Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 16.09.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Analiza 3**

1. Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

2. Izračunati integral $I = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dx\,dy$ ako je D oblast data sa $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

3. Izračunati krivoliniski integral $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ duž puta koji ne prolazi kroz koordinatni početak.

4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_S xy^3 z\,dx\,dy$ ako je S vanjska strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ u prvom oktantu.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)$

Nađimo jednačinu tangentne ravni na elipsoid u proizvoljnoj tački $M(p_1,p_2,p_3)$: (U našem slučaju $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$)

$$F'_x=\frac{1}{a^2}\cdot 2x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}$$

$$F'_x(M)=\frac{2p_1}{a^2},\quad F'_y(M)=\frac{2p_2}{b^2},\quad F'_z(M)=\frac{2p_3}{c^2}$$

$$\frac{2p_1}{a^2}(x-p_1)+\frac{2p_2}{b^2}(y-p_2)+\frac{2p_3}{c^2}(z-p_3)=0 \quad /\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{p_1}{a^2}x+\frac{p_2}{b^2}y+\frac{p_3}{c^2}z=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}$$

Napišimo jednačinu ravni u kanonskom obliku

$$\frac{x}{\frac{a^2}{p_1}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{z}{\frac{c^2}{p_3}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}=1$$

Odavdje možemo primjetiti da ako želimo da jednačina tangentne ravni na kordanatnim osama odsjeca jednake odsječke, potrebno i dovoljno je da $\frac{a^2}{p_1}=\frac{b^2}{p_2}$, $\frac{a^2}{p_1}=\frac{c^2}{p_3}$ i $\frac{b^2}{p_2}=\frac{c^2}{p_3}$. ...(*)

Isto tako primjetimo da je $\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=1$ ...(**) (ZAŠTO?)

(*) $\Rightarrow$ $p_1=\frac{a^2}{b^2}p_2$, $p_3=\frac{c^2}{b^2}p_2$ ...(1) Sad imamo:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{\frac{a^2}{b^2}p_2}}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}}+\frac{z}{\frac{c^2}{\frac{c^2}{b^2}p_2}}=1 \quad /:p_2$$

$$\frac{x}{b^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b^2}=\frac{1}{p_2}$$

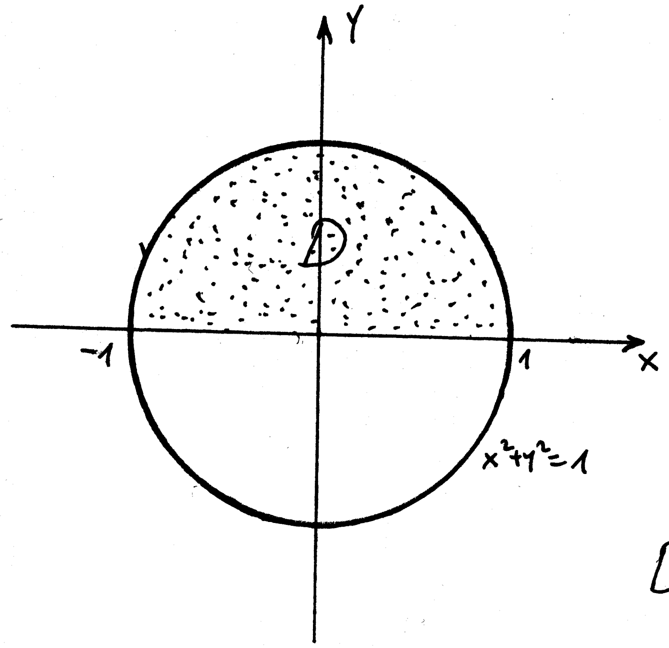
Kada (1) stavimo u (**) dobićemo da je $p_2=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Prema tome:

$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ je jednačina tražene tangente

(#) Izračunati integral $I=\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, ako je D oblast data sa: $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$.

Rj. Skicirajmo oblast D



$$D:\begin{cases} -1\le x\le 1\\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

Uvedimo polarne koordinate

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$$

$$D \xrightarrow{\text{transformare}} D',\quad D':\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\end{cases}$$

$$1-x^2-y^2=1-(x^2+y^2)=1-r^2$$
$$1+x^2+y^2=1+r^2$$

$$I=\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr$$

Izračunajmo posebno drugi integral

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr=\int_0^1\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}}\,r\,dr=\int_0^1\frac{1-r^2}{\sqrt{(1+r^2)(1-r^2)}}\cdot r\,dr=\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^4}}\,dr-\int_0^1\frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}\,dr$$

$$r|_0^1\Rightarrow t|_0^1$$

$$\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^4}}\,dr=\left|\begin{matrix}r^2=t\\ 2r\,dr=dt\\ r\,dr=\frac12 dt\end{matrix}\right|=\frac12\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac12\arcsin t\Big|_0^1=\frac12\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1\frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}\,dr=\left|\begin{matrix}1-r^4=s^2 & r^3dr=-\frac12 s\,ds\\ -4r^3dr=2s\,ds & r|_0^1\Rightarrow s|_1^0\end{matrix}\right|=-\frac12\int_1^0\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2}}=\frac12$$

$$I=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr=\varphi\Big|_0^{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac12\right)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}$$ traženo rješenje

(#) Izračunati krivoliniski integral $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ duž puta koji ne prolazi kroz koordinatni početak.

