Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 12.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

b) Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

c) Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

d) Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

e) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A - B - C$ na pravoj a, i $A - D - E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora siječi sa duži CD u tački M.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Ako je π transformacija podudarnosti za koju važi $\pi(A) = A$, $\pi(B) = B$, $\pi(C) = C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je π identitet. Dokazati.

Zadatak br. 4 (20 bodova)

Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave AC i BC u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

(Web stranica kursa je \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

Rj

$\gamma + \alpha = 180°$, α i γ su suplementni ugao

$\beta + \gamma = 90°$, β i γ su komplementni uglovi

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} = \frac{4\alpha + 2\alpha + \alpha}{8} = \frac{7\alpha}{8}$$

$$\frac{7\alpha}{8} + \frac{8\alpha}{8} = 180° \quad /\cdot 8$$

$15\alpha = 1440°$ $/:3$

$5\alpha = 480°$ $/:5$

$\alpha = 96°$

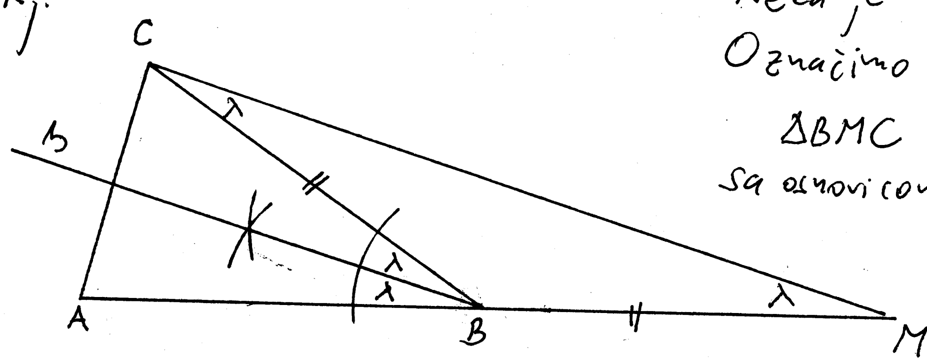
$\Rightarrow \gamma = 84°$

$\Downarrow$

$\beta = 6°$

(#) Na pravoj $p(A,B)$ trougla ΔABC data je tačka M takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj



Neka je s simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABs \cong \measuredangle CBs$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BMC \text{ jkk} \\ \text{sa osnovicom } MC\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BMC = \measuredangle MCB$

Kako je $\measuredangle ABC = 2\lambda$ i

$\measuredangle ABC = \measuredangle BMC + \measuredangle MCB$

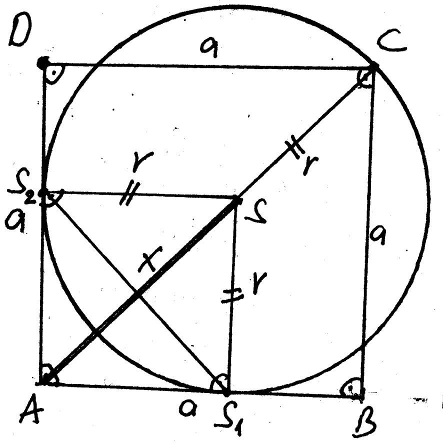
$\Rightarrow \measuredangle BCM \cong \measuredangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\measuredangle ABs = \measuredangle AMC = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

\# Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2.
Primetimo da je četvorougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po 90° i $SS_1 \cong SS_2 = r$).
Označimo sa x stranicu AS.
- U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2 + a^2$ tj.

$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x + r = \sqrt{2}$ ... (1)

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

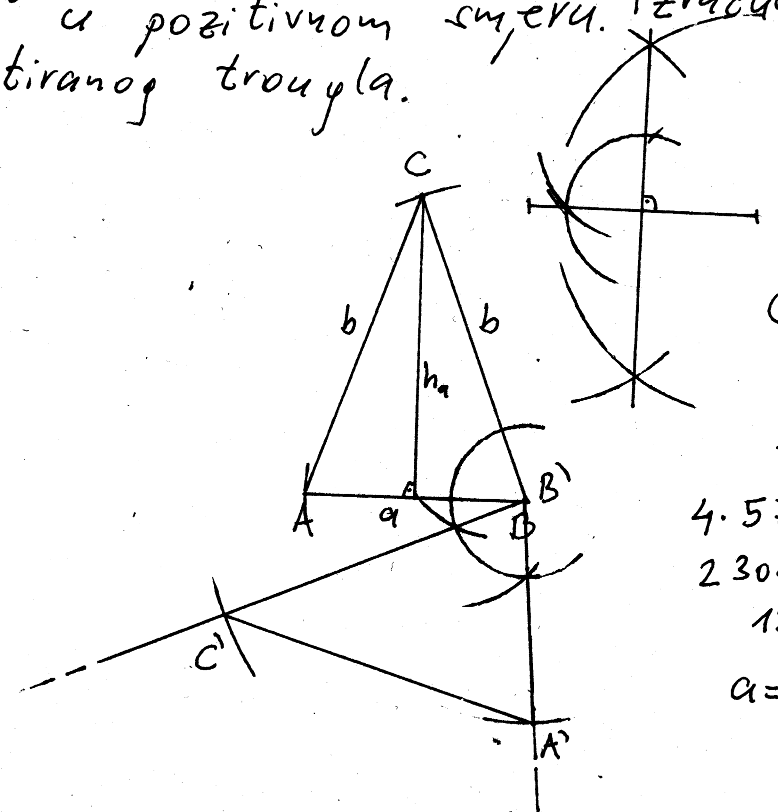
$(1) \Rightarrow r\sqrt{2} + r = \sqrt{2}$

