Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

(20%) a) Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu i tačku van nje.

(20%) b) Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

(60%) c) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Zadatak br. 2

(30%) a) Ako je π transformacija podudarnosi za koju važi $\pi(A) = A$, $\pi(B) = B$, $\pi(C) = C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je π identitet. Dokazati.

(70%) b) Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.
Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

Zadatak br. 3

(20%) a) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

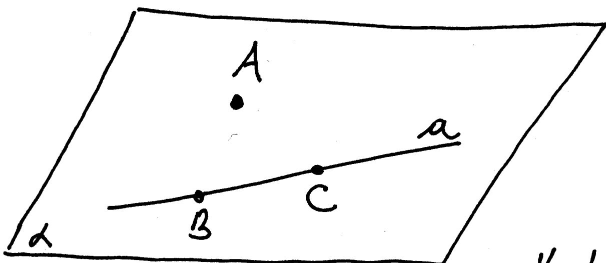
(20%) b) Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

(60%) c) Krug k upisan u tupougli trougao $\triangle ABC$ (ugao kod vrha $\measuredangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougla $\square BINQ$ može opisati krug.

1. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu i tačku van nje.

Rj. postavka zadatka:

$$a,\ A \notin a \Rightarrow \exists!\ \text{ravan}\ \alpha:\ a \subseteq \alpha \text{ i } A \in \alpha$$



Za pravu a prema aksiomi I_3 $\exists B, C: B \in a$ i $C \in a$.

Tačke A, B i C su nekolinearne pa prema I_4, I_5 $\exists! \alpha: A \in \alpha, B \in \alpha$ i $C \in \alpha$

Kako je $B \in a, B \in \alpha$ i $C \in a, C \in \alpha$ prema aksiomu I_6 $a \subseteq \alpha$.

Prema tome $\exists!$ ravan $\alpha: a \subseteq \alpha \wedge A \in \alpha$

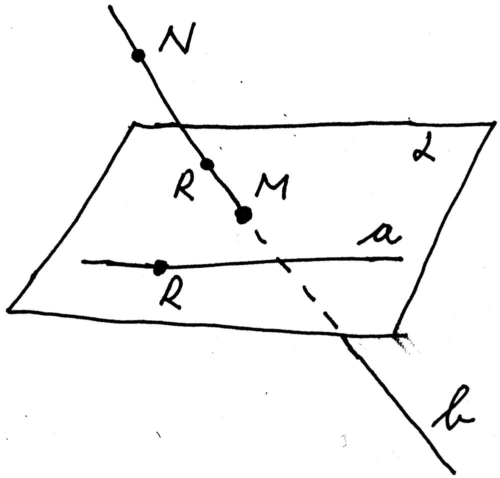
q.e.d.

5. Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.

Rj: postavka zadatka:

$$a \Rightarrow \exists b : a \cap b = \emptyset$$



Neka je data prava a.

Prema aksiomi I_3 $\exists M : M \notin a$.

Za M i a prema 1. zadatku

$\exists ! \alpha : M \in \alpha$ i $a \subseteq \alpha$.

Za ravan α prema I_8 $\exists N : N \notin \alpha$

Za M i N prema I_1, I_2 $\exists ! b : M \in b$ i $N \in b$.

Za prave a i b prema 3. zadatku ili $a \cap b = \emptyset$ ili $a \cap b = \{R\}$

Pretpostavimo da je $a \cap b \neq \emptyset$. To znači $a \cap b = \{R\} \Rightarrow$

$\Rightarrow R \in a$ i $R \in b$. Kako je $a \subseteq \alpha$ i $R \in a$ to je $R \in \alpha$.

$R \in \alpha$, $M \in \alpha$ i $R \in b$, $M \in b$ prema I_6 $b \subseteq \alpha \Rightarrow N \in \alpha$ #kontradikcija ($N \notin \alpha$)

Pretpostavka da je $a \cap b \neq \emptyset$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $a \cap b = \emptyset$.

