Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 04.07.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Analiza 3**

1. Neka je data funkcija $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}, & \text{(x,y)}\neq\text{(0,0)};\\ 0, & \text{(x,y)=(0,0)}.\end{cases}$$

Odrediti da li sljedeći limesi postoje i izračunati one limese koji postoje:
(40%) **(a)** $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)]$; $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)]$;
(60%) **(b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Izračunati zapreminu tijela, ograničeno površinama $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

3. Date su tačke $A(3;-6;0)$ i $B(-2;4;5)$. Izračunati krivoliniski integral $I=\int\limits_c xy^2\,dx+yz^2\,dy-zx^2\,dz$ gdje je c:
(40%) **(a)** duž koja spaja tačke O i B (O je koordinatni početak)
(60%) **(b)** kriva od A do B kruga zadan jednačinama $x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$.

4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_T 2\,dxdy+y\,dxdz-x^2z\,dydz$ gdje je T vanjska strana elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=4$ koji se nalazi u prvom oktantu.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Neka je data f-ja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Odrediti da li sljedeći limesi postoje i izračunati one limese koji postoje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$; $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Rj.

a) $$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

b) Pokazaćemo da limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Posmatrajmo dva niza tački $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ i $P_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\ldots$ koje teže $(0,0)$ kad $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^4 \quad / \cdot n^4}{1/n^4 + \frac{1}{n^2} \quad / \cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0$$

Prema tome limes zavisi od načina približavanja ka tački $(0,0)$ pa ne postoji.

⊕ Izračunati zapreminu tijela, ograničeno površinama

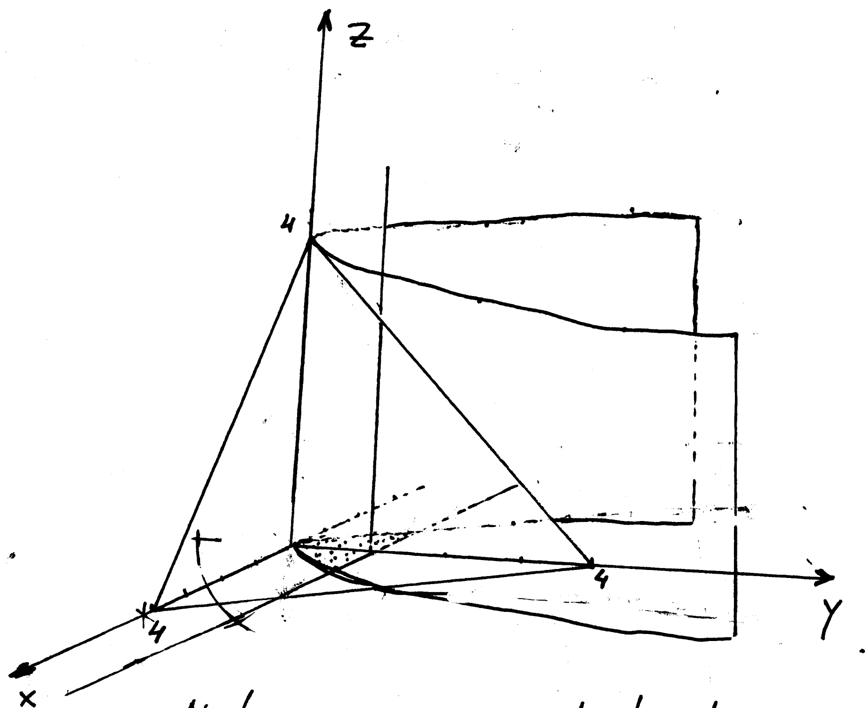
$y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

Rj. Skicirajmo naše tijelo.

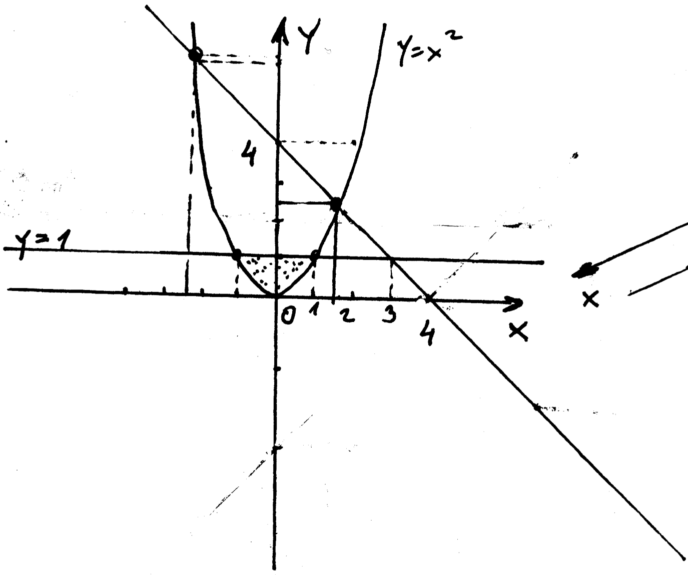
$x+y+z=4$ je ravan $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1\right)$ koja na x, y, i z osi ima odsječke 4.

