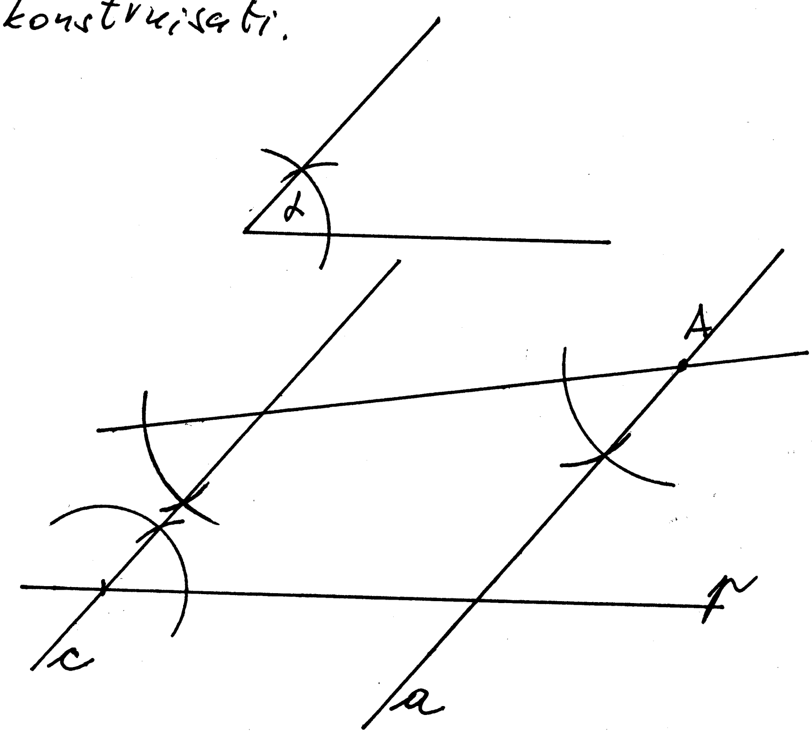


Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primjetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa g označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α
2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α
3. proizvoljnu pravu g takvu da siječe prav da sadrži tačku A.
4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

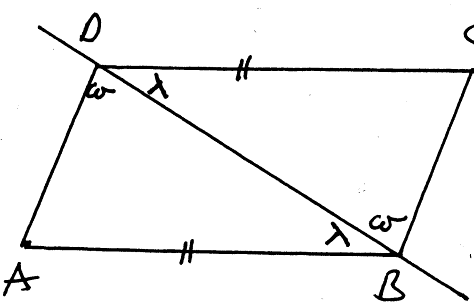
Diskusija

Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

Rj. postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao}\\ AB\parallel CD \wedge AB\cong CD\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram



Prema postavci zadatka $AB\parallel CD$. Da bi dokazali da je $\square ABCD$ paralelogram trebamo još pokazati da je $AD\parallel BC$.

$AB\parallel CD \wedge p(B,D)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle ABD \cong \measuredangle CDB = \lambda$

$\left.\begin{array}{l}AB\cong CD\\ \measuredangle ABD\cong\measuredangle CDB=\lambda\\ DB\cong DB\end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ABD \cong \Delta CDB$

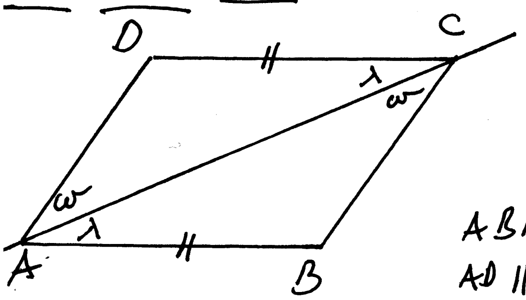
$\Downarrow$

$\measuredangle BDA \cong \measuredangle DBC = \omega$ pa na $p(B,D)$ imamo dva ugla $\omega \Rightarrow AD\parallel BC$

$AD\parallel BC \wedge AB\parallel CD \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram q.e.d.

postavka zadatka

„$\Rightarrow$": $\square ABCD$ je paralelogram $\Rightarrow AB\parallel CD \wedge AB\cong CD$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB\parallel CD$, pa da bi završili zadatak ostaje nam samo još da pokažemo da $AB\cong CD$.

