Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Paralelogram $\square HIDR$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(D, R)$ a zatim novodobijeni četverougao $\square H'I'D'R'$ rotirati oko tačke D' za ugao od $60°$ u negativnom smjeru.

b) Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

c) Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuz)i c.

d) Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A, B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B, C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

e) Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Izračunati njegovu površinu ako je $AB + AD = 8\,cm$, $BC = CD$ i $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90°$.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Date su četri kolinearne tačke A, B, C i D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A - B - C$ i $A - C - D$ tada je $B - C - D$.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

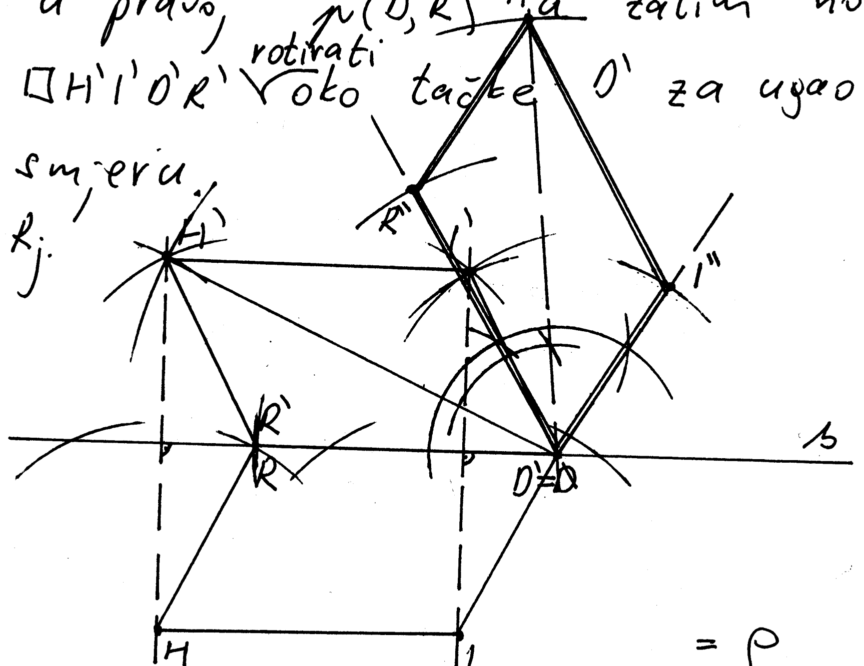
Zadatak br. 4 (20 bodova)

Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

(Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Paralelogram $\square HIDR$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(D,R)$ a zatim novodobijeni četverougao $\square H'I'D'R'$ rotirati oko tačke D' za ugao od $60°$ u negativnom smjeru.

Rj.



Označimo sa $s = p(D,R)$

$$(\rho_{D',60°,-} \circ \sigma_s)(\square HIDR) =$$

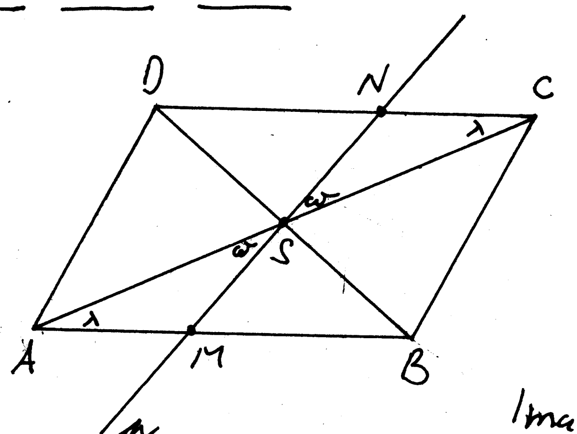
$$= \rho_{D',60°,-}\big(\sigma_s(\square HIDR)\big) =$$

$$= \rho_{D',60°,-}(\square H'I'D'R') = \square H''I''D''R''$$

Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap AB = \{S\},\ \text{prava } p \ni S \\ p \cap AB = \{M\},\ p \cap CD = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda \\ AS \cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ASM \cong \triangle CSN$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong NS$$

$$\Downarrow$$

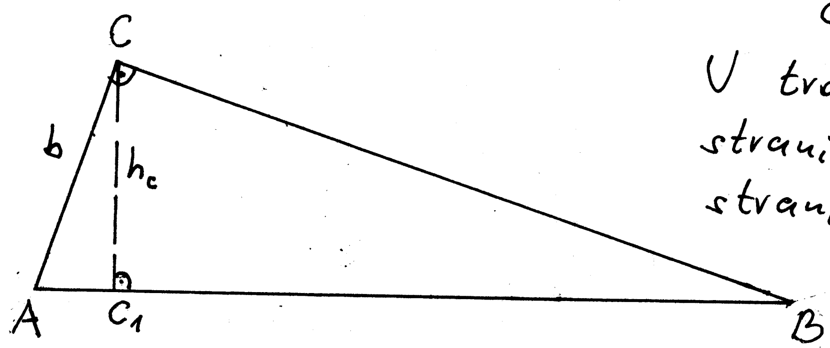
S sredina MN

q.e.d.