$y=1$, $z=0$ su ravni

$y=x^2$ je cilindar 



Napravimo ortogonalne projekcije površina na xOy ravan



Nađimo presječnu tačku krive $y=x^2$ i prave $x+y=4$.

$$\begin{aligned} y&=x^2 \\ x+y&=4 \\ \hline y&=x^2 \\ y&=4-x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2&=4-x \\ x^2+x-4&=0 \\ D&=1+16=17 \\ x_{1,2}&=\frac{-1\pm 4{,}12}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &\approx -2{,}56 & x_2&\approx 1{,}56 \\ &\Downarrow & &\Downarrow \\ y_1&=2{,}43 & y_2&=6{,}56 \end{aligned}$$

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$ ← zapremina tijela koje je odozgo ograničeno sa f i tijelo ima ortogonalnu projekciju D

U našem slučaju $f(x,y)=4-x-y$ (ovo vidimo sa skice)

$$V=\iint\limits_D (4-x-y)\,dx\,dy \quad \text{gdje je} \quad D:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases} \quad \text{ili} \quad D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\end{cases}$$

$$V=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(4-x-y)\,dy=\int_{-1}^{1}\Big(\underbrace{4y\Big|_{x^2}^{1}}_{4(1-x^2)}-\underbrace{xy\Big|_{x^2}^{1}}_{-x(1-x^2)}-\underbrace{\tfrac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{1}}_{-\frac{1}{2}(1-x^4)}\Big)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(4-\underline{\underline{4x^2}}-x+\underline{x^3}-\frac{1}{2}+\underline{\underline{\underline{\frac{1}{2}x^4}}}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-4x^2+\frac{1}{2}x^4-x+\frac{7}{2}\right)=\ldots=-\frac{8}{3}+\frac{1}{5}+7=\frac{68}{15}$$

traženo rješenje

(#) Date su tačke $A(3;-6;0)$ i $B(-2;4;5)$. Izračunati krivolinijski integral $I=\int_c xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz$ gdje je c:

a) duž koja spaja tačke O i B (O koordinatni početak)

b) kriva od A do B: kruga zadan jednačinama $x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$.

Rj.
$$I=\int_c xy^2dx+yz^2dy+zx^2dz$$

Ovo je krivolinijski integral druge vrste. Prisjetimo se:
Ako je c kriva u prostoru opisana parametarskim jednačinama $x=\mu(t)$, $y=\eta(t)$, $z=\theta(t)$ gdje je $t_1\le t\le t_2$ tada

$$\int_c P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=\int_{t_1}^{t_2}P(\mu(t),\eta(t),\theta(t))\,\mu'(t)\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}Q(\mu(t),\eta(t),\theta(t))\,\eta'(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}R(\mu(t),\eta(t),\theta(t))\,\theta'(t)\,dt$$

Da bi smo opisali duž $\overline{OB}$ u prostoru prvo postavimo pravu kroz ove dvije tačke.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ jednačina prave kroz dvije tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$O(0,0,0)$

$B(-2,4,5)$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}\quad(=t)$$

$x=-2t$
$y=4t$
$z=5t$

Naše c je sada oblika
$$c:\begin{cases}x=-2t,\ y=4t,\ z=5t\\ 0<t<1\end{cases}$$

$$I=\int_c xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz=\int_0^1\left((-2t)\,16t^2\cdot(-2)+4t\cdot25t^2\cdot4-5t\cdot4t^2\cdot5\right)dt=$$

$$=\int_0^1 (64t^3+400t^3-100t^3)\,dt = 364\int_0^1 t^3 dt = \frac{364}{4} = 91$$ traženo rješenje

b) Dat je krug u prostoru zadan jednačinama

$x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$
↑ krug ↑ ravan

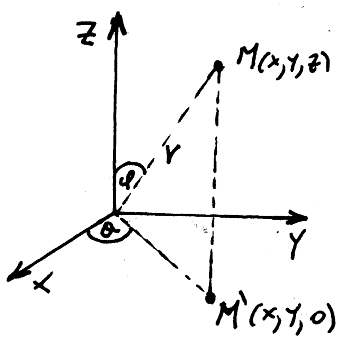
Da bi smo naš krug opisali u parametarskom obliku, veliku pomoć će odigrati sferne koordinate.