$AB\parallel DC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$AD\parallel BC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle CAB\cong\measuredangle ACD=\lambda\\ AC\cong AC\\ \measuredangle ACB\cong\measuredangle CAD=\omega\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ABC \cong \Delta ADC$

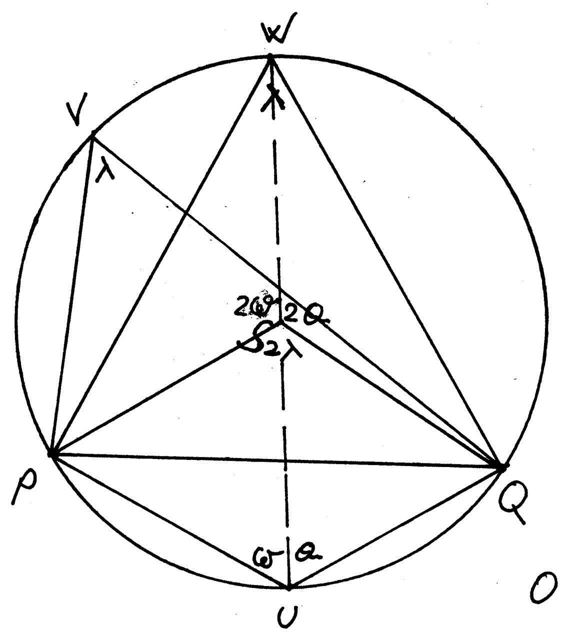
$\Downarrow$

$AB\cong CD$

Prema tome $AB\parallel CD \wedge AB\cong CD$ q.e.d.

(#) Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom $180°$.

Rj.



PQ tetiva

$\measuredangle PUQ$ tupi periferiski ugao nad tetivom PQ

$\measuredangle PVQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$.

Neka je $\measuredangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\measuredangle PVQ = \frac{1}{2} \measuredangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\measuredangle PWQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

pa je $\measuredangle PWQ = \frac{1}{2} \measuredangle PSQ \overset{(*)}{\Longrightarrow} \measuredangle PVQ = \measuredangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\measuredangle PUW = \omega$ i $\measuredangle QUW = \theta$

(ovo su oštri periferiski uglovi nad tetivama PW i QW)

tada na osnovu prvog zadatka imamo

$\measuredangle PSW = 2\omega$ i $\measuredangle QSW = 2\theta$.

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\theta = 360° \quad /:2$

$\lambda + \omega + \theta = 180°$

tj. $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$

q.e.d.

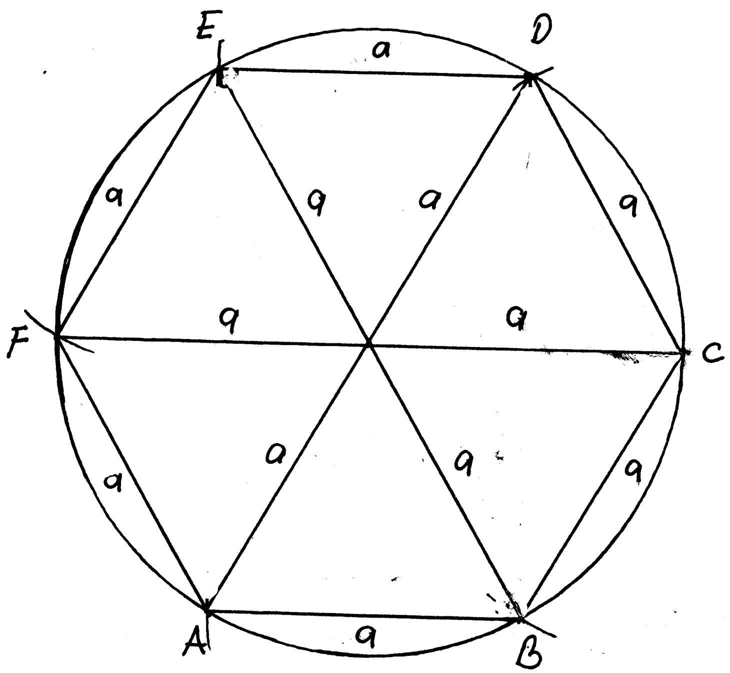
Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla ($P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$).

