Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 05.07.2012.

1. (30%) (a) Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r} = e^t(cost, sint, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

(70%) (b) Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x = e^t cost, \ \ y = e^t sint, \ \ z = e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

2. Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka ($\vec{r} = \vec{r}(s)$), gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \stackrel{def}{=} \tau\vec{t} + K\vec{b}$, gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \ \ \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \ \text{ i } \ \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata?

3. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = a\,u\,cosv$, $y = a\,u\,sinv$, $z = b\,v$ (gdje su $u, v \in \mathbb{R}$), ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

4. Odrediti linije krivine površi $\vec{r} = (u\,cosv, u\,sinv, a\,v)$.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule.

Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**, 05.07.2012.

1. (30%) (a) Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r} = e^t(cost, sint, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

(70%) (b) Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x = e^t cost, \ \ y = e^t sint, \ \ z = e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

2. Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka ($\vec{r} = \vec{r}(s)$), gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \stackrel{def}{=} \tau\vec{t} + K\vec{b}$, gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \ \ \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \ \text{ i } \ \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata?

3. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = a\,u\,cosv$, $y = a\,u\,sinv$, $z = b\,v$ (gdje su $u, v \in \mathbb{R}$), ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

4. Odrediti linije krivine površi $\vec{r} = (u\,cosv, u\,sinv, a\,v)$.

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule.

Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r}=e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

Rj. Dužina luka krive od tačke 0 do λ se računa po formuli

$$s=\int_0^\lambda dS = \int_0^\lambda \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

U našem slučaju $\dot{x}=(e^t\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\dot{y}=(e^t\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$\dot{z}=0$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=e^t\sqrt{\cos^2 t-\cancel{2\sin t\cos t}+\sin^2 t+\sin^2 t+\cancel{2\sin t\cos t}+\cos^2 t}=$$

$$=e^t\sqrt{2}$$

$$s=\int_0^\lambda dS=\int_0^\lambda e^t\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\,e^t\Big|_0^\lambda=\sqrt{2}(e^\lambda-1)$$

$$s=\int_0^t dS=\sqrt{2}(e^t-1)$$

Dužina luka od 0 do t je
$s=\sqrt{2}(e^t-1)$.

$$e^t-1=\frac{1}{\sqrt{2}}s$$

$$e^t=\frac{s}{\sqrt{2}}+1$$

$t=\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ parametar t izražen preko dužine luka s.

\# Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

R:

Vektore tangente, binormale i normale krive određujemo formulama $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$, $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$.

$$\vec{r} = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$$

$$\dot{\vec{r}} = (e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t,\ e^t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\underline{e^t \cos t} - e^t \sin t - e^t \sin t \underline{- e^t \cos t},\ \underline{e^t \sin t} + e^t \cos t + e^t \cos t \underline{- e^t \sin t},\ e^t)$$

$$= (-2e^t \sin t,\ 2e^t \cos t,\ e^t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = e^t(-2\sin t - 2\cos t,\ 2\cos t - 2\sin t,\ 1)$$

$$\vec{t} = e^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t,\ 1)$$

$$|\vec{t}|^2 = e^{2t}(\underline{\cos^2 t} \cancel{- 2\cos t \sin t} \underline{+ \sin^2 t} + \underline{\sin^2 t} \cancel{+ 2\sin t \cos t} + \underline{\cos^2 t} + 1) =$$

$$= 3e^{2t} \quad \Rightarrow \quad |\vec{t}| = e^t\sqrt{3}$$

Jedinični vektor tangente je

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t,\ 1)$$

jedinični vektor tangente

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t \cos t - e^t \sin t & e^t \sin t + e^t \cos t & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= e^t \cdot e^t \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2t}(\sin t + \cos t - 2\cos t,\ -(\cos t - \sin t + 2\sin t),\ 2\cos^2 t \cancel{- 2\sin t \cos t} + 2\sin^2 t \cancel{+ 2\sin t \cos t})$$

$$\vec{b} = e^{2t}(\sin t - \cos t,\ -\sin t - \cos t,\ 2)$$

$$|\vec{b}|^2 = e^{4t}\cdot(\sin^2 t \cancel{-2\sin t\cos t} + \cos^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2\sin t\cos t} + \cos^2 t + 4)$$

$$|\vec{b}| = e^{2t}\sqrt{6}$$

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t,\ -(\sin t + \cos t),\ 2)$$ jedinični vektor binormale

$$\vec{n}_0 = \vec{b}_0 \times \vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t - \cos t & -\sin t - \cos t & 2 \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}}(-\sin t - \cos t + 2\sin t - 2\cos t,\ -(\sin t - \cos t - 2\cos t + 2\sin t),$$
$$\sin^2 t - \cos^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}((-3)(\sin t + \cos t),\ (-3)\cdot(\sin t - \cos t),\ 0) =$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)(\sin t + \cos t),\ -\sin t + \cos t,\ 0)$$ jedinični vektor glavne normale

