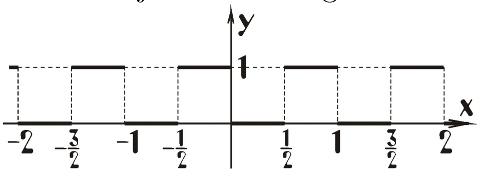
Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 25.05.2010.

Pismeni ispit iz predmeta Analiza 3

1. Pretvoriti u Fourier-ov red funkciju definisanu grafikom.



Iskoristiti dobijeni rezultat za izračunavanje sume redova $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n-1}$.

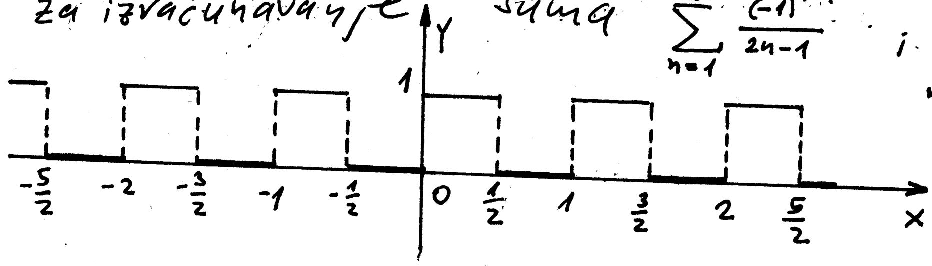
2. Izračunati izvod funkcije $u = x^2y^2 + z^2 - 3xyz$ u tački $T(1,1,2)$ u smjeru koji čini s koordinatnim osama uglove $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{6}$.

3. Neka je S površina tijela koje je dobijeno presjekom dva cilindra
$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\}$ i $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = a^2, x \in \mathbb{R}\}$.
Izračunati $\iint_S dS$.

4. Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

(Web stranica kursa je \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Pretvoriti u Furijeov red f-ju definisanu grafikom. Iskoristiti dobijeni rezultat za izračunavanje suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.



Rj. F-ju predstavljenu grafikom označićemo sa $y = f(x)$.

F-ja je periodična perioda 1, što znači f-ju je dovoljno pretvoriti u Furijeov red u intervalu $[0,1]$.

Furijeovi koeficijenti na intervalu $[a,b]$ se računaju po formuli:

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \quad i \quad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$$

Interval $[0,1]$ nije simetričan u odnosu na 0, pa parnost i neparnost ne igraju nikakvu ulogu.

Furijeov red f-je $f(x)$ je oblika $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$ $x\in[a,b]$

U našem slučaju:

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x\,dx = 2\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx = 2\,\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x\,dx = 2\int_0^{1/2}\sin 2n\pi x\,dx = 2\,\frac{1}{2n\pi}\left(-\cos 2n\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{(-1)}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{(-1)}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin 2n\pi x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin \boxed{2(2n-1)\pi x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(2n-1)\pi x}{(2n-1)}$$ f-ja razložena u Fourierov red

$f(\frac{1}{4}) = 1$ (iz grafika), $\sin 2(2n-1)\pi\cdot\frac{1}{4} = \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}$ pa je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$ (ovaj rezultat se može dobiti na dva načina: U Furijeov red uvrstiti tačku $x=\frac{3}{4}$ ili prethodnu sumu pomnožiti sa (-1)).

(#) Izračunati izvod f-je $u = x^2y^2 + z^2 - 3xyz$ u tački $T(1,1,2)$ u smjeru koji čini s koordinatnim osama uglove $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{6}$.

Rj. Izvod f-je $u = f(x,y,z)$ u tački $M(p_1, p_2, p_3)$ u pravcu vektora $\vec{e}$ ($\vec{e}$ je jedinični vektor) se računa po formuli:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} = \operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 - 3yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y - 3xz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 3xy$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1,2) = 2\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 = -4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,2) = 2\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 = -4$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,1,2) = 2\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\operatorname{grad} u(M) = (-4, -4, 1)$$

$$\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{4},\ \gamma = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M) = (-4, -4, 1)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{2} - 2$$

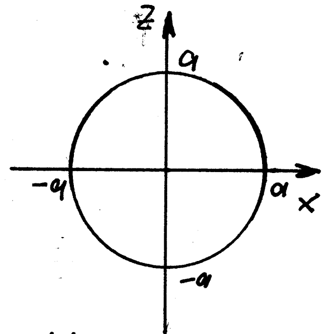
traženo rješenje

(izvod f-je u u tački T u datom smjeru)

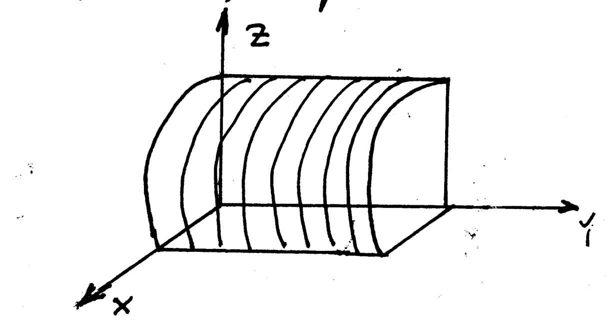
Neka je S površina tijela koje je dobijeno presjekom dva cilindra $S_1 = \{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+z^2=a^2,\ y\in R\}$ i $S_2 = \{(x,y,z)\in R^3 \mid y^2+z^2=a^2,\ x\in R\}$. Izračunati površinu dobijenog tijela.

