Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.04.2014.

Pismeni ispit iz Diferencijalne geometrije

Pravila: U sva četri zadatka obavezno napisati formulu koju koristite kao i značenja simbola iz napisane formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. (40%) (*a*) Data je kriva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kod koje su $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}\,'(t)$ kolinearni u intervalu mijenjanja parametra (tj. $\vec{r}\,'(t) = \varphi(t)\vec{r}(t)$). Pokazati da je data kriva $\vec{r}$ konstantnog pravca.

(60%) (*b*) Odrediti vektor tangente krive

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \qquad y^2 - 2x + z = 0$$

u tački $M(1;1;1)$ bez konkretnog svođenja krive na parametarski oblik (za parametar uzeti apscisu x).

2. Naći dužinu luka krive

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad z = 4a\cos\frac{t}{2}$$

između njezina dva sjecišta sa ravninom $x0z$.

3. Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

4. Pokazati da su kod krive

$$x = \operatorname{ch} z, \qquad y = \operatorname{sh} z$$

radijus krive i torzije (R i T) jednaki.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

\# Data je kriva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kod koje su $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}'(t)$ kolinearni u intervalu mijenjanja parametra (tj. $\vec{r}'(t) = \varphi(t)\vec{r}(t)$). Pokazati da je data kriva $\vec{r}$ konstantnog pravca.

Rj:
$$\vec{r}'(t) = \varphi(t)\vec{r}(t)$$

$$x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \varphi(t)(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})$$

Odavde

$$\frac{dx}{dt} = x\varphi(t), \quad \frac{dy}{dt} = y\varphi(t), \quad \frac{dz}{dt} = z\varphi(t)$$

$$\frac{dx}{x} = \varphi(t)dt, \quad \frac{dy}{y} = \varphi(t)dt, \quad \frac{dz}{z} = \varphi(t)dt$$

$$\ln\frac{x}{c_1} = \int\varphi(t)dt, \quad \ln\frac{y}{c_2} = \int\varphi(t)dt, \quad \ln\frac{z}{c_3} = \int\varphi(t)dt$$

$$x = c_1 e^{\int\varphi(t)dt}, \quad y = c_2 e^{\int\varphi(t)dt}, \quad z = c_3 e^{\int\varphi(t)dt}$$

Dakle

$$\vec{r} = \underbrace{(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k})}_{\vec{c}} e^{\int\varphi(t)dt} = \vec{c}\,\underbrace{e^{\int\varphi(t)dt}}_{\gamma(t)} = \gamma(t)\vec{c}$$

($\vec{c}$ - konstantan vektor)

(#) Odrediti vektor tangente krive

$$x^2-y^2+z^2=1, \quad y^2-2x+z=0$$

u tački $M(1,1,1)$ bez konkretnog svođenja krive na parametarski oblik (za parametar uzeti apscisu x).

Rj.

$$x^2-y^2+z^2=1$$
$$y^2-2x+z=0$$

Ako u ovoj krivoj za parametar uzmemo apscisu x, kriva će imati vektorsku jednačinu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j} + z(x)\vec{k}.$$

Komponente y i z su ovdje funkcije od x, koje ćemo kao i njene derivacije, naći iz zadane krive na sljedeći način

$$x=x, \quad \dot{x}=1, \quad \ddot{x}=0, \quad \dddot{x}=0$$

$\dot{\vec{r}}$:

$$2x-2y\dot{y}+2z\dot{z}=0 \quad /:2$$
$$2y\dot{y}-2+\dot{z}=0$$

U tački $M(1,1,1)$ ovaj sistem jednačina glasi

$$1-\dot{y}+\dot{z}=0 \quad \ldots (I)$$
$$2\dot{y}-2+\dot{z}=0 \quad \ldots (II)$$

(I)-(II): $-3\dot{y}+3=0 \Rightarrow \dot{y}=1$

(I)$\cdot 2$+II $\quad 3\dot{z}=0 \Rightarrow \dot{z}=0$

Traženi vektor tangente je $\vec{t}=(1;1;0)$.

(#) Naći dužinu luka krive

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad z=4a\cos\frac{t}{2}$$

između njezina dva sjecišta sa ravninom xOz.

Rj.

Kada je kriva data u parametarskom obliku tada presjek krive sa xOz ravni dobijemo kada y izjednačimo sa nulom.

$$y=0 \Rightarrow a(1-\cos t)=0 \Rightarrow t_1=0,\ t_2=2\pi$$

Dužinu luka od t_0 do t_1 računamo po formuli $s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$.

$$\dot{x}=a(1-\cos t),\quad \dot{y}=a\sin t,\quad \dot{z}=-2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=a^2\left(1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1}+4\sin^2\frac{t}{2}\right)=$$

$$=a^2\left(2-2\cos t+4\sin^2\frac{t}{2}\right)=2a^2\left(1-\cos t+2\sin^2\frac{t}{2}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 1=\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2} \\ \cos t=\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2} \\ \hline 1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\end{array}\right| = 2a^2(1-\cos t+1-\cos t)=2a^2(2-2\cos t)$$

$$=4a^2(1-\cos t)$$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2(1-\cos t)}\,dt=2|a|\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2|a|\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\sqrt{2}a\underbrace{\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt}_{=4}$$

$$=8\sqrt{2}a$$

traženo rješenje

$$\left\lceil \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=\ldots=4 \right\rfloor$$

Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2+y^2-z^2=1, \qquad x^2-y^2-z^2=1.$$

Rj.

