Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 20.06.2012.

1. (60%) (a) Napisati Freneove obrasce za krivu $\vec{r} = a\,cos t\,\vec{i} + a\,sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$.

(40%) (b) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r} = \vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati izraz $\vec{n} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$ (tačnije pojednostaviti izraz, tj riješiti se vektorskog proizvoda).

2. Oko paraboloida $x^2 + y^2 = 2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0; 0; -2)$.

3. Naći površinu torusa $x = (a + b\,cosu)\,cosv$, $y = (a + b\,cosu)\,sinv$, $z = b\,sinu$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

4. Odrediti asimptotske linije površi $\vec{r} = (u, uv, f(v))$, $u, v \in \mathbb{R}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Napisati Freneove obrasce za krivu

$$\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}.$$

R: Freneovi obrasci su (za krivu $\vec{r} = \vec{r}(s)$) $\dfrac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0$, $\dfrac{d\vec{n}_0}{ds} = -K\vec{t}_0 - \dfrac{1}{T}\vec{b}_0$

i $\dfrac{d\vec{b}_0}{ds} = \dfrac{1}{T}\vec{n}_0$ gdje je K krivina krive, a $\dfrac{1}{T}$ torzija krive.

Torzija krive $\dfrac{1}{T}$ se računa po formuli $\dfrac{1}{T} = -\dfrac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$,

a krivinu krive možemo izračunati po formuli $K = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$.

$$\vec{r} = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

$$\dot{\vec{r}} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$\dddot{\vec{r}} = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (+ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = \underline{a^2b^2\sin^2 t} + \underline{a^2b^2\cos^2 t} + a^4 = a^2b^2 + a^2 = a^2(b^2 + a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{\vec{r}}^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

$$K = \frac{a\sqrt{b^2 + a^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = a^2 b$$

$$\frac{1}{T} = -\frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

Traženi Freneovi obrasci su

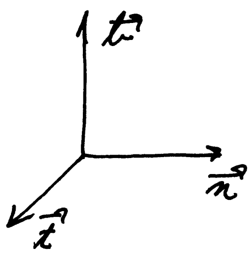
$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{a}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -\frac{a}{a^2+b^2}\vec{t}_0 + \frac{b}{a^2+b^2}\vec{b}_0$$

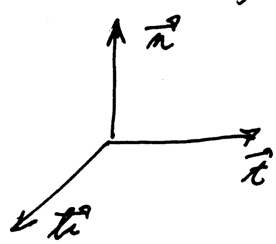
$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

(#) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r} = \vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati (tačnije pojednostaviti) izraz $\vec{n} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$ (riješiti se vektorskog proizvoda).

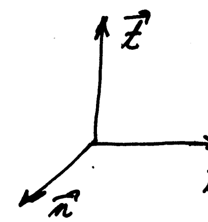
Rj. Za prirodni triedar znamo da vrijedi



$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$



$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$



$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$

Iz čega slijedi $-\vec{b} = \vec{n} \times \vec{t}$, $-\vec{n} = \vec{t} \times \vec{b}$ i $-\vec{t} = \vec{b} \times \vec{n}$.

Iz Frenetovih formula $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$ gdje je κ krivina krive, a τ torzija krive.

$$\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{n} \times (-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}) = -\kappa(\vec{n} \times \vec{t}) + \tau(\vec{n} \times \vec{b}) =$$

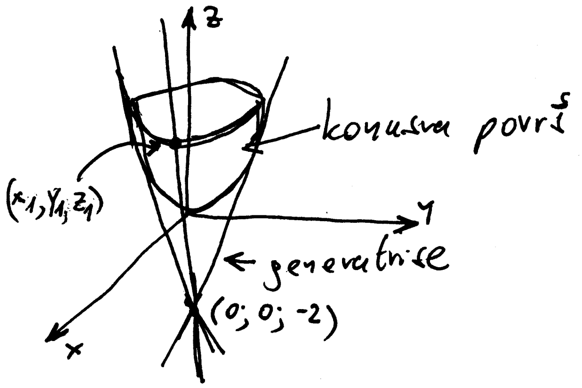
$$= \kappa \vec{b} + \tau \vec{t}$$

traženo rješenje

(#) Oko paraboloida $x^2+y^2=2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0;0;-2)$.

Rj.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave koja cijelo vrijeme prolazi kroz neku datu fiksiranu tačku S i siječe nepokretnu datu krivu (direktrisu).



Tačka (x_1, y_1, z_1) paraboloida će biti i tačka konusa ako tangentna ravan paraboloida u toj tački sadrži i vrh konusa $(0;0;-2)$.

Kako tačka (x_1, y_1, z_1) pripada paraboloidu, imamo

$$x_1^2+y_1^2=2z_1 \quad \ldots(1)$$

Vektor normale $\vec{n}$ na paraboloid je $\vec{n}=(2x, 2y, -2)$ pa je jednačina tangentne ravni u tački $(x_1; y_1; z_1)$

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)-2(z-z_1)=0 \quad /:2$$

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-(z-z_1)=0$$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ jedn. ravni

Kako tačka $(0;0;-2)$ pripada ravni imamo

$$-x_1^2-y_1^2+z_1+2=0 \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise kroz tačke (x_1, y_1, z_1) i $(0,0,-2)$ je

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z+2}{z_1+2} \quad \left(=\frac{1}{t}\right)$$

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ jedn. prave kroz dvije tačke

$x_1=xt \quad \ldots(3)$

$y_1=yt \quad \ldots(4)$

$z_1=(z+2)t-2 \quad \ldots(5)$

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu tražene površi.

