Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 18.10.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Analiza 3**

1. Dokazati da tangentne ravni povrsi $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsjecke ciji je zbir jednak a.

2. Izračunati dvostruki integral $I = \iint\limits_D dx\,dy$ ako je D oblast ogranicena lemniskatom $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3. Izračunati zapreminu tijela ogranicenog valjkom $x^2 + y^2 = 6x$ i ravnima $x - z = 0$, $5x - z = 0$.

4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_S xyz\,dx\,dy$ ako je S dio ravni $x + y + z = 1$ u prvom oktantu.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a.

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu

$$F_x'(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F_y'(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F_z'(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

Primjetimo da ako je data kriva u ravni $F(x,y)=0$ tada jednačina tangente u tački $N(c_1,c_2)$ ima jenačinu

$$F_x'(c_1,c_2)(x-c_1)+F_y'(c_1,c_2)(y-c_2)=0$$

npr. jednačina tangente na krivu $y=x^2+x-6$ u tački $(-3,0)$ je $y=-5x-15$.

U našem slučaju data površ je $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$

$$F_x'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F_y'=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F_z'=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Uzmimo proizvoljnu tačku sa površi $M(p_1,p_2,p_3)$.

$$F_x'(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_1}}=\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1};\quad F_y'(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_2}}=\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2};\quad F_z'(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_3}}=\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}$$

Jednačina tangentne ravni na površ u tački M

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}(x-p_1)+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}(y-p_2)+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}(z-p_3)=0$$

Napišimo jednačinu u kanonskom obliku

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}x+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}y+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}z=\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{p_1}+\frac{1}{2}\sqrt{p_2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_3}}_{\frac{1}{2}\sqrt{a}}\quad /\cdot 2/\sqrt{a}$$

Primjetimo da je $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3}=\sqrt{a}$. ZAŠTO?

$$\frac{x}{\frac{p_1\sqrt{a}}{\sqrt{p_1}}}+\frac{y}{\frac{p_2\sqrt{a}}{\sqrt{p_2}}}+\frac{z}{\frac{p_3\sqrt{a}}{\sqrt{p_3}}}=1$$

$$\frac{x}{\sqrt{p_1 a}}+\frac{y}{\sqrt{p_2 a}}+\frac{z}{\sqrt{p_3 a}}=1$$

Jednačina tangentne ravni na x-osi odsjeca $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_1}$, na y-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_2}$ i na z-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_3}$.

Zbir ovih odsječaka iznosi

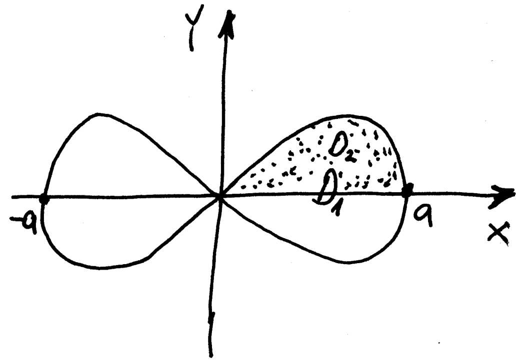
$$\sqrt{a}\sqrt{p_1}+\sqrt{a}\sqrt{p_2}+\sqrt{a}\sqrt{p_3}=\sqrt{a}\left(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3}\right)=a$$

q.e.d.

(#) Izračunati dvostruki integral $\iint\limits_D dx\,dy$, ako je D oblast ograničena lemniskatom

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Rj. Lemniskata grafički izgleda ovako.



Pronađimo presječne tačke lemniskate sa x-osom: $y=0$

$$x^4=a^2x^2 \Rightarrow x^4-a^2x^2=0$$
$$x^2(x^2-a^2)=0$$
$$x_1=0,\ x_2=a,\ x_3=-a$$

Primjetimo da se površina oblasti D računa po formuli $P=\iint\limits_D dx\,dy$. Naša oblast D je simetrična u odnosu na y-osu pa je $\iint\limits_D dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} dx\,dy$.