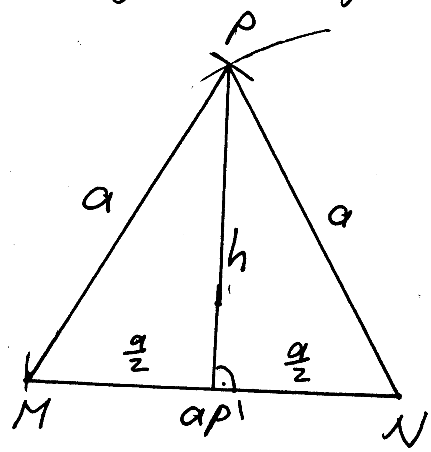
Rj:

Pravilan šestougao se sastoji od 6 jks trouglova! (ovo nije teško dokazati)

Posmatrajmo jks $\triangle MNP$.

$$P_{\triangle MNP} = \underset{\text{pravougli }\triangle}{P_{\triangle PP'M}} + \underset{\text{pravougli }\triangle}{P_{\triangle PP'N}} = \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2} + \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2}$$





$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$P_{\triangle MNP} = \frac{a}{2}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = 6\cdot P_{\triangle MNP} = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

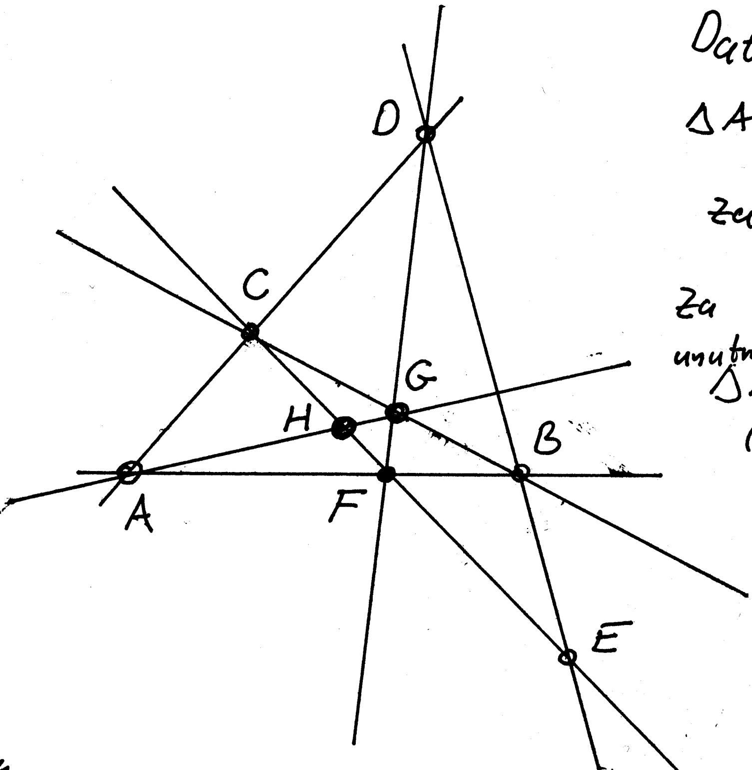
$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj.

postavka zadatka

$\triangle ABC \quad \Longrightarrow \quad \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti $\triangle ABC$



Date su tačke A, B i C tj. $\triangle ABC$.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost $\triangle ABC$ je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

$\left.\begin{array}{l} A, B, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tih tački} \\ \exists C \in p(C,D) \text{ takva da } A-C-D \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists F \in p(C,E): \; A-F-B \;\vee\; B-F-D.$

Prava $p(E,C)$ ne sijeće pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona sijeće u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

$\left.\begin{array}{l} A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, C \\ \exists F \in p(F,D) \text{ taka } A-F-B \end{array}\right\} \xrightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F,D): \; C-G-B$

$\left.\begin{array}{l} C, F, B \text{ nekolinearne tačke} \\ p(A,G) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } C, F \text{ i } B \\ \exists G \in p(A,G) \text{ tako } C-G-B \end{array}\right\} \xrightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A,G): \; A-H-G$

A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G$ $\xrightarrow{\triangle ABC \text{ je konveksan}}$ $H \in$ unutr. $\triangle ABC$

q.e.d.