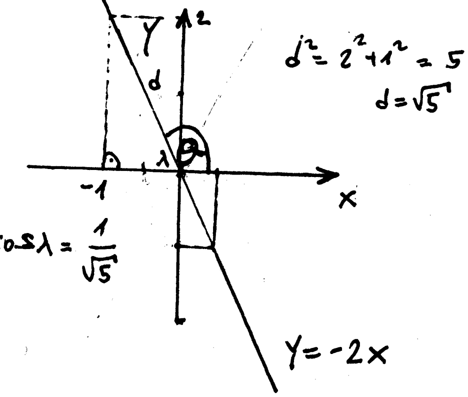
Sferne koordinate

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$z = r\cos\varphi$





Da bi smo krug u prostoru opisali parametarski potrebno je u sfernim koordinatama fiksirati r i θ. U našem slučaju ugao θ nije moguće svesti na lijep oblik.

Pristipumi parametarizaciji kruga na drugi način:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \Rightarrow y=-2x \\ x^2+y^2+z^2=45 \Rightarrow z^2=45-x^2-y^2 \end{array}\right\} \rightarrow c: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=\sqrt{45-t^2-4t^2}=\sqrt{45-5t^2} \\ 3\le t\le -2 \end{cases}$$

$$dx = dt,\quad dy=-2dt,\quad dz=\frac{1}{2}(45-5t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-10t) = -\frac{5t}{\sqrt{45-5t^2}}\,dt$$

$$I=\int_c xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz = \int_3^{-2}\left(t\cdot 4t^2+(-2t)(45-5t^2)\cdot(-2)-\cancel{\sqrt{45-5t^2}}\cdot t^2\frac{(-5t)}{\cancel{\sqrt{45-5t^2}}}\right)dt$$

$$=\int_3^{-2}(4t^3+180t-20t^3+5t^3)\,dt = \int_3^{-2}(-11t^3+180t)\,dt$$

$$=-11\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_3^{-2}+180\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_3^{-2} = -\frac{11}{4}\cdot(-65)+90\cdot(-5) = \frac{715-1800}{4} = \frac{-1085}{4}$$

$$=-271\frac{1}{4}$$ traženo rješenje

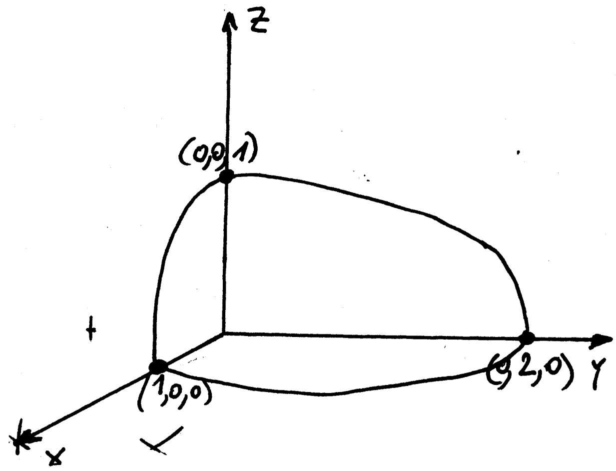
(#) Izračunati površinski integral

$$J=\iint_T z\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2 z\,dy\,dz$$ gdje je T vanjska strana elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=4$ koji se nalazi u prvom oktantu.

Rj. skicirajmo elipsoid

$4x^2+y^2+4z^2=4 \quad /:4$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$



$$J=\iint_T z\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2 z\,dy\,dz$$

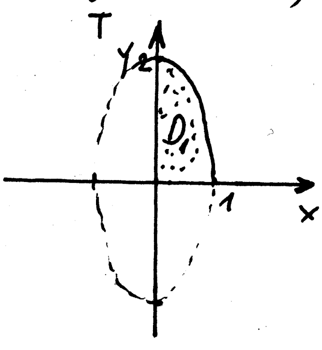
Ovo je površinski integral druge vrste. Prisjetimo se kako se računa npr. $\iint_T P(x,y,z)\,dy\,dz$. Neka je $\vec{n}$ vektor normale površi T koji sa x, y i z osom redom zaklapa uglove α, β i γ, i neka je D ortogonalna projekcija površi T na yOz ravan. Tada

$$\iint_T P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint_D P(\eta(y,z),y,z)\,dy\,dz$$ gdje je $+$ ako je $\cos\alpha>0$, $-$ (minus) ako je $\cos\alpha<0$, a $x=\eta(y,z)$ je jednačina koja opisuje površ T.

$$J=\iint_T z\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2 z\,dy\,dz = \iint_T z\,dx\,dy + \iint_T y\,dx\,dz - \iint_T x^2 z\,dy\,dz =$$
$$= J_1 + J_2 - J_3$$

Izračunajmo redom J_1, J_2 i J_3.