(#) Konstruisati pravougli trougao ΔABC ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

Rj: **Analiza**

Pretpostavimo da je zadatak rješen. Neka je data kateta b, visina h_c i neka je ΔABC traženi pravougli trougao.

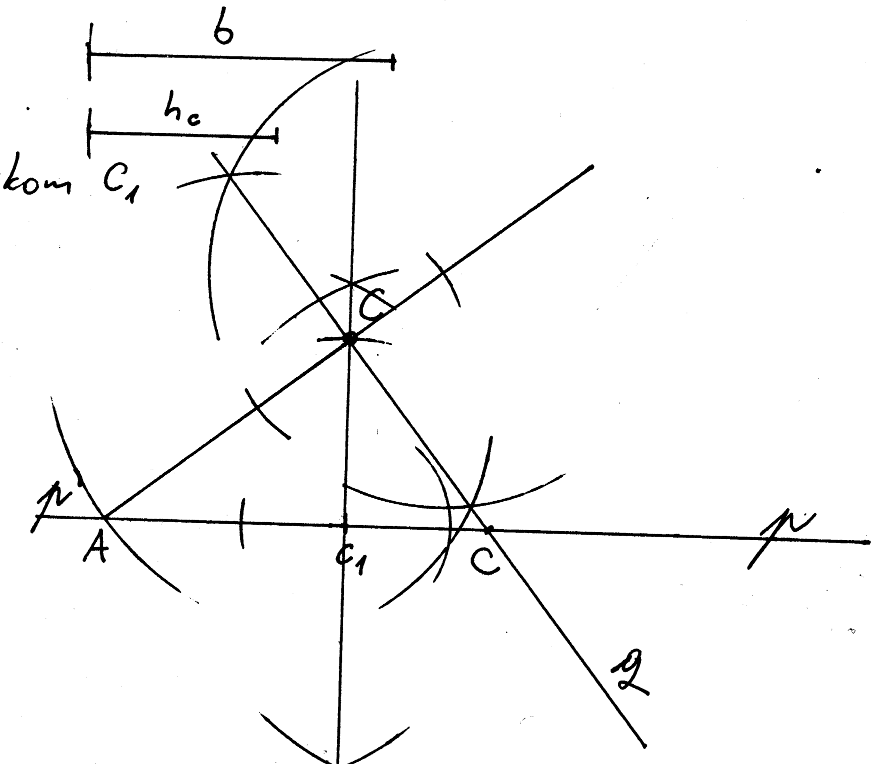


$CC_1 = h_c$

U trouglu ΔAC_1C imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\measuredangle ACB = 90°$ to ćemo tačku B dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži C i okomita je na $p(A, C)$. Pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. b, h_c
2. polupravu p' sa početnom tačkom C_1
3. n, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu p, $p \supseteq p'$
7. pravu q, $q \ni C$ i $q \perp p(A,C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete b i visinu h_c slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

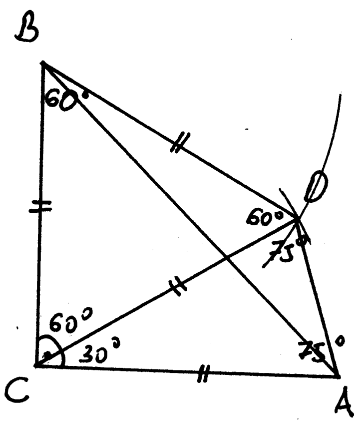
Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja

Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Rj.

a)



$\triangle BCD$ jks $\Rightarrow \measuredangle DBC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 60°$