(#) Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

Rj. a) postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_c=\sigma_d\\ a\cap b=\{S\}\end{array}\right\} \Rightarrow c\cap d=\{S\}$$

$\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_c=\sigma_d \quad /\circ\sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_c\circ\sigma_c=\sigma_d\circ\sigma_c$

$\sigma_a\circ\sigma_b=\sigma_d\circ\sigma_c=\gamma$

$\gamma(S)=(\sigma_a\circ\sigma_b)(S)=$
$=\sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S\in b}{=} \sigma_a(S) \overset{S\in a}{=} S$

Prema tome $\gamma(S)=S$ ...(*)

Neka je $\sigma_c(S)=S'$, $S'\not\equiv S$. Imamo:

$\gamma(S)=(\sigma_d\circ\sigma_c)(S)=\sigma_d(\sigma_c(S))=\sigma_d(S')\overset{(*)}{=}S$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_c(S)=S' \Rightarrow \text{prava } c \text{ simetrala } SS'\\ \sigma_d(S')=S \Rightarrow \text{prava } d \text{ simetrala duži } SS'\end{array}\right\} \Rightarrow c\equiv d$$

$\Downarrow$

$\sigma_d\circ\sigma_c=id \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_a\circ\sigma_b=id \Rightarrow a\equiv b \Rightarrow a\cap b=a\equiv b$

#kontradikcija ($a\cap b=\{S\}$).

Pretpostavka da je $\sigma_c(S)=S'$, $S'\not\equiv S$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\sigma_c(S)=S$. Dalje imamo

$\gamma(S)=(\sigma_d\circ\sigma_c)(S)=\sigma_d(\sigma_c(S))=\sigma_d(S)\overset{(*)}{=}S$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_c(S)=S \Rightarrow S\in c\\ \sigma_d(S)=S \Rightarrow S\in d\end{array}\right\} \Rightarrow S\in c\cap d$$

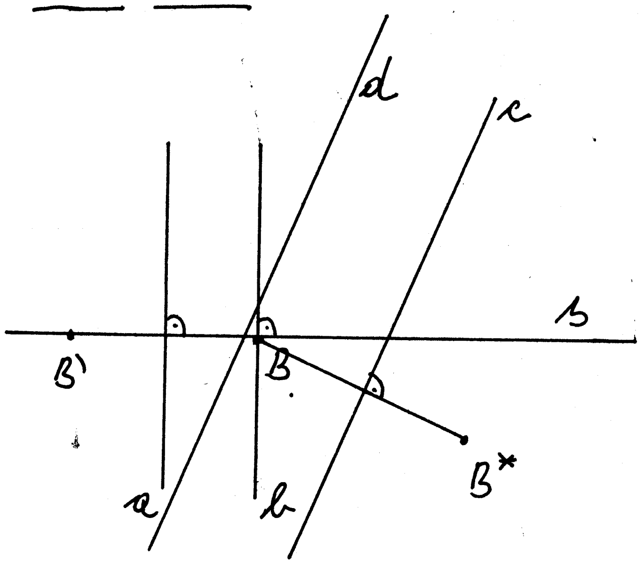
tj $c\cap d=\{S\}$

b) postavka zadatka

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$

$a \perp s,\ b \perp s$ $\quad\Bigg\}\Rightarrow c \perp s$ i $d \perp s$

s data prava



Prvu stvar koju možemo primijetiti je da su prave c i d paralelne. Zašto?

Ako bi se prave c i d sijekle u nekoj tački S tada prema dijelu a) zadatka $a \cap b = \{S\}$

kontradikcija
$(a \perp s,\ b \perp s,\ a \cap b = \phi)$

Prema tome $c \parallel d$.

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$

označimo ovu transformaciju podudarnost sa γ

Neka je $b \cap s = \{B\}$

$\gamma(B) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(B) = \sigma_a(\sigma_b(B)) =$

$\overset{B \in b}{=} \sigma_a(B) = B'$

Prema tome:

$\gamma(B) = B' \quad \ldots (\Delta)$

Neka je $\sigma_c(B) = B^*$

$\gamma(B) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(B) = \sigma_d(\sigma_c(B)) =$

$= \sigma_d(B^*) \overset{(\Delta)}{=} B' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ c simetrala BB^*
d simetrala B^*B'
$c \parallel d$ $\quad\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ tačke B, B^* i B' su kolinearne.