Rj: Ako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tada vrijednost integrala $\int_c P\,dx + Q\,dy$ ne zavisi od vrste izbora puta integracije.

$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Prema tome vrijednost integrala ne zavisi od izbora krive kojom ćemo spojiti tačke $(1,0)$ i $(6,8)$.

I način: Odrediti ćemo primitivnu f-ju u.

$u = u(x,y)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \ldots(1)$$

$$\partial u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial x$$

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \varphi(y) = \left| \begin{array}{c} x^2+y^2 = t^2 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \\ x\,dx = t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{t^2}}dt + \varphi(y)$$

$$= t + \varphi(y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) \quad \ldots(2)$$

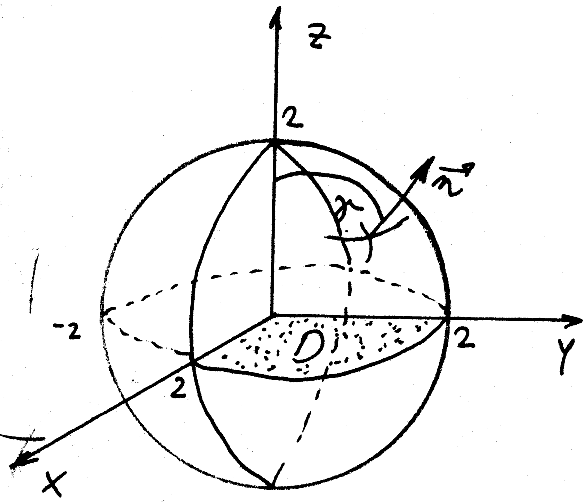
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} du = u\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = \sqrt{36+64} - \sqrt{1+0} = 9$$

II način: Spojmo tačke $(1,0)$ i $(6,8)$ nekom krivom koja ne prolazi kroz koordinatni početak i izračunamo integral na klasičan način.

(#) Izračunati površinski integral $I=\iint\limits_S xy^3z\,dx\,dy$, ako je S vanjska strana sfere $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu.

R: $x^2+y^2+z^2=4$ je sfera sa centrom u koordinatnom početku čiji je poluprečnik dužine 2.



Kad računamo $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dx\,dy$ treba uzeti u obzir predznak broja $\cos\gamma$.
Ako je $\cos\gamma<0$ ispred integrala stavljamo minus, ako je $\cos\gamma>0$ ispred integrala stavljamo plus, a ako je $\cos\gamma=0$ tada je integral jednak 0.
γ je ugao koji vektor normale $\vec{n}$ ($\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$) zaklapa sa z-osom

Vektor normale $\vec{n}$ je u prvom oktantu $\Rightarrow$ $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow$ $\cos\gamma>0$

$$x^2+y^2+z^2=4$$
$$z=\pm\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$ nama treba +

$$I=\iint\limits_S xy^3z\,dx\,dy=\iint\limits_D xy^3\left(\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)dx\,dy=\left|\begin{array}{l}\text{uvedimo polarne koordinate}\\ x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ dx\,dy=r\,dr\,d\varphi \\ x^2+y^2=r^2\end{array}\quad D':\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\end{cases}\right|$$

$$=\iint\limits_{D'} r\cos\varphi\, r^3\sin^3\varphi\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^2 r^5\sqrt{4-r^2}\,dr=I_1\cdot I_2$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}\sin\varphi=t\\ \cos\varphi\,d\varphi=dt\\ \varphi\big|_0^{\pi/2}\Rightarrow t\big|_0^1\end{array}\right|=\int_0^1 t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$I_2=\int_0^2 r^5\sqrt{4-r^2}\,dr=\int_0^2 r^4\sqrt{4-r^2}\,r\,dr=\left|\begin{array}{l}4-r^2=t^2\\ -2r\,dr=2t\,dt\\ r\,dr=-t\,dt\end{array}\quad r\big|_0^2\Rightarrow t\big|_2^0\right|=\int_0^2(4-t^2)^2\cdot t\,t\,dt$$

$$=\int_0^2(16-8t^2+t^4)\cdot t^2\,dt=\int_0^2(t^6-8t^4+16t^2)\,dt=\ldots=\frac{1024}{105}$$

$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{1024}{105}=\frac{256}{105}$$ traženo rješenje