$J_1=\iint_T z\,dx\,dy$; vektor normale $\vec{n}$ na T sa z osom zaklapa ugao $\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$ tj. $\cos\gamma>0$



$z=0: \quad 4x^2+y^2=4$

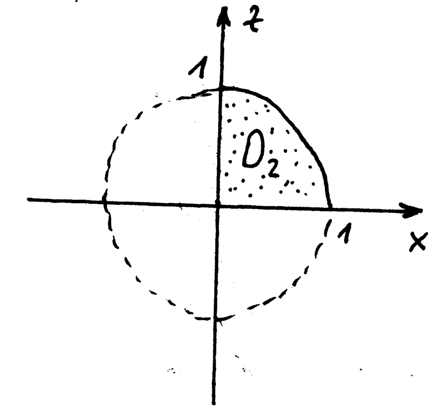
$$D_1: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

D_1 je četvrtina elipse

$P_{elipse}=ab\pi$; $\quad J_1 = +2\iint_{D_1} dx\,dy = 2\cdot\frac{1}{4}P_{elipse}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$

$J_2=\iint\limits_T y\,dx\,dz$, vektor normale $\vec{n}$ na površ T sa y-osom zaklapa uglove od 0 do $\pi/2$ (I oktant) pa je $\cos\gamma>0$.

Neka je D_2 ortogonalna projekcija površi T na xOz ravan.



$D_2:\ 4x^2+4z^2=4$

$4x^2+y^2+4z^2=4$

$y^2=4-4x^2-4z^2$

$y=2\sqrt{1-x^2-z^2}$

$D_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

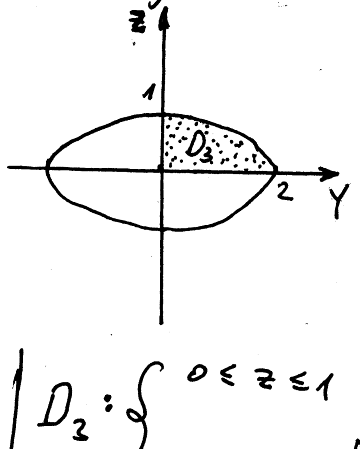
$$J_2=\iint\limits_T y\,dx\,dz=+2\iint\limits_{D_2}\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz=\left|\begin{array}{l}\text{uvedimo polarne}\\ \text{koordinate}\\ x=r\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi\\ dz\,dy=r\,dr\,d\varphi\\ D_2\rightsquigarrow D_2'\end{array}\quad D_2':\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\right|$$

$$=2\iint\limits_{D_2'}\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}\;r\,dr\,d\varphi=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\;r\,dr=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\left(-\frac{1}{2}\right)d(1-r^2)=-\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(0-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$J_3=\iint\limits_T x^2z\,dy\,dz$, vektor normale $\vec{n}$ na površ T sa x-osom zaklapa uglove od 0 do $\frac{\pi}{2}$ pa je $\cos\alpha>0$

Neka je D_3 ortogonalna projekcija površi T na yOz ravan.



$D_3:\ y^2+4z^2=4$ $\quad y^2=4-4z^2$

$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$

$4x^2+y^2+4z^2=4$

$4x^2=4-y^2-4z^2$

$x^2=1-\frac{1}{4}y^2-z^2$

$$J_3=\iint\limits_T x^2z\,dy\,dz=+\iint\limits_{D_3}\left(1-\frac{1}{4}y^2-z^2\right)z\,dy\,dz=$$

$$\left|D_3:\begin{cases}0\le z\le 1\\ 0\le y\le 2\sqrt{1-z^2}\end{cases}\right|=\int_0^1 z\,dz\int_0^{2\sqrt{1-z^2}}\left(1-\frac{1}{4}y^2-z^2\right)dy=\int_0^1 z\left(y\Big|_0^{2\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{2\sqrt{1-z^2}}-z^2y\Big|_0^{2\sqrt{1-z^2}}\right)$$

izvučemo $2\sqrt{1-z^2}$

$$=\int_0^1 z\left(\left(2\sqrt{1-z^2}\right)-\frac{2}{3}\sqrt{(1-z^2)^3}\left(-2z^2\sqrt{1-z^2}\right)\right)dz=\frac{4}{3}\int_0^1 z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}dz=\frac{2}{3}\cdot\frac{2(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^0=\frac{4}{15}$$

Prema tome $J=\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{4}{15}=\frac{4\pi}{3}-\frac{4}{15}$.