Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Analiza 3**

1. Odrediti jednačinu tangentne ravni na površ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, koja je normalna na pravu $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

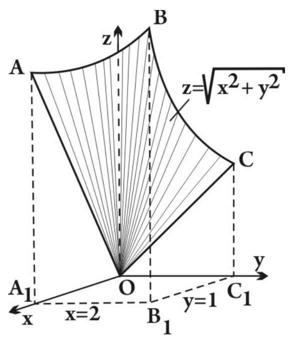
2. Uvođenjem cilindričnih koordinata izračunati trostruki integral $J=\iiint\limits_W (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ gdje je oblast W ograničena površinom $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$.

3. Uz pomoć krivoliniskog integrala druge vrste, izračunati površinu, ograničenu kardioidom $x=2\,cost-cos2t$, $y=2sint-sin2t$.

4. Uz pomoć formule Stoksa, izračunati krivoliniski integral

$$\oint\limits_l e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz$$

gdje je l-zakrivljena linija OCBAO (vidi sliku) dobijena presjekom površina $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.



(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Odrediti jednačina tangentne ravni na površ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, koja je normalna na pravu $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

Rj. Kako izgledu jednačina tangentne ravni i normale na neku površ $F(x,y,z)=0$?

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

jednačina tangentne ravni na površ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$

$$\frac{x-p_1}{F'_x(p_1,p_2,p_3)}=\frac{y-p_2}{F'_y(p_1,p_2,p_3)}=\frac{z-p_3}{F'_z(p_1,p_2,p_3)}$$ jednačina normale na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$

U našem slučaju $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, a tačka u kojoj trebamo postaviti datu ravan nam nije poznata. Za trenutak, označimo tu tačku sa $M(x_0,y_0,z_0)$.

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}$$

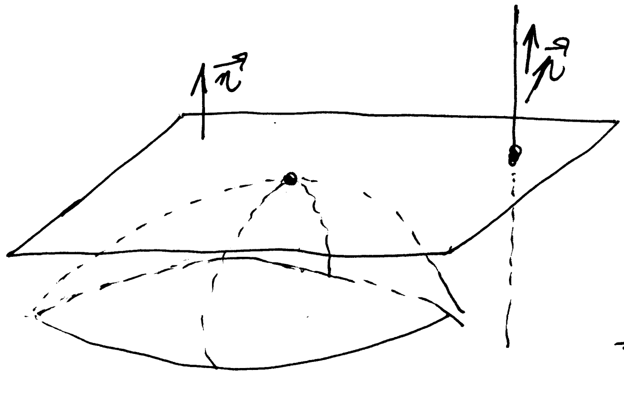
$$F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$$

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \quad /:2$$

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0$$

Kako je tačka $M(x_0,y_0,z_0)$ tačka na elipsi imamo $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

tj. $$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0.$$



Vektor normale tražene ravni je $\vec{n}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$.

$\vec{n}\parallel\vec{p}$ gdje je $\vec{p}=(1,2,3)\Rightarrow\vec{n}=k\cdot\vec{p}$

$\Rightarrow \vec{n}=(k,2k,3k)$, $k\in\mathbb{R}$ tj. imamo

$$\frac{x_0}{a^2}=k, \quad \frac{y_0}{b^2}=2k, \quad \frac{z_0}{c^2}=3k \quad \Rightarrow \quad x_0=a^2k, \quad y_0=2kb^2, \quad z_0=3kc^2$$

Postavljamo još pitanje kako izračunati k?
M je tačka sa naše površi (sa elipse) pa

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \quad \text{tj.} \quad a^2k^2+4b^2k^2+9c^2k^2=1$$

$$k^2=\frac{1}{a^2+4b^2+9c^2}$$

$$k=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+4b^2+9c^2}}$$

Na kraju imamo

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$$

$$kx+2ky+3kz-1=0 \quad /:k$$

$$x+2y+3z-\frac{1}{k}=0$$

$$x+2y+3z\mp\sqrt{a^2+4b^2+9c^2}=0$$ jednačina tražene tangentne ravni

\# Izračunati trostruki integral $J=\iiint\limits_{W}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

gdje je oblast W ograničena površinom $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$.

