Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

b) Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

c) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

d) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

e) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Zadatak br. 2

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Zadatak br. 3

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.
(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

Zadatak br. 4

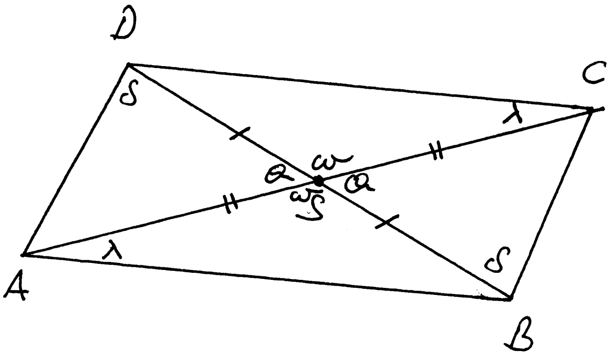
Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\square ABCD$ četverougao u kome se dijagonale polove $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram



$AC \cap BD = \{S\}$

S je sredina AC i BD

Posmatrajmo $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle BSA \cong \measuredangle CSA = \omega \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB \cong \triangle CSD$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$\Longrightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$

Posmatrajmo $\triangle ASD$ i $\triangle BSC$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASD \cong \measuredangle BSC = \alpha \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASD \cong \triangle BSC$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\measuredangle ADS \cong \measuredangle CBS = \delta$

$\Downarrow$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$

Sad imamo

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D) \parallel p(B,C)$ $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram

„$\Longrightarrow$": $\square ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow$ dijagonale se polove

Završiti za vježbu.

Uputa: Prvo pokazati da je $AB \cong CD$. Pa onda da je $\triangle ABS \cong \triangle CDS$

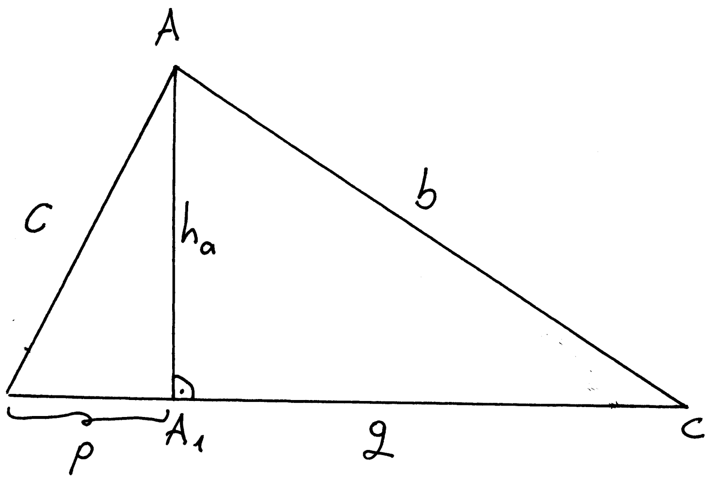
$\Downarrow$

$BS \cong DS$; $AS \cong CS$

q.e.d.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj.: raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BA_1A} + P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A} = \frac{p \cdot h_a}{2}$$

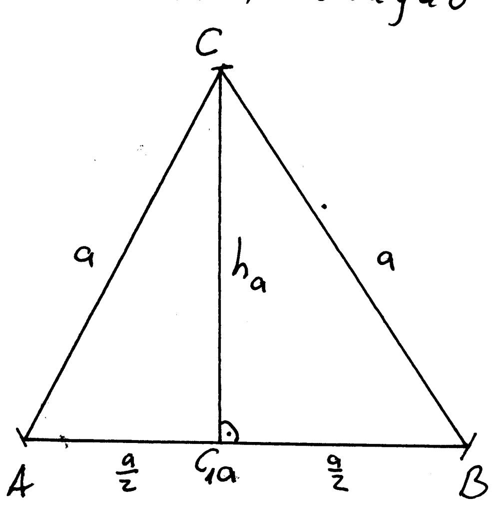
$$P_{\Delta A_1CA} = \frac{q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{p \cdot h_a}{2} + \frac{q \cdot h_a}{2} = \frac{p \cdot h_a + q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{(p+q)\, h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AC_1C} + P_{\Delta BCC_1}$$