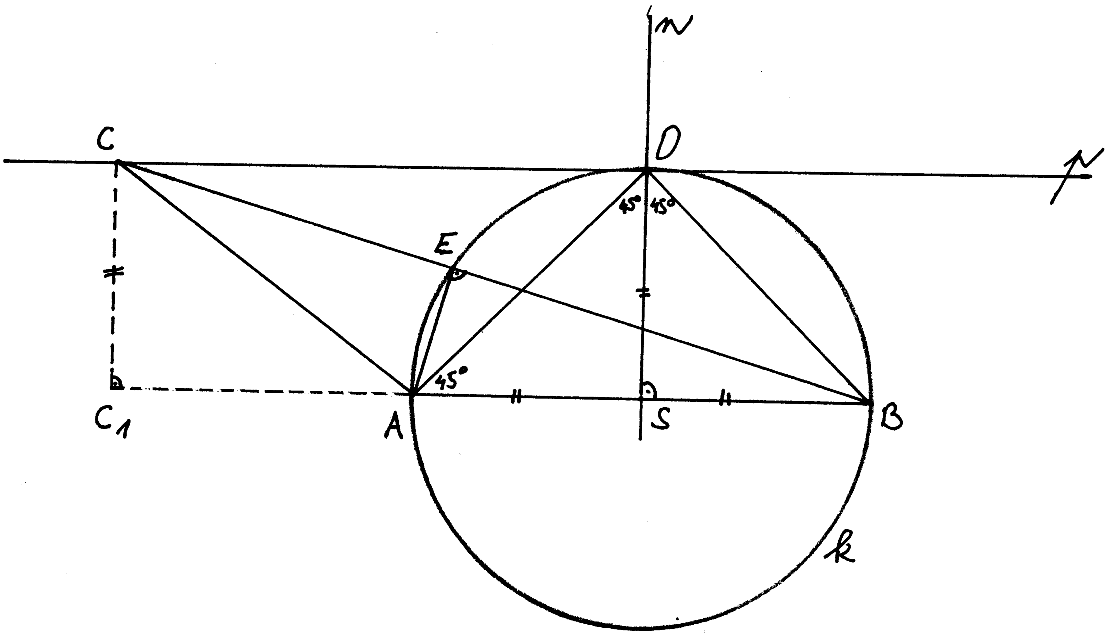
Kako su $B, B' \in s$ to je i $B^* \in s$

c simetrala $BB^* \Rightarrow c \perp p(B, B^*)$
d simetrala $B^*B' \Rightarrow d \perp p(B^*, B')$ $\quad\Big\}\Rightarrow c \perp s$ i $d \perp s$

q.e.d.

(#) U trouglu je jedna stranica podudarna dvostruko odgovarajućoj visini. Dokazati da ugao naspram te stranice ne može da bude tup.

Rj.



Neka je dat ΔABC takav da je $AB = 2CC_1$ gdje je CC_1 visina spuštena iz vrha C. Treba dokazati da $\measuredangle ACB$ nije tup.
Sa S označimo sredinu stranice AB i kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,B)$. Neka je $n \perp p(A,B)$ i $S \in n$.

$\{D\} = p \cap n$

Kako je $p(C_1,S) \parallel p(C,D)$ i $p(C,C_1) \parallel p(D,S)$ $\Rightarrow$ $\square C_1SDC$ paralelogram

$\Rightarrow CC_1 \cong DS$

Primjetimo, kako je S sredina stranice AB, da $AS \cong BS \cong CC_1 \cong DS$.
Neka je k kružnica sa centrom u S poluprečnika AS.
Tad, kružnica k je opisana oko ΔABD, i ima tangentu p u tački D.
Moguća su dva slučaja:

1° $D \equiv C$

Tad $\measuredangle ACB = 90°$ $\Rightarrow$ $\measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.

2° $D \not\equiv C$
Tad, kako je $C \in p$, tačka C pripada vanjskom dijelu kružnice $k(S, AS)$.
Pretpostavimo da je $C \in pr[n, A)$. $\{E\} = BC \cap k$.
Ugao $\measuredangle AEB$ je nad prečnikom $\Rightarrow \measuredangle AEB = 90°$ vanjski ugao ΔACE $\Rightarrow$ $\measuredangle ACB$ nije tup
q.e.d.