Oblast D_1 je simetrična u odnosu na x-osu.

$$\iint\limits_D dx\,dy = 4\iint\limits_{D_2} dx\,dy$$

uvedimo polarne koordinate $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$
$$(r^2)^2=a^2(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi) \quad /:r^2\ (r\neq 0)$$
$$r^2=a^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$
$$r^2=a^2\cdot\cos 2\varphi \Rightarrow r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

(primjetimo da za $\varphi>\frac{\pi}{4}$ r nije definisano)

$$D_2:\begin{cases} 0<\varphi<\frac{\pi}{4} \\ 0<r<\sqrt{a^2\cos 2\varphi}\end{cases}$$

$$\iint\limits_D dx\,dy = 4\iint\limits_{D_2} r\,dr\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=a^2 \quad \text{traženo rješenje}$$

Izračunati zapreminu tijela ograničenog valjkom $x^2+y^2=6x$ i ravnima $x-z=0$, $5x-z=0$.

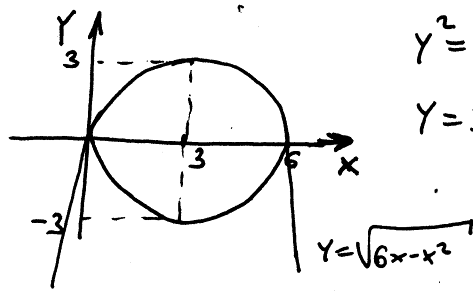
Rj. $V=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz$

$x^2+y^2=6x$

$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+y^2=0$

$(x-3)^2+y^2=3^2$

projekcija valjka na xOy ravan izgleda



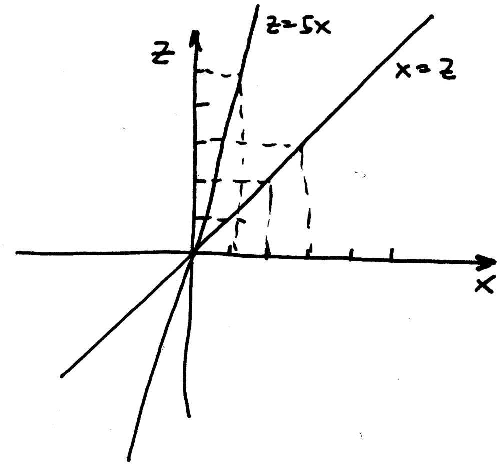
$y^2=6x-x^2$

$y=\pm\sqrt{6x-x^2}$

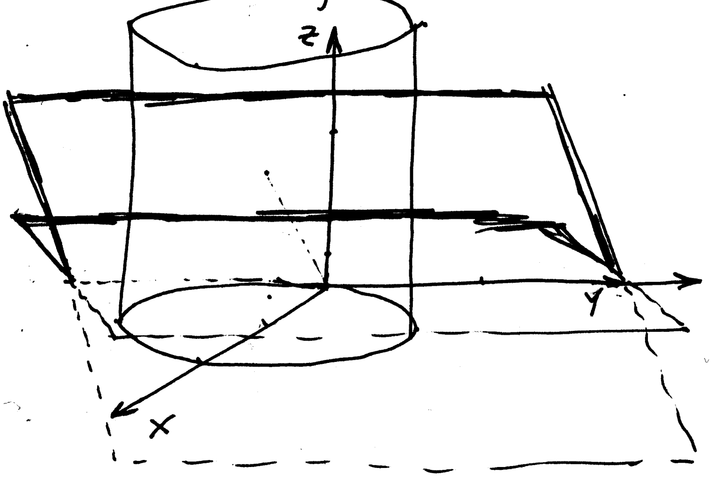
$x-z=0$ $\qquad$ $5x-z=0$

$x=z$ $\qquad$ $z=5x$

projekcije ravni $x-z=0$ i $5x-z=0$ na xOz ravan izgleda



Skica ovih figura u prostoru bi otprilike izgledala ovako



valjak presječen sa dvije ravni na klasičan način

$$\Omega:\begin{cases}0<x<6\\ 0<y<\sqrt{6x-x^2}=\sqrt{9-(x-3)^2}\\ x\le z\le 5x\end{cases}$$