Krivinu krive možemo izračunati po formuli $K = \frac{1}{R}$ gde je R poluprečnik krivine $R = \frac{|\vec{r}|^3}{|\vec{b}|}$

$$R = \frac{(e^t\sqrt{3})^3}{e^{2t}\sqrt{6}} = \frac{e^{3t}\,3\sqrt{3}}{e^{2t}\sqrt{6}} = 3e^t\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$ tražena krivina krive

Torziju možemo izračunati po formuli $-\tau = \frac{1}{T} = \frac{\dddot{\vec{r}}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\dddot{\vec{r}} = e^t(-2\sin t - 2\cos t,\ \overbrace{2\cos t - 2\sin t}^{2(\cos t - \sin t)},\ 1)$$

$$\vec{b} = e^{2t}(\sin t - \cos t,\ \underbrace{-\sin t - \cos t}_{(-1)(\cos t + \sin t)},\ 2)$$

$$\dddot{\vec{r}}\cdot\vec{b} = e^{3t}((-2)(\sin^2 t - \cos^2 t) - 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2) = 2e^{3t}$$

$$-\tau = \frac{2e^{3t}}{e^{4t}\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}}\cdot\frac{1}{e^t} = \frac{\sqrt{2}}{e^t\sqrt{3}}$$ tražena torzija krive

7) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $(\vec{r}=\vec{r}(s))$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \overset{\text{def}}{=} \tau\vec{t} + k\vec{b}$ gdje su k i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta\times\vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta\times\vec{n} \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta\times\vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata.

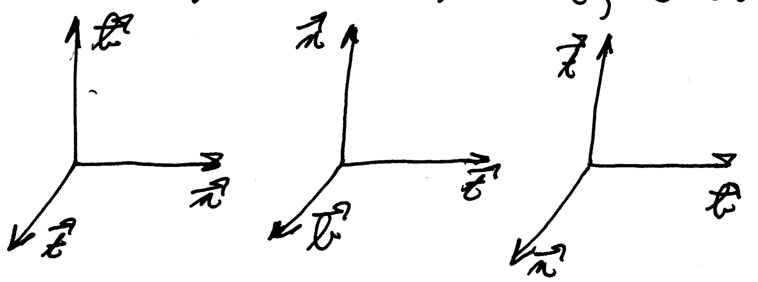
Rj:

Frenetovi obrasci za krivu $\vec{r}=\vec{r}(s)$ su

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau\vec{b} - k\vec{t}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \qquad \ldots(1)$$

gdje su $\vec{t}$, $\vec{b}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.

Prvo izračunajmo $\delta\times\vec{t}$, $\delta\times\vec{n}$, $\delta\times\vec{b}$.



$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n}$
$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t}$
$\vec{t} = \vec{n}\times\vec{b}$

$$\left.\begin{aligned}
\delta\times\vec{t} &= (\tau\vec{t} + k\vec{b})\times\vec{t} = \tau(\vec{t}\times\vec{t}) + k(\vec{b}\times\vec{t}) = k\vec{n}\\
\delta\times\vec{n} &= (\tau\vec{t} + k\vec{b})\times\vec{n} = \tau(\vec{t}\times\vec{n}) + k(\vec{b}\times\vec{n}) = \tau\vec{b} - k\vec{t}\\
\delta\times\vec{b} &= (\tau\vec{t} + k\vec{b})\times\vec{b} = \tau(\vec{t}\times\vec{b}) + k(\vec{b}\times\vec{b}) = -\tau\vec{n}
\end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

Sada iz (1) i (2) možemo zaključiti da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta\times\vec{t} = 0, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta\times\vec{n} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta\times\vec{b} = 0.$$

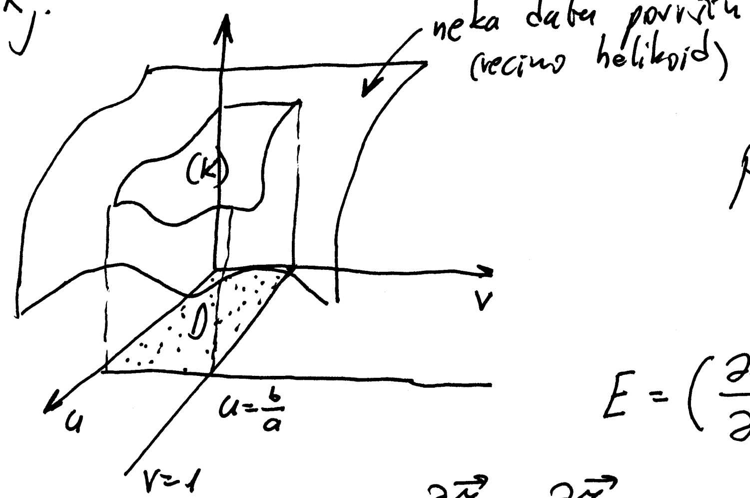
Na osnovu dobijenog rezultata možemo zaključiti da su Frenetove jednačine za $\frac{d\vec{t}}{ds}$, $\frac{d\vec{n}}{ds}$ i $\frac{d\vec{b}}{ds}$ ekvivalentne jednačinama $\delta\times\vec{t}$, $\delta\times\vec{n}$ i $\delta\times\vec{b}$.