Dokazali smo da za pravu a postoji prava b taka da je $a \cap b = \emptyset$

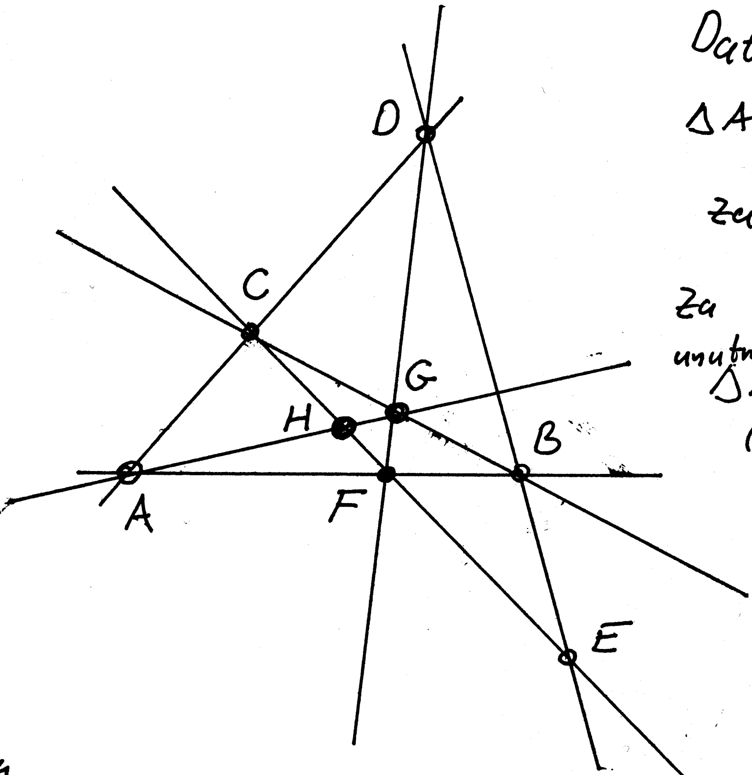
q.e.d.

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj.

postavka zadatka

$\Delta ABC \Rightarrow \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti ΔABC



Date su tačke A, B i C t.j. ΔABC.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost ΔABC je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

$\left.\begin{array}{l} A, B, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tih tački} \\ \exists C \in p(C,D) \text{ takva da } A-C-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4}$

$\xRightarrow{II_4} \exists F \in p(C,E): A-F-B \vee B-F-D.$

Prava $p(E,C)$ ne sijeće pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona sijeće u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

$\left.\begin{array}{l} A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, C \\ \exists F \in p(F,D) \text{ taka } A-F-B \end{array}\right\} \xRightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F,D): C-G-B$

$\left.\begin{array}{l} C, F, B \text{ nekolinearne tačke} \\ p(A,G) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } C, F \text{ i } B \\ \exists G \in p(A,G) \text{ tako } C-G-B \end{array}\right\} \xRightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A,G): A-H-G$

A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G \xRightarrow{\Delta ABC \text{ je konveksan}} H \in$ unutr. ΔABC

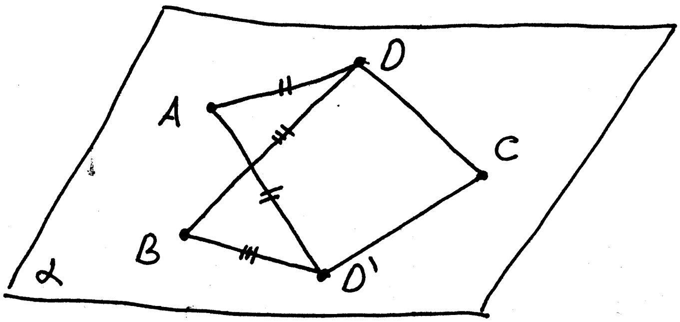
q.e.d.

(#) Ako je π transformacija podudarnosti za koju važi $\pi(A)=A$, $\pi(B)=B$, $\pi(C)=C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je π identitet. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \pi(A)=A,\ \pi(B)=B,\ \pi(C)=C \\ A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ A\not\equiv B,\ A\not\equiv C,\ B\not\equiv C \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \text{ identitet}$$

Neka je α ravan koja sadrži tačke A, B, C. Uzmimo proizvoljnu tačku D koja pripada ravni α. Neka je $\pi(D)=D'$. ($D\not\equiv A$, $D\not\equiv B$ i $D\not\equiv C$)



Ako pokažemo da je $D\equiv D'$, kako je D proizvoljna tačka ravni time ćemo pokazati da je π identitet.

