Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 29.04.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1 (20 boda)

a) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

b) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

c) U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

d) Dijagonale u četverouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40°$ izračunati ostale uglove u četverouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

e) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Zadatak br. 2 (20 bodova)

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Zadatak br. 3 (20 bodova)

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.
(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

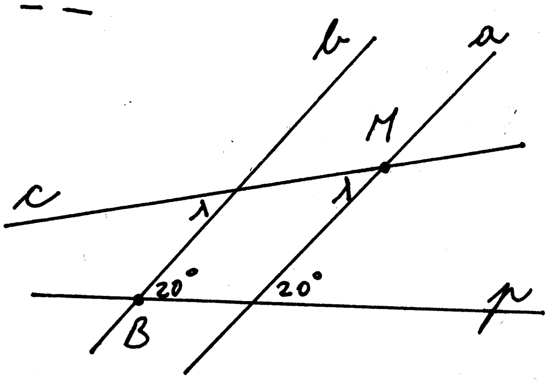
Zadatak br. 4 (20 bodova)

U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

(Web stranica kursa je \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno).

Analiza

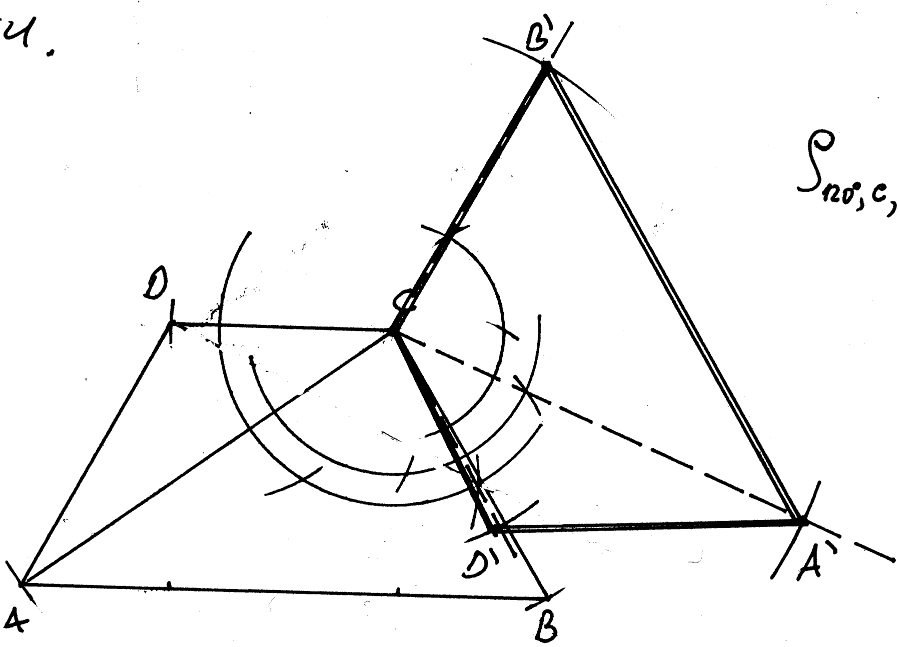


Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c.
Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

Jednakokraki trapez □ABCD sa osnovicom AB = 7 cm rotirati oko tačke C za ugao od 120° u pozitivnom smjeru.

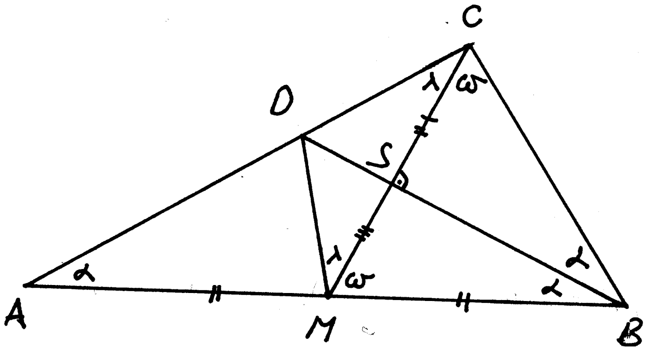
Rj.

$\mathcal{S}_{120°, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$



U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

Rj.