Naći površinu četverougla na helikoidu

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \quad u,v \in \mathbb{R}$$

ograničenog krivima $u=0$, $u=\frac{b}{a}$, $v=0$, $v=1$.

Rj.



$$P = \iint_{(K)} dS = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + 0 = a^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a\cos v, a\sin v, 0)(-au\sin v, au\cos v, b)$$
$$= -a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = a^2u^2\sin^2 v + a^2u^2\cos^2 v + b^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^2(a^2u^2+b^2) - 0^2} = a\sqrt{a^2u^2+b^2}$$

$$P = \iint_D a\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du\,dv = a\int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du\int_0^1 dv = a\int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du$$

$$= \left|\begin{matrix} u = \frac{b}{a}s & \\ u^2 = \frac{b^2}{a^2}s^2 & u\Big|_0^{\frac{b}{a}} \Rightarrow s\Big|_0^1 \\ du = \frac{b}{a}ds & \end{matrix}\right| = a\int_0^1\sqrt{b^2s^2+b^2}\,\frac{b}{a}\,ds = b^2\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds$$

$$\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{s^2+1} & dv = ds \\ du = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}ds & v = s\end{matrix}\right| = s\sqrt{s^2+1} - \int\frac{s^2+1-1}{\sqrt{s^2+1}}ds$$

$$= -\int\sqrt{s^2+1}\,ds + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds = s\sqrt{s^2+1} + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = s\sqrt{s^2+1} + \ln|s+\sqrt{s^2+1}| + C$$

traženo površina

$$\Rightarrow P = \frac{b^2}{2}\left[\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|\right]$$

(#) Odrediti linije krivine površi $\vec{r}=(u\cos v, u\sin v, av)$.

Rj. Za diferencijalnu jednačinu linije krivine možemo uzeti

$$d\vec{n}_0=\lambda\, d\vec{r}.$$

$$\vec{r}_u'=(\cos v, \sin v, 0)$$

$$\vec{r}_v'=(-u\sin v, u\cos v, a)$$

$$\vec{n}=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}=(a\sin v, -a\cos v, u)$$

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$$

$$d\vec{n}_0=\frac{\partial\vec{n}_0}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{n}_0}{\partial v}dv, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}=(a^2+u^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(a^2+u^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2u=$$

$$=\frac{-u}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}$$

$$\vec{n}_0=\left(\frac{a\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}}, \frac{-a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)$$

$$\left(\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right)'=\frac{\sqrt{a^2+u^2}-u\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{a^2+u^2}}\cdot 2u}{a^2+u^2}=\frac{\sqrt{a^2+u^2}-\frac{u^2}{\sqrt{a^2+u^2}}}{a^2+u^2}\begin{matrix}/\cdot\sqrt{a^2+u^2}\\ /\cdot\sqrt{a^2+u^2}\end{matrix}$$

$$=\frac{a^2+u^2-u^2}{(a^2+u^2)\sqrt{a^2+u^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}$$

Prema tome

$$\vec{n}_{0_u}'=\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}(-au\sin v, au\cos v, a^2)$$

$$\vec{n}_{0_v}'=\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)}}(a\cos v, a\sin v, 0)=\frac{a^2+u^2}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}(a\cos v, a\sin v, 0)$$

$$d\vec{n}_0=\vec{n}_{0_u}'du+\vec{n}_{0_v}'dv=$$

$$= \frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}} \left(-au \sin v\, du + a(a^2+u^2)\cos v\, dv,\right.$$
$$\left. au\cos v\, du + a(a^2+u^2)\sin v\, dv,\quad a^2 du\right)$$

Dalje

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u\, du + \vec{r}\,'_v\, dv =$$
$$= (\cos v\, du - u\sin v\, dv,\ \sin v\, du + u\cos v\, dv,\ a\, dv)$$

Sada, kako smo za diferencijalnu jednačinu linija krivina uzeli $d\vec{n}_0 = \lambda\, d\vec{r}$ imamo $\lambda = \frac{d\vec{n}_0}{d\vec{r}}$

$$\frac{-au\sin v\, du + a(a^2+u^2)\cos v\, dv}{\cos v\, du - u\sin v\, dv} = \frac{au\cos v\, du + a(a^2+u^2)\sin v\, dv}{\sin v\, du + u\cos v\, dv}$$

$$= \frac{a^2 du}{a\, dv}$$

Izjednačavanjem bilo koja dva razlomka gornje jednačine dobijamo istu diferencijalnu jednačinu (npr. izjednačimo zadnja dva razlomka)

$$\underline{a^2 u\cos v\, du\, dv} + a^2(a^2+u^2)\sin v\, dv^2$$
$$= a^2 \sin v\, du^2 + \underline{a^2 u\cos v\, du\, dv} \quad /:a^2 \quad /:\sin v$$

$$(a^2+v^2)\, dv^2 = du^2$$

$$dv = \pm \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$$ čije je rješenje

$$v = \pm \ln(u + \sqrt{a^2+u^2}) + c$$

Linije krivine su

$$\vec{r}_{1,2} = \left(u\cos(\pm\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+c),\ u\sin(\pm\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+c),\ \pm a\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})+c\right)$$