$r(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1}$

tj. $r = 2 - \sqrt{2}$ q.e.d.

\# Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64$ cm, a visina na osnovici $h_a = 24$ cm rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\qquad 4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad /\cdot 4$ $\qquad = 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14$ cm

$P = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$

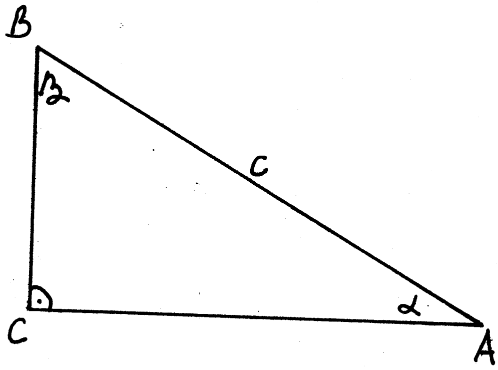
$P = \dfrac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168\ \text{cm}^2$

(#) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

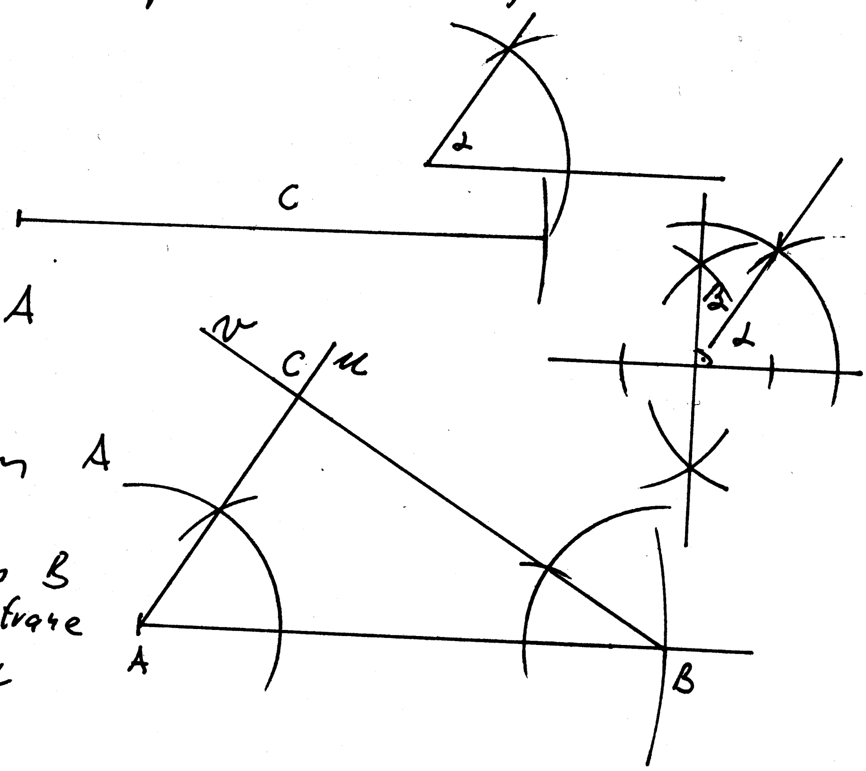
Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC pravougli



trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90° - \alpha$. $(\alpha+\beta+90°=180°)$ Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na njoj, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija



1. α, c $(\alpha < 90°)$
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\measuredangle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\measuredangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. ΔABC

Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

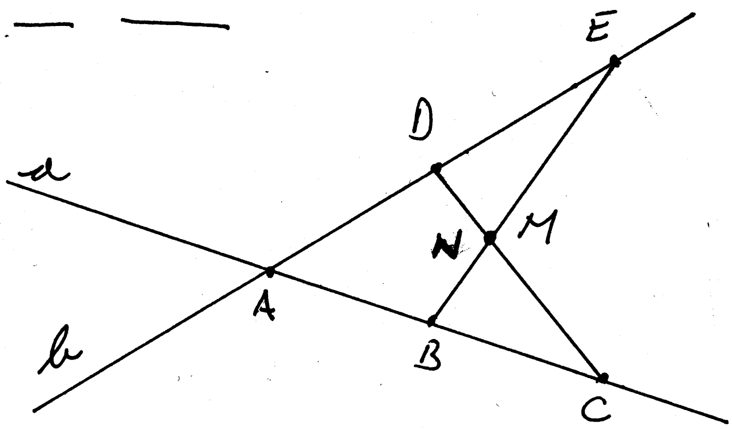
Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

(#) Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A-B-C$ na pravoj a, i $A-D-E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora sijeći sa duži CD u tački M.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} a, b \text{ prave} \\ a \cap b = \{A\} \\ B, C \in a \quad A-B-C \\ D, E \in b \quad A-D-E \end{array}\right\} \Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}.$$



$$\left.\begin{array}{l} A, C, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, D \\ \exists \text{ tačka } B \in p(B,E) \text{ takva da } A-B-C \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists M \in p(B,E)$ taka da ili $A-M-D$ ili $C-M-D$

Prava $p(B,E)$ ne siječe pravu $p(A,D)$ između tački A i D zato što tu pravu ona siječe u tački E ($A-D-E$). Prema tome mora biti $C-M-D$. ($p(B,E) \cap CD = \{M\}$ ...(*))

$$\left.\begin{array}{l} A, B, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, E \\ \exists \text{ tačka } D \in p(C,D) \text{ takva da je } A-D-E \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists N \in p(C,D) \text{ taka da ili } A-N-B \text{ ili } B-N-E$$

Prava $p(C,D)$ ne siječe pravu $p(A,B)$ između tački A i B zato što ona tu pravu siječe u tački C (zato što je $A-B-C$). Prema tome mora biti $B-N-E$. ($p(C,D) \cap BE = \{N\}$ ...(**))

Iz (*) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{M\}$ a iz (**) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{N\} \Longrightarrow M \equiv N$.

Sad iz (*) i (**) $\Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}$

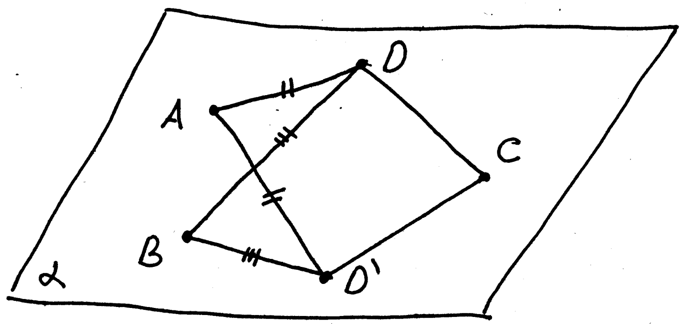
q.e.d.

(#) Ako je π transformacija podudarnosti za koju važi $\pi(A)=A$, $\pi(B)=B$, $\pi(C)=C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je π identitet. Dokazati.

Rj. postavke zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \pi(A)=A,\ \pi(B)=B,\ \pi(C)=C \\ A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ A\not\equiv B,\ A\not\equiv C,\ B\not\equiv C \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \text{ identitet}$$

Neka je α ravan koja sadrži tačke A, B, C. Uzmimo proizvoljnu tačku D koja pripada ravni α. Neka je $\pi(D)=D'$. ($D\not\equiv A$, $D\not\equiv B$ i $D\not\equiv C$)



Ako pokažemo da je $D\equiv D'$, kako je D proizvoljna tačka ravni time ćemo pokazati da je π identitet.

Pretpostavimo da je $D\not\equiv D'$.

Transformacija podudarnosti čuva dužine pa je

$AD \cong \pi(A)\pi(D) \cong AD' \Rightarrow$ A pripada simetrali duži DD' (1)

$BD \cong \pi(B)\pi(D) \cong BD' \Rightarrow$ B pripada simetrali duži DD' (2)

$CD \cong \pi(C)\pi(D) \cong CD' \Rightarrow$ C pripada simetrali duži DD' (3)

Kako su A, B i C nekolinearne tačke to se dvije tačke moraju nalaziti sa iste strane $p(D,D')$ pa neka su to tačke A i B

Iz (1) i (2) $\Rightarrow A\equiv B$
kontradikcija.