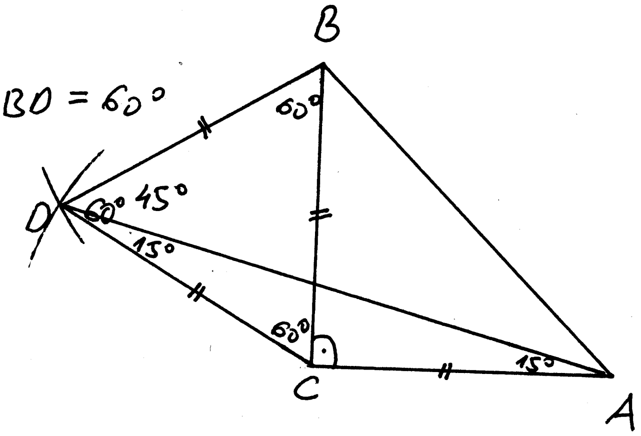
$\triangle ABC$ pravougli $\Rightarrow \measuredangle ACD = 30°$

$\triangle ACD$ jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 75°$

$\measuredangle ADB = 135°$

b)



$\triangle BCD$ jkk $\Rightarrow \measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle CBD = 60°$

$\measuredangle ACD = 150°$

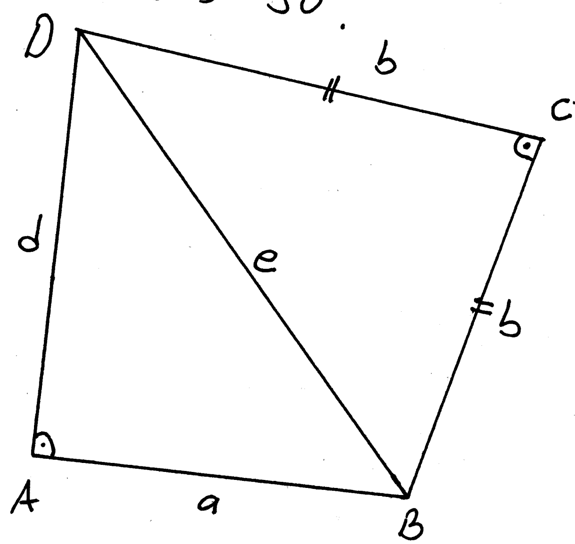
$\triangle ACD$ jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 15°$

$\measuredangle ADB = 45°$

Dat je konveksan četvorougao $\square ABCD$. Izračunati njegovu površinu ako je $AB + AD = 8$ cm, $BC = CD$, $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90°$.

Rj.



Uvedimo oznake

$AB = a, \quad AD = d, \quad BC = CD = b$

Znamo da je $a + d = 8$.

Neka je $BD = e$

$e^2 = a^2 + d^2$ ($\triangle ABD$ je pravougli)

$(a+d)^2 = 8^2$

$a^2 + 2ad + d^2 = 64$

$$a^2+d^2=64-2ad=e^2 \quad \ldots(*)$$

$$e^2=b^2+b^2=2b^2 \quad \ldots(**) \quad (\Delta BCD \text{ pravougli})$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $2b^2=64-2ad \quad |:2$

$$b^2=32-ad$$

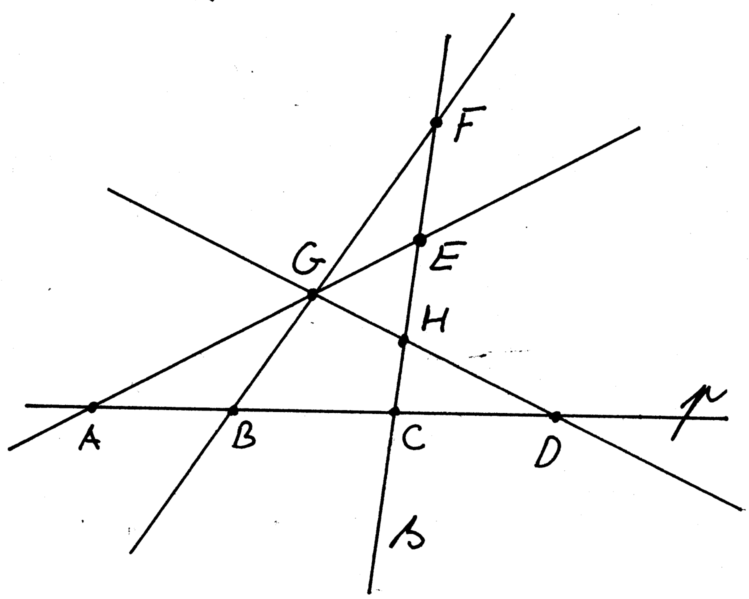
$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta ABD} &= \frac{a \cdot d}{2} \\ P_{\Delta BCD} &= \frac{b \cdot b}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{\square ABCD} = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = \frac{ad}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{ad+32-ad}{2} = \frac{32}{2}$$

$$P_{\square ABCD} = 16 \text{ cm}^2$$

(#) Date su četri kolinearne tačke A, B, C, D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-C-D$ tada je $B-C-D$.