Pretpostavimo da je $D\not\equiv D'$.

Transformacija podudarnosti čuva dužine pa je

$AD \cong \pi(A)\pi(D) \cong AD' \Rightarrow$ A pripada simetrali duži DD' (1)

$BD \cong \pi(B)\pi(D) \cong BD' \Rightarrow$ B pripada simetrali duži DD' (2)

$CD \cong \pi(C)\pi(D) \cong CD' \Rightarrow$ C pripada simetrali duži DD' (3)

Kako su A, B i C nekolinearne tačke to se dvije tačke moraju nalaziti sa iste strane $p(D, D')$ pa neka su to tačke A i B

Iz (1) i (2) $\Rightarrow A\equiv B$
\# kontradikcija.

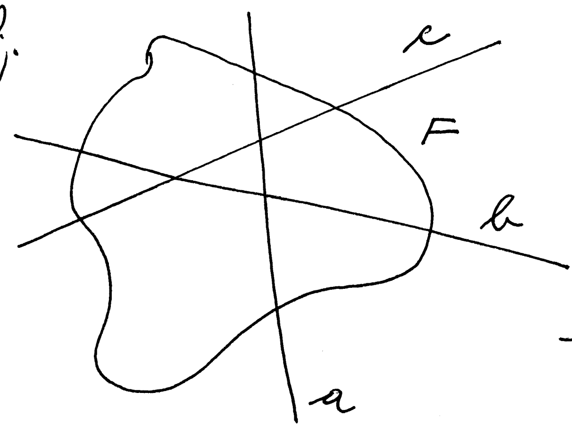
Pretpostavka da je $D\not\equiv D'$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $D\equiv D' \Rightarrow \pi$ je identitet

q. e. d.

(#) Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F)=F$.

Rj.

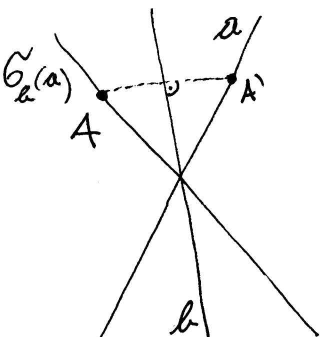


postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_a(F)=F\\ \sigma_b(F)=F\\ \sigma_b(a)=c\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_c(F)=F.$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti $\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.
(Zašto smo uzeli ovu transformaciju podudarnosti u razmatranje?) (želimo pokazati da je $\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$).
Uzmimo proizvoljnu tačku A prave $\sigma_b(a)$.

$$\gamma(A)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(A)))\overset{b\text{ sim }AA'}{=\!=\!=}\sigma_b(\sigma_a(A'))\overset{A'\in a}{=\!=}\sigma_b(A')\overset{b\text{ sim }AA'}{=\!=\!=}A$$



A je fiksna tačka transformacije γ.
Kako je A proizvoljna tačka to su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke transformacije podud. γ.
Kako je još $\gamma\circ\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b=id$ to je γ involutivna transform. podudarnosti pa γ može biti
- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