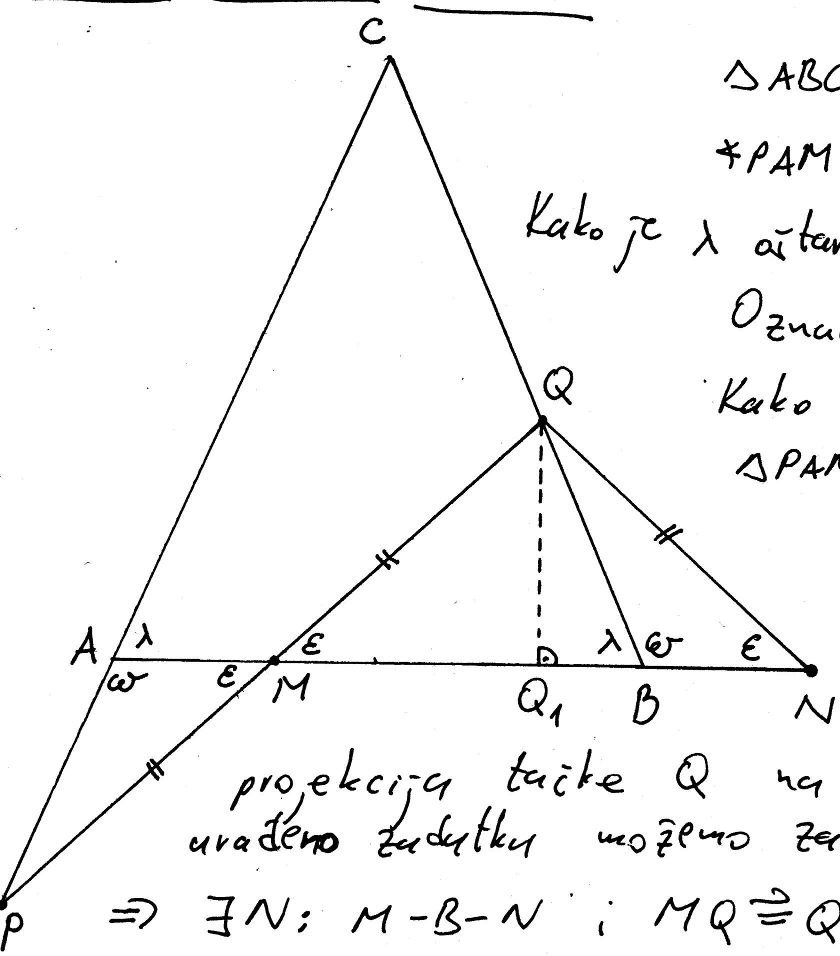
Pretpostavka da je $D\not\equiv D'$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $D\equiv D'$ $\Rightarrow$ π je identitet

q. e. d.

(#) Kroz tačku M koja leži na osnovici AB jednakokrakog $\triangle ABC$ prolazi prava koja siječe prave AC i BC u tačkama P i Q redom, tako da je M sredina duži PQ. Dokazati da je $AP \cong BQ$.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \text{ jkk sa osnovicom } AB \\ M \in AB,\ P \in p(A,C),\ Q \in p(B,C) \\ P-M-Q \text{ i } PM \cong MQ \end{array}\right\} \Rightarrow AP \cong BQ$$



$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle ABC = \lambda$

$\measuredangle PAM + \measuredangle BAC = \omega + \lambda = 180^\circ$

Kako je λ oštar ugao $\Rightarrow$ ω tup

Označimo sa $\varepsilon = \measuredangle PMA$

Kako je $\measuredangle BAC$ vanjski ugao $\triangle PAM$ $\Rightarrow \lambda > \varepsilon$

$\triangle MBQ \Rightarrow \varepsilon < \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow MQ > BQ$.

Neka je Q_1 ortogonalna projekcija tačke Q na stranicu MB. Prema ranije urađenom zadatku možemo zaključiti da je $MQ_1 > Q_1B$

$\Rightarrow \exists N: M-B-N$ i $MQ \cong QN$.

$$\left.\begin{array}{l} MQ_1 \cong NQ_1, \\ \measuredangle MQ_1Q \cong \measuredangle NQ_1Q = 90^\circ \\ QQ_1 \cong QQ_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle MQ_1Q \cong NQ_1Q$$

$$\Downarrow$$

$$MQ \cong NQ \text{ i } \measuredangle Q_1MQ \cong \measuredangle Q_1NQ = \varepsilon$$

Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NBQ \cong \measuredangle MAP = \omega \\ \measuredangle BNQ \cong \measuredangle PMA = \varepsilon \\ PM \cong QN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle BNQ \cong \triangle PAM$$

$$\Downarrow$$

$$PM \cong QN$$

q.e.d.