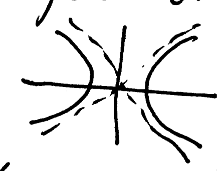
Data je kriva $\vec{r}: \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x^2-y^2-z^2=1 \end{cases}$.

Ako se na neki način riješim y-na dobiću ortogonalnu projekciju krive na xOz ravan.

$$\begin{array}{rl} & x^2+y^2-z^2=1 \\ + & x^2-y^2-z^2=1 \\ \hline & 2x^2-2z^2=2 \;/:2 \end{array}$$

$$x^2-z^2=1$$

ortogonalna projekcija date krive na xOz ravan.
Parametrizirajmo ovu krivu.
Prepoznajemo da je ovo jednačina hiperbole u xOz ravni



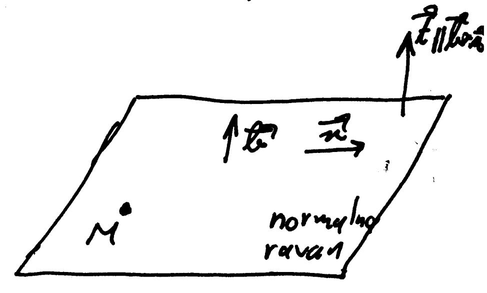
Parametarski oblik jedinične hiperbole je $ch^2t - sh^2t = 1$,

tj. $x = ch\,t$
$z = sh\,t$ (od ranije znamo $ch^2t - sh^2t = 1$)

$$\Rightarrow \quad y = z^2 - x^2 + 1 = -(x^2-z^2-1) = -(ch^2t - sh^2t - 1) = 0$$

Parametarski oblik date krive je

$$\vec{r}: \begin{cases} x = ch\,t \\ y = 0 \\ z = sh\,t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Normalnu ravan određuju tačka M na krivoj, vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$.

$\dot{\vec{r}} = (\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$\vec{r}' = (\text{sh}\,t, 0, \text{ch}\,t)$

$\ddot{\vec{r}} = (\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$$\vec{b} = \vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{sh}\,t & 0 & \text{ch}\,t \\ \text{ch}\,t & 0 & \text{sh}\,t \end{vmatrix} = (0, \text{sh}^2 t - \text{ch}^2 t, 0)$$

$$= (0, -1, 0)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ \text{sh}\,t & 0 & \text{ch}\,t \end{vmatrix} = (-\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$$

$\vec{t} = (\text{sh}\,t, 0, \text{ch}\,t)$

Proizvoljna tačka na krivoj je $M(\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$$\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1) + \dot{z}(z - z_1) = 0$$

jednač. norm. ravni u tački (x_1, y_1, z_1)

$$\text{sh}\,t(x - \text{ch}\,t) + 0(y - 0) + \text{ch}\,t(z - \text{sh}\,t) = 0$$

$$\text{sh}\,t\, x + \text{ch}\,t\, z - 2\,\text{sh}\,t\,\text{ch}\,t = 0$$

jednačina tražene normalne ravni

ako gornju jednačinu podijelimo sa $\text{sh}\,t$ dobijemo

$$x + \text{ctgh}\, z - 2\,\text{ch}\,t = 0$$

(#) Pokazati da su kod krive

$$x = \operatorname{ch} z \qquad y = \operatorname{sh} z$$

radijus krive i torzije (R i T) jednaki.

Rj. Ako uvedemo smjenu $z=t$ datu krivu možemo napisati u obliku

$$C \searrow \vec{r} : \begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \\ z = t \end{cases}$$

Tada je

$$\dot{\vec{r}} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1)$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 0)$$
$$\dddot{\vec{r}} = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 0)$$

Neka je $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$
$$\dddot{\vec{r}} = \dddot{\vec{r}}(\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z})$$

Tada je

$$R^2 = \frac{(\dot{\vec{r}}^{\,2})^3}{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}, \text{ a } \quad T = \frac{-[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}$$

$$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = 2\operatorname{ch}^2 t \qquad \boxed{\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t}$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 1 \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \end{vmatrix} = (-\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t)$$
$$= (-\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, -1)$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2 = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = 2\operatorname{ch}^2 t$$

$$R^2 = \frac{(2\operatorname{ch}^2 t)^3}{2\operatorname{ch}^2 t} = (2\operatorname{ch}^2 t)^2 \quad \Rightarrow \quad R = |2\operatorname{ch}^2 t| = 2\operatorname{ch}^2 t$$

$$\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 1 \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \end{vmatrix} = -1(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) = -1$$

$$|T| = -\frac{2\operatorname{ch}^2 t}{-1} = 2\operatorname{ch}^2 t \qquad R = |T| = 2\operatorname{ch}^2 t$$

traženo rješenje