Rj. Skicirajmo oblast W

$$3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$$

$$3x^2+3y^2+z^2=3a^2 \quad /:3a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{3a^2}=1$$

jednačina elipse

za elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ uopštene sferne koordinate glase $x=ar\sin\varphi\cos\theta$

$y=br\sin\varphi\sin\theta$

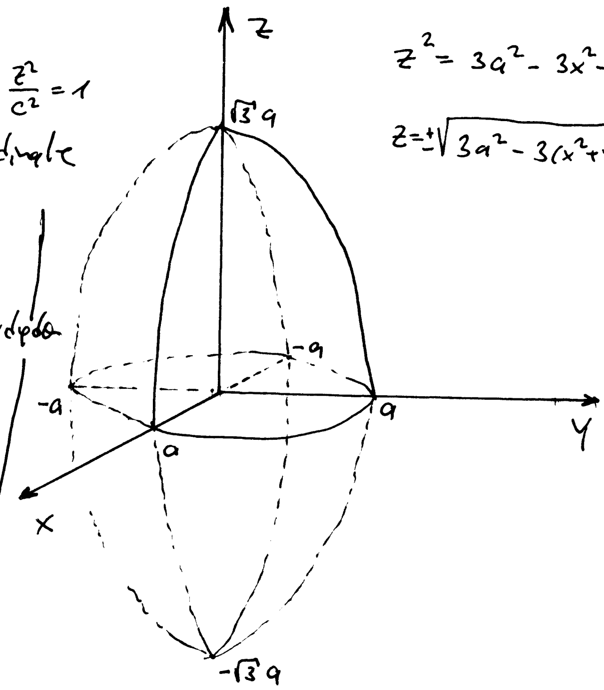
$z=cr\cos\varphi$

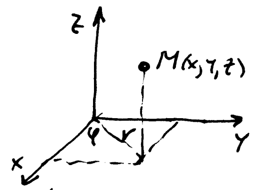
$dxdydz=abcr^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

U ovom slučaju uopštene sferne koordinate ne mogu na lagan način riješit zadatak

$$z^2=3a^2-3x^2-3y^2$$

$$z=\pm\sqrt{3a^2-3(x^2+y^2)}$$





Uvodimo cilindrične koordinate

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$z=z$$
$$dxdydz=r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$W \xrightarrow{\text{transformise}} W' : \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ -\sqrt{3(a^2-(x^2+y^2))}\le z\le\sqrt{3(a^2-(x^2+y^2))} \\ -\sqrt{3(a^2-r^2)}\le z\le\sqrt{3(a^2-r^2)}\end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2+z^2$$

$$J=\iiint\limits_{W}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\left|\begin{array}{c}\text{uvodimo cilindrične}\\ \text{koordinate}\end{array}\right|=\iiint\limits_{W'}(r^2+z^2)\,r\,dr\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a dr\int_{-\sqrt{3(a^2-r^2)}}^{\sqrt{3(a^2-r^2)}}(r^2+z^2)r\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(r^2z\Big|_{-\sqrt{3(a^2-r^2)}}^{\sqrt{3(a^2-r^2)}}+\frac{z^3}{3}\Big|_{-\sqrt{3(a^2-r^2)}}^{\sqrt{3(a^2-r^2)}}\right)r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(r^2\,2\sqrt{3}\sqrt{a^2-r^2}+\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}+3\sqrt{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right)\right)r\,dr=$$

ako ovo izvučemo ispred zagrade

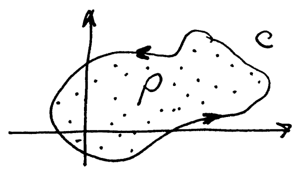
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(2\sqrt{3}r^2\underline{\underline{\sqrt{a^2-r^2}}}+2\sqrt{3}(a^2-r^2)\underline{\underline{\sqrt{a^2-r^2}}}\right)r\,dr=2\sqrt{3}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr$$

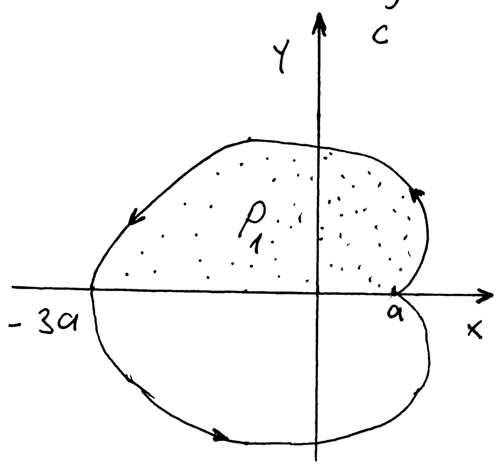
$$=\left|d(a^2-r^2)=-2r\,dr\right|=-\sqrt{3}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,d(a^2-r^2)=\ \dots\ =\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}4\pi a^5}_{\text{rješenje}}$$

Uz pomoć krivolinijskog integrala druge vrste, izračunati površinu, ograničenu kardioidom $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$.

Rj. Prisjetimo se, površina figure ograničene krivom c se računa po formuli

$$P=\frac{1}{2}\oint_c x\,dy-y\,dx$$





kardioida
$x=2a\cos t-a\cos 2t$
$y=2a\sin t-a\sin 2t$

$t=0:\ x=a,\ y=0$
$t=\pi:\ x=-3a,\ y=0$

Primjetimo da je kardioida kriva linija koja je simetrična u odnosu na x-osu, pa da bi izračunali površinu ograničenu kardioidom dovoljno je izračunati površinu iznad x-ose

Da bi smo opisali kardioidu parametar t uzima vrijednosti od 0 do 2π.