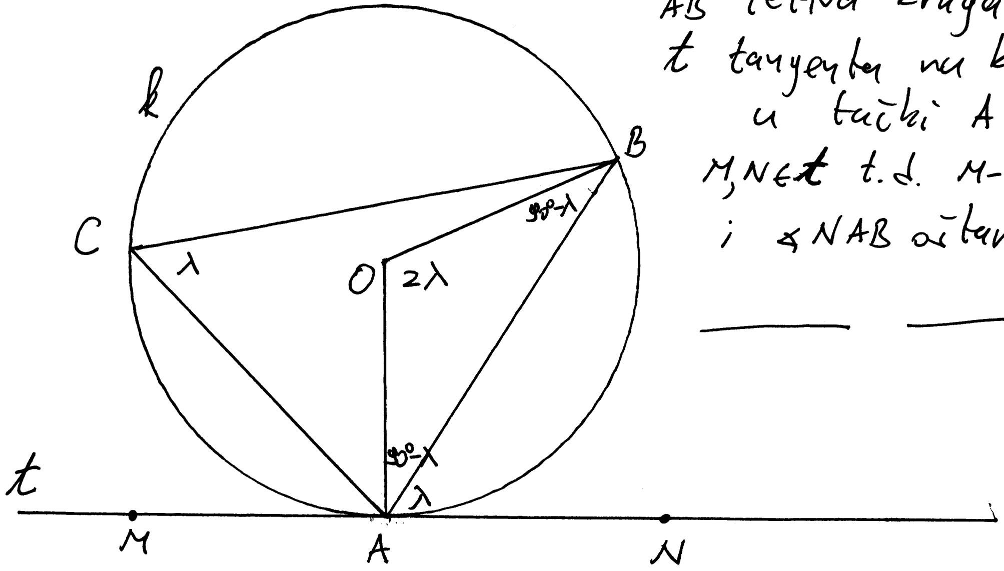
$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta AC_1C} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \\ P_{\Delta BCC_1} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \end{aligned}\right\} P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$k(O,r)$ dati krug
AB tetiva kruga
t tangenta na krug u tački A
$M, N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$

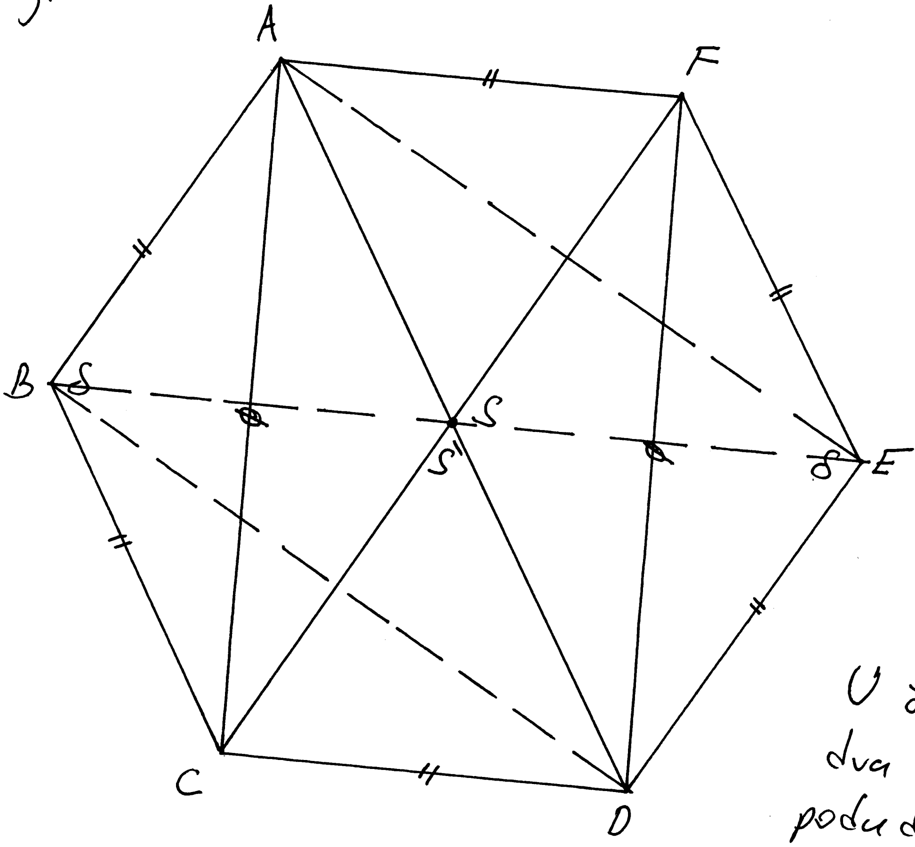
$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90^\circ - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

(#) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.
Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong EF \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspremnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