CM težišna duž

BD simetrala $\quad$ BD simetrala i

Kako je $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$

to je $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle ABD$ jkk sa osnovicom AB $\Rightarrow$ DM visina trougla $\triangle ABD$

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSB \cong \measuredangle CSB = 90^\circ \\ BS \cong BS \\ \measuredangle MBS \cong \measuredangle CBS = \alpha \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle MBS \cong \triangle CBS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong CS \quad i \quad \measuredangle BMS \cong \measuredangle BCS = \omega$$

Dalje imamo

$$\left.\begin{array}{l} MS \cong CS \\ \measuredangle MSD \cong \measuredangle CSD = 90^\circ \\ DS \cong DS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MSD \cong \triangle CSD$$

$$\Downarrow$$

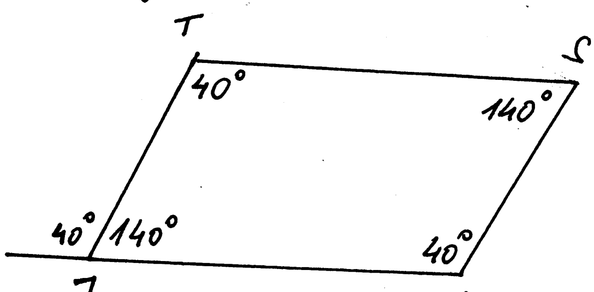
$$\measuredangle DMS \cong \measuredangle DCS = \lambda$$

$\gamma = \lambda + \omega$ i $\quad$ $\lambda + \omega = 90^\circ$ (DM je visina $\triangle ABD$) $\Rightarrow$ $\gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ$ $\Rightarrow$ $3\alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$

Dijagonale u četvorouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40^\circ$ izračunati ostale uglove u četvorouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

Rj. dijagonale se polove $\Rightarrow$ $\square JAST$ je paralelogram



$\measuredangle AJT = 140^\circ$

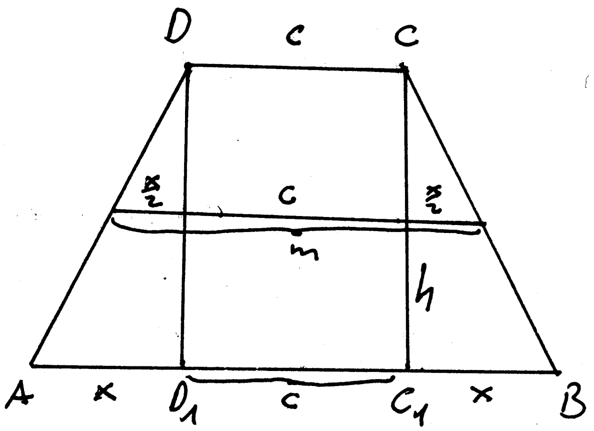
$\measuredangle JTS = 40^\circ$

$\measuredangle TSA = 140^\circ$

$\measuredangle SJA$ se ne može izračunati (u paralelogramu dijagonala nije simetrala ugla).

#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike.



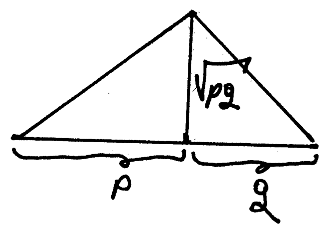
I način:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$$

$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c)\cdot x}$

$m = 5 \Rightarrow x + c = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$\Downarrow$

$5x = 75$

$x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$

$P = 25\sqrt{3}$ cm^2

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a + c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

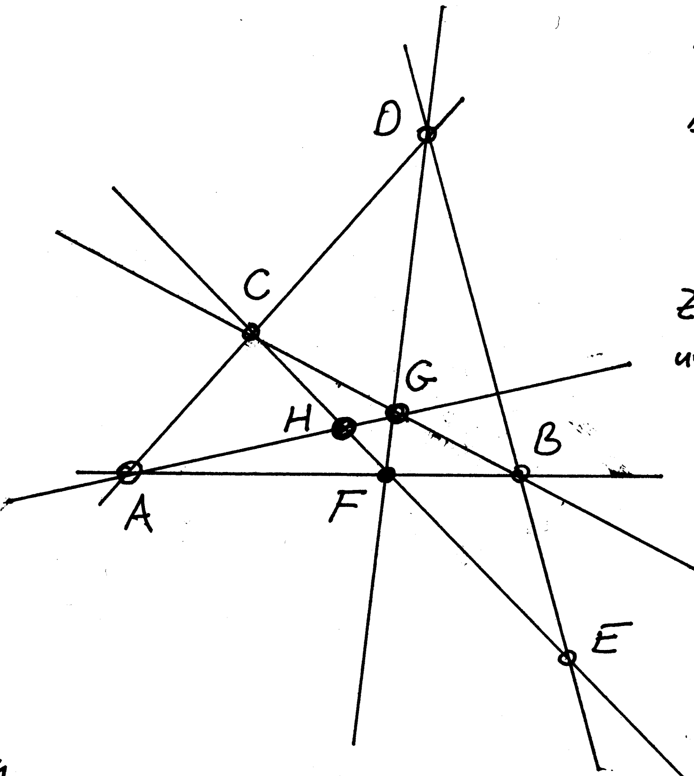
$P = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj:

postavka zadatka

$\Delta ABC \quad \Rightarrow \quad \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti ΔABC