Rj: postavka zadatka

$A-B-C, \ A-C-D \Rightarrow B-C-D$



Označimo sa p pravu koja je incidentna sa tačkama A, B, C i D.

za p prema I_3 $\exists E: E \in p$.

za C i E prema II_2 $\exists F: C-E-F$

$$\left.\begin{aligned} &A, C, E \text{ nekolinearne tačke} \\ &p(B,F) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, E \\ &B \in p(B,F): A-B-C \end{aligned}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists G \in p(B,F): A-G-E \vee C-G-E$

Prava $p(B,F)$ ne siječe $p(C,E)$ između C i E zato što tu pravu siječe u tački F $(C-E-F)$. Prema tome $A-G-E$

$$\left.\begin{aligned} &B, C, F \text{ nekolinearne tačke} \\ &p(A,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } B, C, F \\ &p(A,E) \ni E: C-E-F \end{aligned}\right\} \underset{A-B-C}{\overset{II_4}{\Longrightarrow}} B-G-F$$

$$\left.\begin{array}{l} A, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa} \\ \text{jednom od tački } A, D, G \\ p(C,E) \ni C:\ A-C-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \exists H \in p(C,E): \quad D-H-G \ \veebar\ A-H-G$$

Prava $p(C,E)$ ne siječe pravu $p(A,G)$ između tački A i G zato što tu pravu ona siječe u tački E (kako je $A-G-E$). Prema tome imamo $D-H-G$.

Primjetimo da tačke C, H, E, F leže na istoj pravoj (poredak nam nije bitan), koju ćemo označiti sa s.

$$\left.\begin{array}{l} B, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ \text{prava } s \text{ nije incidentna ni sa} \\ \text{jednom od tački } B, D, G. \\ s \ni H:\ D-H-G \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \begin{array}{l} \text{prava } s \text{ siječe ili} \\ \text{duž } BG \text{ ili duž } BD \end{array}$$

Prava s ne siječe $p(B,G)$ između tački B i G zato što ona tu pravu siječe u F ($B-G-F$). Prema tome siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D a kako je $p(B,D)=p$ to je poredak $B-C-D$ q.e.d.

(#) Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

Rj. a) postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \cap b = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow c \cap d = \{S\}$$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$

$\gamma(S) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(S) =$

$= \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=} S$

Prema tome $\gamma(S) = S$ ...(*)

Neka je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$. Imamo:

$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S') \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S' \Rightarrow \text{prava } c \text{ simetrala } SS' \\ \sigma_d(S') = S \Rightarrow \text{prava } d \text{ simetrala duži } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$$

$\Downarrow$

$\sigma_d \circ \sigma_c = id \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = id \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow a \cap b = a \equiv b$

kontradikcija ($a \cap b = \{S\}$).

Pretpostavka da je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\sigma_c(S) = S$. Dalje imamo

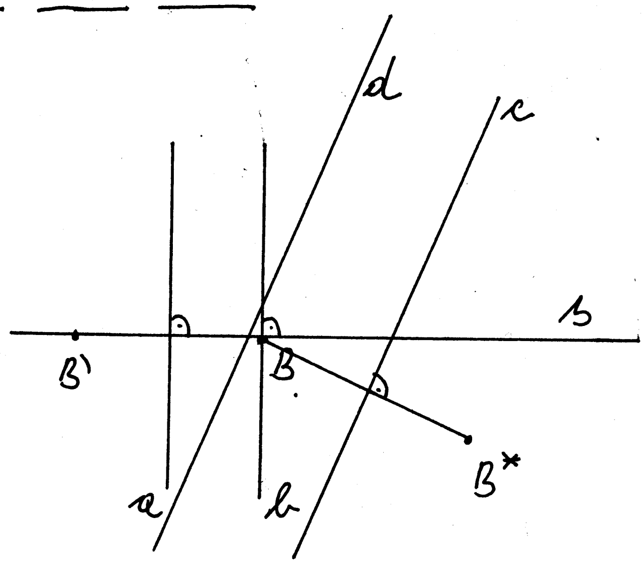
$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S) \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S \Rightarrow S \in c \\ \sigma_d(S) = S \Rightarrow S \in d \end{array}\right\} \Rightarrow S \in c \cap d$$

tj. $c \cap d = \{S\}$

b) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \perp s,\ b \perp s \\ s \text{ data prava} \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$



Prvu stvar koju možemo primjetiti je da su prave c i d paralelne. Zašto?