Rj: $P=\iint\limits_S dS$ Skicirajmo S_1 i S_2, pa skicirajmo njihov presjek.

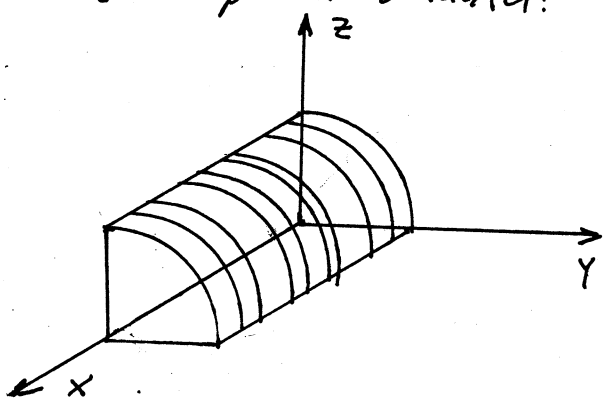
$S_1: x^2+z^2=a^2$ u ravni: xOz



U prostoru, u prvom oktantu:



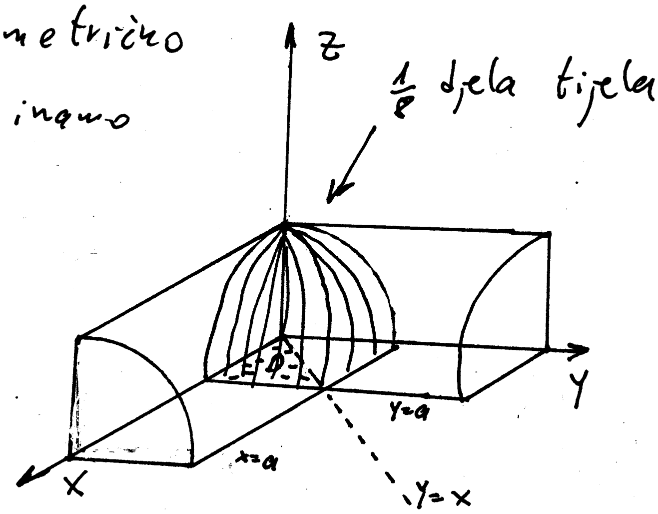
S_2 u prvom oktantu:



Presjek $S_1 \cap S_2$ će kao rezultat dati tijelo koje je simetrično u odnosu na sve tri ravni xOy, xOz i yOz.

$\frac{1}{8}$ dijela tijela će se nalaziti u prvom oktantu:

Primjetimo da je i ovo tijelo simetrično u odnosu na pravu $y=x$ pa imamo



$$P = \frac{1}{16}\iint\limits_D \sqrt{1+z'_x+z'_y}\,dx\,dy$$

gdje je $D: \begin{cases} 0\le x\le a \\ 0\le y\le x \end{cases}$

$z^2=a^2-x^2$ tj. $z=\sqrt{a^2-x^2}$.

$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $z'_y=0$ $\quad 1+(z'_x)^2+(z'_y)^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}$

tražena površina

$$P = 16a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dy = 16a\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} a^2-x^2=t \\ -2x\,dx=dt \\ x\,dx=-\frac{1}{2}dt \\ \ldots \end{array} \right| = \ldots = 16a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_a^0 = 16a^2$$

(#) Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Rj. Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ duž krive c je integral

$$C = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz .$$

U našem slučaju $\vec{v} = (x, y, x+y-1)$, dok je c dio prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.
Imamo krivolinijski integral druge vrste

$$C = \int_c x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$$

$A(1,1,1)$
$B(2,3,4)$

Kako glasi jednačina prave kroz dvije tačke u prostoru?

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \qquad (=t)$$

Napišimo pravu u parametarskom obliku:

$x = t+1$
$y = 2t+1$
$z = 3t+1$

Dio prave između tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ je za $t \in [0,1]$.

$dx = dt, \quad dy = 2\,dt, \quad dz = 3\,dt$

$$C = \int_0^1 (t+1)\,dt + (2t+1)\,2\,dt + (3t+1)\,3\,dt = \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (14t+6)\,dt = 14\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + 6t\Big|_0^1 = 7+6 = 13$$

vrijednost cirkulacije polja