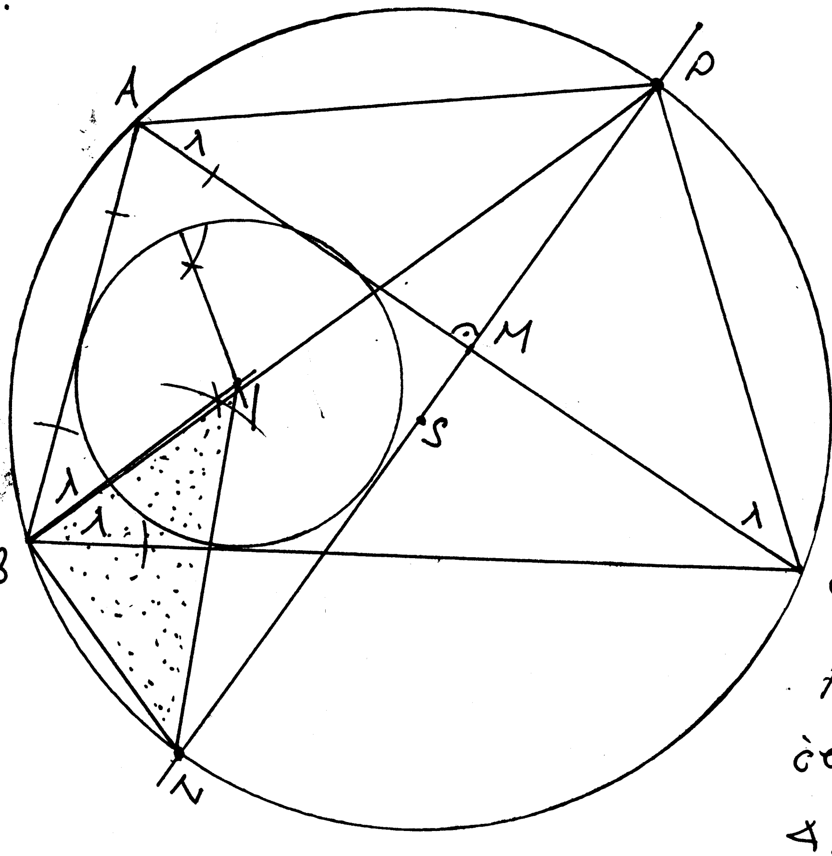
γ nije identitet ni centralna simetrija (ZAŠTO?). Prema tome γ je osna simetrija, pa kako su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke $\gamma=\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

Sad imamo

$$\sigma_c(F)=\sigma_{\sigma_b(a)}(F)=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b(F)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(F)))=\sigma_b(\sigma_a(F))=\sigma_b(F)$$
$$=F \quad \text{q.e.d.}$$

(#) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle PMC$. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\measuredangle AMP \cong \measuredangle CMP = 90^\circ$
($S-M-P$ i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow}$ $\triangle AMP \cong \triangle CMP$

$\Downarrow$

$\measuredangle PAM \cong \measuredangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo
$\measuredangle ABP \cong \measuredangle PCA = \lambda$ i
$\measuredangle PBC \cong \measuredangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $pp[B,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

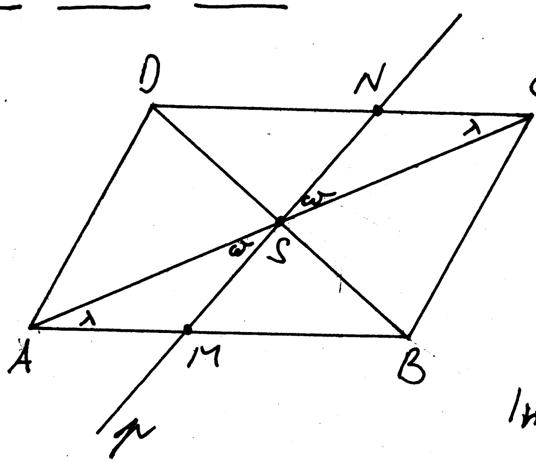
Ugao nad prečnikom je prav pa $\measuredangle NBP = 90^\circ$ tj.
$\measuredangle NBI = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\triangle NBI$ je pravougli

q.e.d.

(#) Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap AB = \{S\},\ \text{prava } p \ni S \\ p \cap AB = \{M\},\ p \cap CD = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda \\ AS \cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \Delta ASM \cong \Delta CSN$$