Ako bi se prave c i d sjekle u nekoj tački S tada prema dijelu a) zadatka $a \cap b = \{S\}$

#kontradikcija

$(a \perp s,\ b \perp s,\ a \cap b = \emptyset)$

Prema tome $c \parallel d$.

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c \text{ sa desne strane}$$

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$$

označimo ovu transformaciju podudarnosti sa γ

Neka je $b \cap s = \{B\}$

$$\gamma(B) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(B) = \sigma_a(\sigma_b(B)) =$$

$$\overset{B \in b}{=} \sigma_a(B) = B'$$

Prema tome:

$$\gamma(B) = B' \quad \ldots (\Delta)$$

Neka je $\sigma_c(B) = B^*$

$$\gamma(B) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(B) = \sigma_d(\sigma_c(B)) =$$

$$= \sigma_d(B^*) \overset{(\Delta)}{=} B' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \\ d \text{ simetrala } B^*B' \\ c \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ tačke B, B^* i B' su kolinearne.

Kako su $B, B' \in s$ to je i $B^* \in s$

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \Rightarrow c \perp p(B, B^*) \\ d \text{ simetrala } B^*B' \Rightarrow d \perp p(B^*, B') \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$

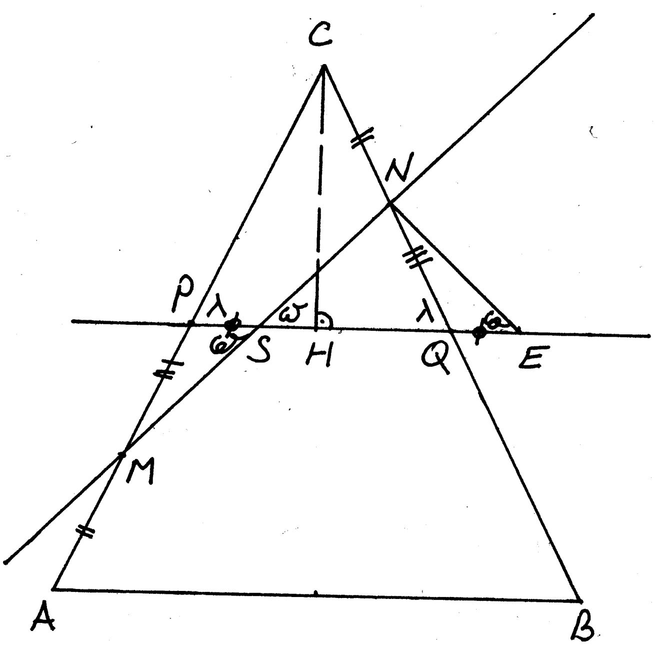
q.e.d.

#) Na bočnim stranicama AC i BC jednakokrakog trougla ΔABC date su tačke M i N redom, tako da je $CM + CN \cong AC$ (M i N nisu sredine stranica). Dokazati da je prava određena sredinama bočnih stranica trougla incidentna sa sredinom duži MN.

Rj. postavka zadatka

ΔABC jkk sa osnovicom u AB
$M \in AC$, $N \in BC$ takve $CM + CN \cong AC$
(M i N nisu sredine stranica)
P sredina AC, Q sredina BC
$MN \cap PQ = \{S\}$

$\Rightarrow$ S sredina duži MN



Ako sa H označim ortogonalnu projekciju iz tačke C na osnovu pravila SSU (ugao od 90°) možemo zaključiti da je $\measuredangle CPH \cong \measuredangle CQH = \lambda$.

Kako je $CM + CN \cong AC \cong BC \Rightarrow$
$\Rightarrow AM \cong CN$

P i Q su sredine bočnih strana
$\Rightarrow AP \cong PC \cong QC \cong BQ$ pa imamo $PM \cong QN$.

Uzmimo tačku $E \in pp[P, Q)$ takvu $P - Q - E$ i $QE \cong PS$.

Sad imamo
$PM \cong QN$
$\measuredangle SPM \cong \measuredangle NQE$ $(= 180^\circ - \lambda)$
$PS \cong QE$

$\xrightarrow{SUS}$ $\Delta PMS \cong \Delta QNE$
$\Downarrow$
$\measuredangle NEQ \cong \measuredangle MSP = \omega$ i $MS \cong NE$

Kako su uglovi $\measuredangle MSP$ i $\measuredangle NSQ$ unakrsni $\Rightarrow \measuredangle PSM \cong \measuredangle NSE = \omega$
$\Rightarrow$ ΔSEN je jkk sa osnovicom u SE tj.
$SN \cong NE \Rightarrow SN \cong SM \Rightarrow$ S sredina duži MN

q.e.d.