Date su tačke A, B i C tj. ΔABC.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

Za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost ΔABC je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

A, B, D nekolinearne tačke
$p(C,E)$ nije incidentna ni sa jednom od tih tački
$\exists C \in p(C,D)$ takva da $A-C-D$
$\Bigg\} \overset{II_4}{\Rightarrow}$

$\overset{II_4}{\Rightarrow} \exists F \in p(C,E): \; A-F-B \vee B-F-D.$

Prava $p(E,C)$ ne siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona siječe u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

A, B, C nekolinearne tačke
$p(F,D)$ nije incidentna ni sa jednom od tački A, B, C
$\exists F \in p(F,D)$ taka $A-F-B$
$\Bigg\} \xrightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F,D): \; C-G-B$

C, F, B nekolinearne tačke
$p(A,G)$ nije incidentna ni sa jednom od tačhi C, F i B
$\exists G \in p(A,G)$ tako $C-G-B$
$\Bigg\} \xrightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A,G): \; A-H-G$

A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G \xrightarrow{\Delta ABC \text{ je konveksan}} H \in$ unutr. ΔABC

q.e.d.

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„⇐": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow$ a, b i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

a, b, c, d tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_d \circ \sigma_c(S) \Rightarrow \sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = \sigma_d(S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$ i

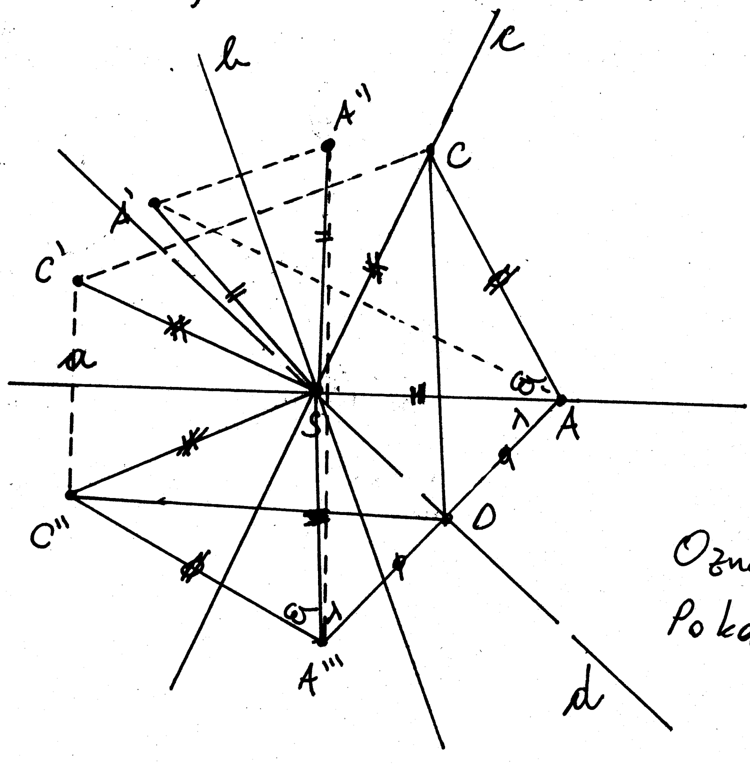
$\sigma_c(S) = S$ to znači (to je moguće samo u slučaju) da se c i d sijeku u tački S.

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow$ a, b i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

---

„⇒": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\varphi = \mathcal{G}_a \circ \mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\varphi(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\mathcal{G}_c(A) = A'$, $\mathcal{G}_b(A') = A''$, $\mathcal{G}_a(A'') = A'''$

tj. $\varphi(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA'''. Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G}_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \mathcal{G}_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \mathcal{G}_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow$ $S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\mathcal{G}_c(C) = C$, $\mathcal{G}_b(C) = C'$, $\mathcal{G}_a(C') = C''$ tj. $\varphi(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \varphi(A)\varphi(C) = A'''C''$

$$\text{Dalje imamo} \quad \left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$

$\Downarrow$

$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow$ $CD \cong C''D$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow$ d simetrala CC''.