$\Downarrow$

$MS \cong NS$

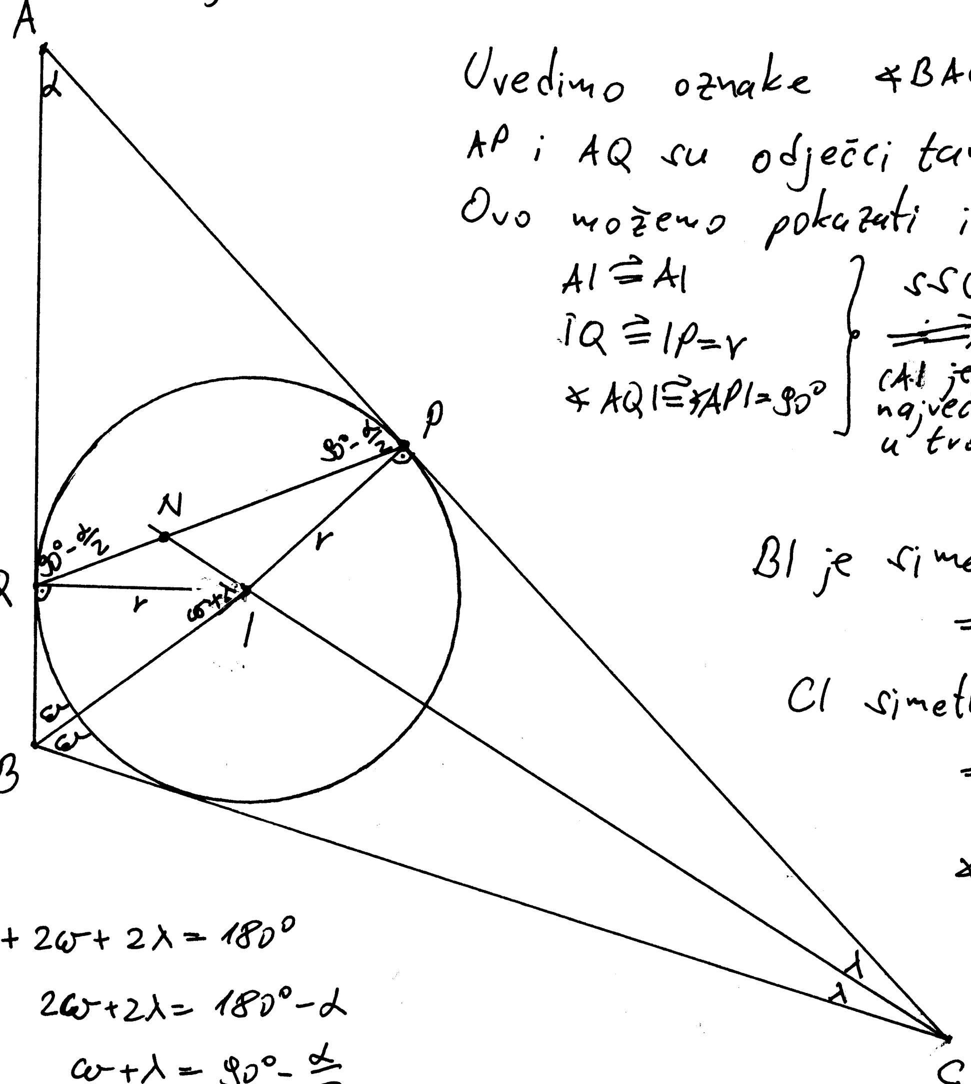
$\Downarrow$

S sredina MN

q.e.d.

(#) Krug k upisan u tupougli trougao ΔABC (ugao kod vrha $\sphericalangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougao $\square BINQ$ može opisati krug.

Rj.



Uvedimo oznake $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = 2\omega$, $\sphericalangle ACB = 2\lambda$.

AP i AQ su odječci tangenti pa je $AQ \cong AP$.

Ovo možemo pokazati i na drugi način:

$$\left.\begin{array}{l} AI \cong AI \\ IQ \cong IP = r \\ \sphericalangle AQI \cong \sphericalangle API = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{SSU} \Delta AQI \cong \Delta API \Rightarrow AQ \cong AP$$

(AI je najveća str. u trouglu)

BI je simetrala ugla $\sphericalangle CBA$

$\Rightarrow \sphericalangle CBI \cong \sphericalangle ABI = \omega$

CI simetrala $\sphericalangle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle PCI \cong \sphericalangle ICB = \lambda$

$\sphericalangle NIB$ je vanjski ugao $\Delta BCI \Rightarrow$

$\sphericalangle NIB = \lambda + \omega$

$\alpha + 2\omega + 2\lambda = 180^\circ$

$2\omega + 2\lambda = 180^\circ - \alpha$

$\omega + \lambda = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle NIB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle AQP \cong \sphericalangle APQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP + \sphericalangle PQB = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle PQB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle NQB$

Sad u $\square BINQ$ imamo

$\sphericalangle BQN + \sphericalangle BIN = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \omega + \lambda = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$

Četverougao $\square BINQ$ je tetivni,

q.e.d.