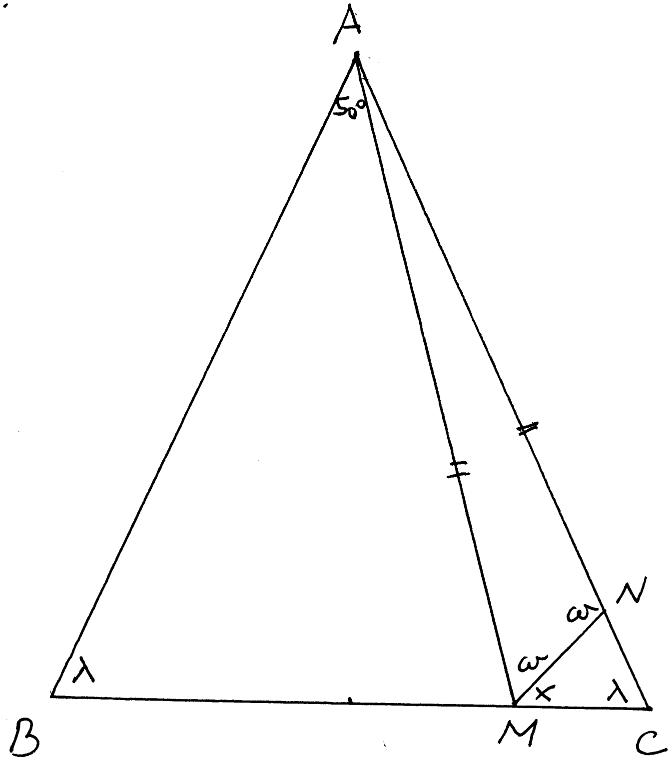
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow$$ dijagonale AD, CF i BE se sijeku u tački S

q.e.d.

Zadan je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao $\triangle MCN$

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots (1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao $\triangle ABM$

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots (2)$$

$(1)+(2)$:

$$\omega + 50° + \lambda = x + \lambda + \omega + x$$

$$2x = 50°$$

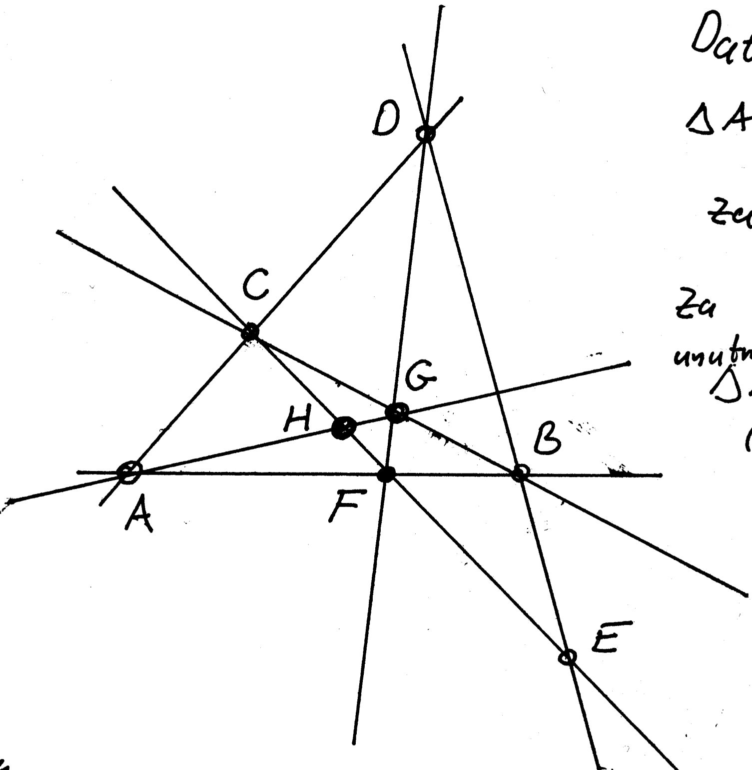
$$x = 25°$$

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj:

postavka zadatka

$\Delta ABC \Rightarrow \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti ΔABC



Date su tačke A, B i C tj. ΔABC.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost ΔABC je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

$$\left.\begin{array}{l}\text{A, B, D nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tih tački} \\ \exists C \in p(A,D) \text{ takva da } A-C-D\end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists F \in p(C,E): A-F-B \vee B-F-D$.

Prava $p(E,C)$ ne siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona siječe u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A, B, C nekolinearne tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački A, B, C} \\ \exists F \in p(F,D) \text{ taka } A-F-B\end{array}\right\} \xrightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F,D): C-G-B$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{C, F, B nekolinearne tačke} \\ p(A,G) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački C, F i B} \\ \exists G \in p(A,G) \text{ tako } C-G-B\end{array}\right\} \xrightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A,G): A-H-G$$

A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G$ $\xrightarrow{\Delta ABC \text{ je konveksan}}$ $H \in$ unutr. ΔABC

q.e.d.