$(1)+(2): \quad z_1 = 2$

$$z=2 \text{ i } (5) \Rightarrow \quad t = \frac{4}{z+2} \xRightarrow{(3)\text{ i }(4)} \quad x_1 = \frac{4x}{z+2}, \quad y_1 = \frac{4y}{z+2}$$

Ako uvstimo gornje vrijednosti za x_1, y_1, z_1 u (1) dobivdemo jednačinu konusne površi

$$\left(\frac{4x}{z+2}\right)^2 + \left(\frac{4y}{z+2}\right)^2 = 4$$

$$16x^2 + 16y^2 = 4(z+2)^2 \quad /:4$$

$$4(x^2+y^2) = (z+2)^2$$

tražena jednačina konusne površi

(#) Naći površinu torusa

$$x=(a+b\cos u)\cos v,\quad y=(a+b\cos u)\sin v,\quad z=b\sin u,\quad u,v\in[0,2\pi]$$

Rj.

$$P=\iint\limits_{(K)} dS=\iint\limits_{D}|\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v|\,du\,dv=\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

gdje je (K) zatvoreno područje na torusu, D zatvoreno područje u ravni takvo da $\vec{r}(D)=(K)$, a $\vec{r}$ je vektorska jednačina torusa

$$\vec{r}=((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u).$$

$$\vec{r}\,'_u=(-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$$

$$\vec{r}\,'_v=(-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$E=\vec{r}\,'^{2}_u=\underline{b^2\sin^2 u}\cos^2 v+\underline{b^2\sin^2 u}\sin^2 v+b^2\cos^2 u=$$

$$=b^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u=b^2$$

$$F=\vec{r}\,'_u\cdot\vec{r}\,'_v=b(a+b\cos u)\sin u\sin v\cos v-b(a+b\cos u)\sin u\sin v\cos v=0$$

$$G=\vec{r}\,'^{2}_v=(a+b\cos u)^2\sin^2 v+(a+b\cos u)^2\cos^2 v=(a+b\cos u)^2$$

$$P=\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint\limits_{D}b(a+b\cos u)\,du\,dv=b\int_0^{2\pi}du\int_0^{2\pi}(a+b\cos u)\,dv=$$

$$=b\int_0^{2\pi}\left(av\Big|_0^{2\pi}+bv\Big|_0^{2\pi}\cos u\right)du=2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos u)\,du=2\pi b\left(au\Big|_0^{2\pi}+b\sin u\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$=4\pi^2 ab$ tražena površina

(#) Odrediti asimptotske linije površi

$$\vec{r} = (u, uv, f(v)), \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

R.: Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi.

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenja diferencijalne jednačine $F_2 = 0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi).

$$F_2 = d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$\vec{r}_u' = (1, v, 0)$$

$$\vec{r}_v' = (0, u, f')$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}''\,du^2 + 2\vec{r}_{uv}''\,du\,dv + \vec{r}_{vv}''\,dv^2$$

$$\vec{r}_{uu}'' = (0,0,0) \qquad \vec{r}_{uu}''\,du^2 = (0,0,0)$$

$$\vec{r}_{uv}'' = (0,1,0) \qquad 2\vec{r}_{uv}''\,du\,dv = (0, 2du\,dv, 0)$$

$$\vec{r}_{vv}'' = (0,0,f'') \qquad \vec{r}_{vv}''\,dv^2 = (0,0,f''dv^2)$$

$$d^2\vec{r} = (0, 2du\,dv, f''dv^2)$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & v & 0 \\ 0 & u & f' \end{vmatrix} = (vf', -f', u)$$

$$F_2 = 0 \iff d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = 0 \iff \frac{1}{|\vec{n}|} d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \iff d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$$

$$d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = -2f'\,du\,dv + f''u\,dv^2$$

$$-2f'\,du\,dv + f''u\,dv^2 = 0$$

$$dv \cdot (-2f'\,du + f''u\,dv) = 0$$

$$dv = 0 \quad \text{ili} \quad -2f'\,du + f''u\,dv = 0$$

$$v = c \quad \text{ili} \quad 2f'\,du = f''u\,dv$$

$$2\frac{du}{u} = \frac{f''}{f'}dv \quad /\int$$

$$d(f'(v)) = f''\,dv$$

$$2\int \frac{du}{u} = \int \frac{d(f')}{f'}$$

$$2\ln u = \ln f' + \ln c$$

$$u^2 = f' c$$

Rješenja diferencijalne jednačine $F_2 = 0$ su

$$v = c_1 \quad i \quad u = \pm\sqrt{f' c_2}$$

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ su

$$\vec{r}_1 = (u, c_1 u, f(c_1))$$

$$\vec{r}_{2,3} = (\pm\sqrt{f' c_2}, \pm v\sqrt{f' c_2}, f(v))$$