Sad imamo

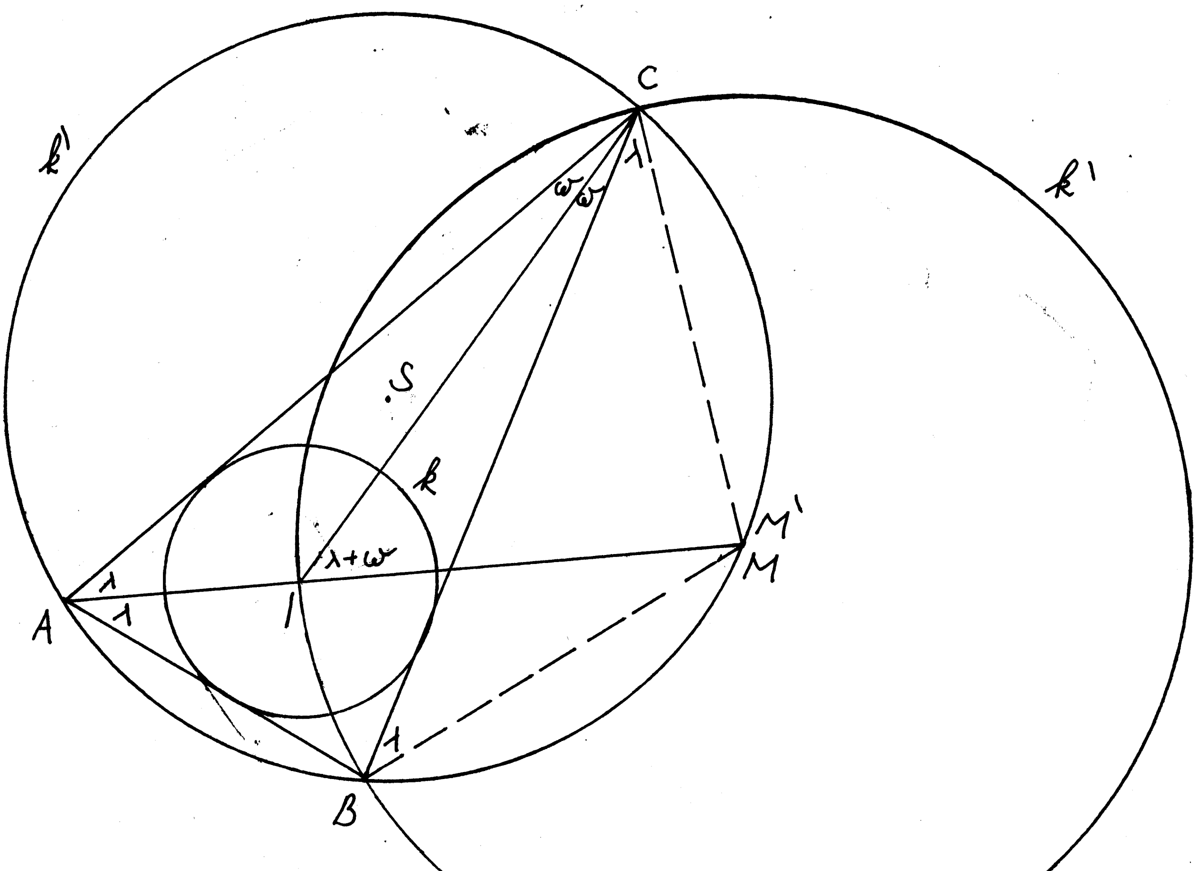
$$\left.\begin{array}{l} \varphi(S) = S \\ \varphi(A) = A''' \\ \varphi(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \mathcal{G}_d(S) = S \\ \mathcal{G}_d(A) = A''' \\ \mathcal{G}_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nekolinearni}]{A,\,S,\,C} \mathcal{G}_d = \varphi \text{ tj. } \mathcal{G}_a \circ \mathcal{G}_b \circ \mathcal{G}_c = \mathcal{G}_d$$

q.e.d.

(#) U $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I.
Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A, I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

Rj. postavka zadatka $\triangle ABC$,

$$\left.\begin{array}{l} k(I,r) \text{ upisana kružnica u } \triangle ABC \\ k'(S,r') \text{ kružnica opisana oko } \triangle ABC \\ k''(M,r'') \text{ kružnica opisana oko } \triangle BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.
Uvedimo oznake $\measuredangle CAI \cong \measuredangle BAI = \lambda$ i $\measuredangle ACI \cong \measuredangle BCI = \omega$.
$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow \measuredangle M'BC \cong \measuredangle CAM' = \lambda$ i $\measuredangle BCM' \cong \measuredangle BAM' = \lambda$
$\triangle CBM'$ je jkk sa osnovicom u $BC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice BC ...(*)
$\measuredangle M'IC$ je vanjski ugao $\triangle AIC \Rightarrow \measuredangle M'IC = \lambda + \omega$.
$\triangle M'CI$ je jkk sa osnovicom u $IC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice IC ...(**)
Iz (*) i (**) $\Rightarrow M'$ je centar opisane kružnice $\triangle CIB \Rightarrow M \equiv M'$
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.