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow$ a, b i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

— — a, b, c, d tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b (S) = \sigma_d \circ \sigma_c (S) \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = \sigma_d (S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$ # kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$ i

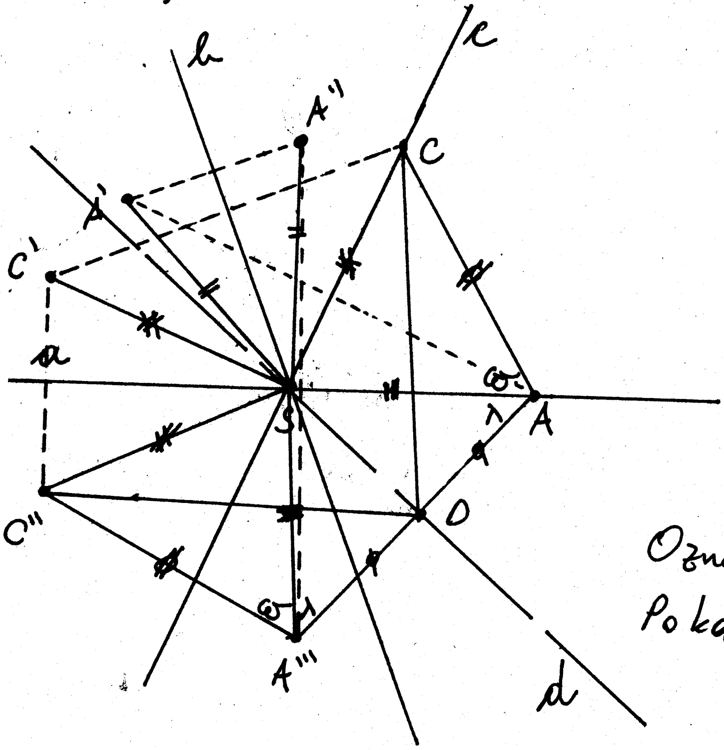
$\sigma_c (S) = S$ to znači (to je moguće samo u slučaju) da se c i d sijeku u tački S.

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow$ a, b i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

— — —

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\mathcal{I} = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\mathcal{I}(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\mathcal{I}(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\mathcal{I}(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(C) = A'''C''$

Dalje imamo $$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow d$ simetrala CC''

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{I}(S) = S \\ \mathcal{I}(A) = A''' \\ \mathcal{I}(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{nekolinearni}]{A,\,S,\,C} \sigma_d = \mathcal{I} \text{ tj } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

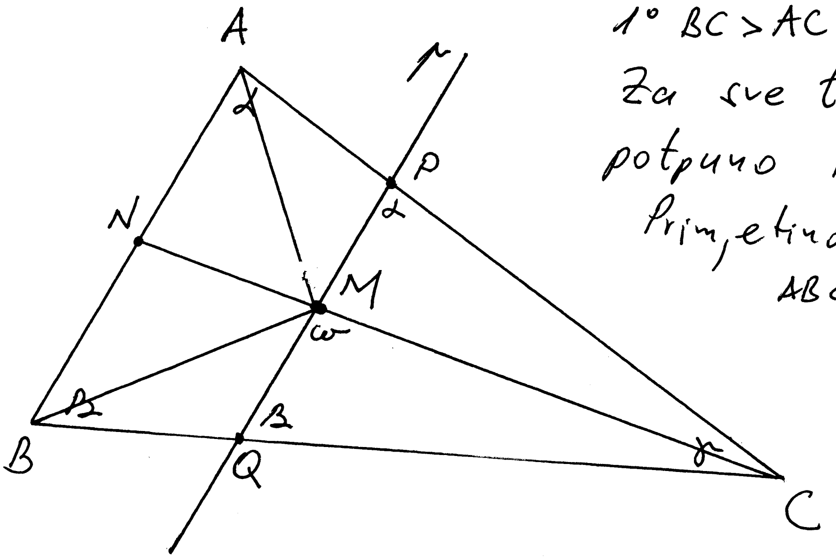
(#) Neka je AB najmanja stranica trougla ΔABC i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

Rj.
postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla}\end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u ΔABC najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja

$1^\circ\ BC > AC \quad 2^\circ\ BC \cong AC \quad$ i $\ 3^\circ\ BC < AC$



Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$. Primjetimo sad da imamo

$AB < AC < BC \implies \gamma < \beta < \alpha$.

Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.

$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\implies \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\implies \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$ je vanjski ugao ΔCPM pa je $\omega > \alpha$.

Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \overset{\Delta QCM}{\implies} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ + MQ \\ AM < AP + MP \end{array}\right\} + \implies MB + MA < BQ + AP + \underbrace{PM + MQ}_{=PQ}$

$MA + MB < BQ + AP + PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ + AP + PC$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA+MB < BQ+AP+PC \end{array}\right\} \overset{+}{\implies} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.