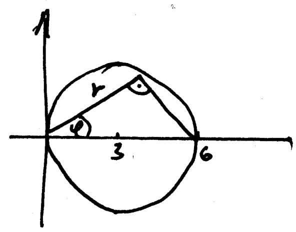
uvedimo cilindrične koordinate

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$z=z$

$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$



$\cos\varphi=\frac{r}{6}$

Primjetimo da je oblast Ω simetrična u odnosu na xOz ravan

$$V=2\iiint\limits_{\Omega'} r\,dr\,d\varphi\,dz \qquad \Omega':\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 6\cos\varphi\\ r\cos\varphi<z<5r\cos\varphi\end{cases}$$

$$V=2\iiint\limits_{\Omega'} r\,dr\,d\varphi\,dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{6\cos\varphi}r\,dr\underbrace{\int_{r\cos\varphi}^{5r\cos\varphi}dz}_{=4r\cos\varphi}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{6\cos\varphi}r^2\,dr=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{6\cos\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$$

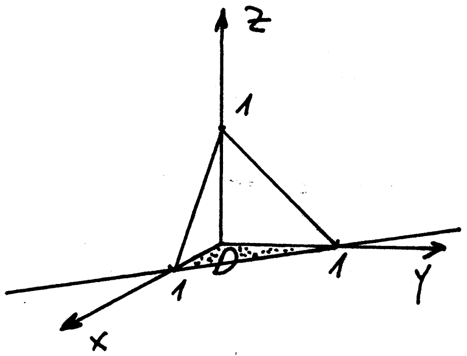
$$=8\cdot\frac{6^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=576\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)\right)^2d\varphi=144\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=\underset{\text{za vježbu}}{\dots}=108\pi$$

tražena zapremina

(#) Izračunati površinski integral $I=\iint\limits_S xyz\,dS$, ako je S dio ravni $x+y+z=1$ u I oktantu.

Rj.

$x+y+z=1$ je ravan koja na x, y i z osi odsjeca 1.

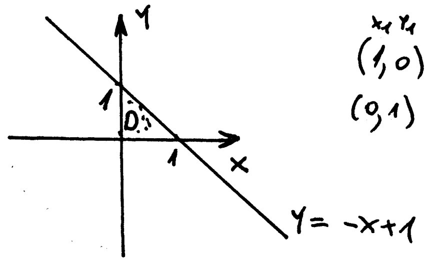


Ako je S data površ opisana jednačinom $z=z(x,y)$ i ako je D projekcija površi S na xOy ravan tada:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

U našem slučaju $z=1-x-y$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$



$\begin{matrix} x_1 & y_1 \end{matrix}$
$(1,0)$
$(0,1)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y=-x+1$$

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 1\\ 0\le y\le -x+1\end{cases}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Sad imamo

$$I=\iint\limits_S xyz\,dS=\sqrt{3}\iint\limits_D x\cdot y\cdot(1-x-y)\,dx\,dy=\sqrt{3}\int_0^1 x\,dx\int_0^{-x+1}(y-xy-y^2)\,dy=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{-x+1}-x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{(-x+1)}-\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{(-x+1)}\right)dx=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}x\overbrace{(-x+1)^2}^{x^2-2x+1}-\frac{1}{2}x^2\overbrace{(-x+1)^2}^{x^2-2x+1}-\frac{1}{3}x\overbrace{(-x+1)^3}^{-x^3+3x^2-3x+1}\right)dx=$$

rješenje

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3\cancel{-x^2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^4\cancel{+x^3}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4\cancel{-x^3}\cancel{+x^2}-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x\right)dx=\sqrt{3}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{120}}=\frac{\sqrt{3}}{120}$$