Prisjetimo se, ako je kriva c data u parametarskom obliku $x=\mu(t)$, $y=\eta(t)$, $t_1\le t\le t_2$ tada se krivolinijski integral računa po formuli

$$\int_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_c \left(P(\mu(t),\eta(t))\,\mu'(t)+Q(\mu(t),\eta(t))\,\eta'(t)\right)dt$$

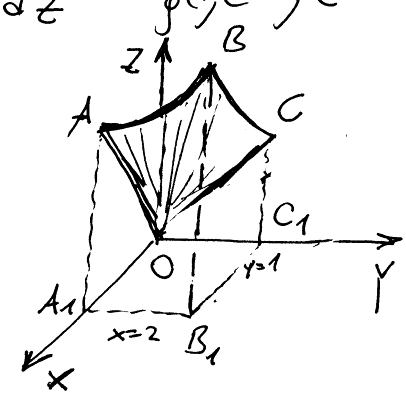
$$P=\frac{1}{2}\oint_c x\,dy-y\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\cos t-\cos 2t\\ dx=(-2\sin t+2\sin 2t)\,dt\\ y=2\sin t-\sin 2t\\ dy=(2\cos t-2\cos 2t)\,dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\cos t-\cos 2t)\cdot(2\cos t-2\cos 2t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(2\cos t-\cos 2t)(2\cos t-2\cos 2t)-(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)\right]dt=2P_1$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\underline{4\cos^2 t}-6\cos t\cos 2t+\underline{\underline{2\cos^2 2t}}+\underline{4\sin^2 t}-6\sin t\sin 2t+\underline{\underline{2\sin^2 2t}}\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(6-6\cos t\cos 2t-6\sin t\sin 2t)\,dt=6\int_0^{\pi}(1-\cos(t-2t))\,dt=\ldots=6\pi$$

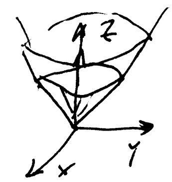
(#) Uz pomoć formule Stoksa, izračunati krivoliniski integral $K=\oint\limits_{\ell} e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy + yz^3 dz$ gdje je



ℓ - zakrivljena linija OCBAO (vidi sliku) dobijena presjekom površina

$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

Rj.:



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ je čunj iznad xOy ravni

$x=0$, $x=2$ su ravni paralelne sa yOz ravni

$y=0$, $y=1$ su ravni paralelne sa xOz ravni

Stoksova formula glasi

$$\int\limits_{c} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} dy\,dz & dx\,dz & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

površinski integral druge vrste

$P=e^x$, $\frac{\partial P}{\partial y}=0$, $\frac{\partial P}{\partial z}=0$

$Q=z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=z\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = 3xz\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

$R=yz^3$, $\frac{\partial R}{\partial x}=0$, $\frac{\partial R}{\partial y}=z^3$.

$$K=\oint\limits_{\ell} e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy + yz^3 dz = \left|\text{formula Stoksa}\right| =$$

$$= \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} dy\,dz & dx\,dz & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x & z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} & yz^3 \end{vmatrix} = \iint\limits_{S} \underbrace{\left(z^3 - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)}_{=0} dy\,dz - (0-0)\,dx\,dz$$

$$z^3 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3$$

$$+\left(3xz\sqrt{x^2+y^2} - 0\right)dx\,dy = \iint\limits_{S} 3xz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

površinski integral II vrste

Tj. dobili smo $K=\iint\limits_S 3xz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

Kako naša data kriva pravi površinu $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ u prvom oktantu imamo

$$K=\iint\limits_S 3x\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Prisjetimo se kako se računa površinski integral II vrste npr. $I=\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$. Neka je $\vec{n}$ vektor normale na površ S, i neka neka je γ ugao koji $\vec{n}$ gradi sa z-osom, i neka je D projekcija površi S na xOy ravan. Tada

$$I=\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy=\pm\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$ gdje predznak ispred integrala zavisi od $\cos\gamma$ (za $\cos\gamma>0$ $+$, $\cos\gamma<0$ $-$).

Mi posmatramo vanjsku stranu površi, iz čega možemo zaključiti (sa slike) da je $\gamma\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ pa je $\cos\gamma<0$.
Projekcija D površi S je data u sklopu zadatka (vidi sliku) ($\square A_1B_1C_1O$)

$$D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1\end{cases}\qquad K=\iint\limits_S 3x(x^2+y^2)\,dx\,dy=-\iint\limits_D 3x(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=-3\int_0^1 dy\int_0^2 (x^3+xy^2)\,dx=-3\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2+\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^2\right)dy=$$

$$=-3\int_0^1 (4+2y^2)\,dy=-3\left(4y\Big|_0^1+\frac{2}{3}y^3\Big|_0^1\right)=-12-2=-14$$ traženo rješenje