Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0) = 1$, $P(1) = 4$, $P(2) = 15$, $P(-1) = 0$, $P(-2) = -5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

b) Koje od sljedećih binarnih operacija $a \circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a \circ b \overset{def}{=} a - b, \quad a \circ b \overset{def}{=} a^2 + b^2, \quad a \circ b \overset{def}{=} 2(a + b), \quad a \circ b \overset{def}{=} -a - b.$$

2. **a)**Metodom matematičke indukcije dokazati da $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za svaki prirodan broj n.

b) Neka je dat skup $G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$ takvo da $a^3 \overset{def}{=} e$ i $b^2 \overset{def}{=} e$. Dokazati da je $(G, \cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

3. Diskutovati rješenja sistema u ovisnosti o parametra λ:

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2 . \end{aligned}$$

4. Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeve.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0)=1$, $P(1)=4$, $P(2)=15$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

Rj:

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinom trećeg stepena

$$
\begin{aligned}
P(0)=1 &\Rightarrow d=1\\
P(1)=4 &\Rightarrow a+b+c+d=4\\
P(2)=15 &\Rightarrow 8a+4b+2c+d=15\\
P(-1)=0 &\Rightarrow -a+b-c+d=0\\
P(-2)=-5 &\Rightarrow -8a+4b-2c+d=-5
\end{aligned}
$$

$d=1$

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= 3 && (a)\\
8a+4b+2c &= 14 && (b)\\
-a+b-c &= -1 && (c)\\
-8a+4b-2c &= -6 && (d)
\end{aligned}
$$

$(a)+(c)$: $2b=2$

$b=1$

$$
\begin{aligned}
a+c &= 2\\
8a+2c &= 10\\
-a-c &= -2\\
-8a-2c &= -10
\end{aligned}
$$

$=$ $=$ $/:2$

$$
\begin{aligned}
a+c &= 2 && (I)\\
4a+c &= 5 && (II)
\end{aligned}
$$

$(II)-(I)$: $3a=3$

$a=1 \Rightarrow c=2-1=1$

Polinom trećeg stepena koji zadovoljava date uvjete je $P(x)=x^3+x^2+x+1$

(#) Koje od sljedećih binarnih operacija $a \circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a \circ b \overset{def}{=} a-b, \quad a \circ b \overset{def}{=} a^2+b^2, \quad a \circ b \overset{def}{=} 2(a+b), \quad a \circ b \overset{def}{=} -a-b$$

Rj:

Za operaciju $\circ$ kažemo da je asocijativna na skupu $\mathbb{Z}$ akko $\forall (a,b,c \in \mathbb{Z})\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Operacija je komutativna akko je $a \circ b = b \circ a$ za $\forall a,b \in \mathbb{Z}$.

1° $a \circ b \overset{def}{=} a-b$

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a \circ b) \circ c = (a-b) \circ c = (a-b)-c = a-b-c = a-(b+c) =$

$= a \circ (b+c)$

U ovom slučaju operacija nije asocijativna.

Da li je komutativna?

$$a \circ b = a-b = -b+a = -(b-a) = -(b \circ a)$$

Operacija nije ni komutativna.

2° $a \circ b \overset{def}{=} a^2+b^2$ $\quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a^2+b^2) \circ c = (a^2+b^2)^2 + c^2 = A \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (b^2+c^2) = a^2+(b^2+c^2)^2 = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \neq B$$

operacija nije asocijativna

$a \circ b = a^2+b^2 = b^2+a^2 = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

3° $a \circ b \overset{def}{=} 2(a+b)$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (2(a+b)) \circ c = 2(2(a+b)+c) = 4a+4b+2c \\ a \circ (b+c) &= a \circ (2(b+c)) = 2(a+2(b+c)) = 2a+4b+4c \end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a \circ b = 2(a+b) = 2(b+a) = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

4° $a \circ b \overset{def}{=} -a-b$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (-a-b) \circ c = -(-a-b)-c = a+b-c \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (-b-c) = -a-(b-c) = -a-b+c \end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a \circ b = -a-b = -b-a = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ za svaki prirodan broj n.

tj. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve brojeve k od 1 do n.

Tj. pretpostavimo da $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je tvrdnja tačna i za $n+1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ tj. dobili smo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je i trebalo dobiti.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Neka je dat skup $G=\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova? Napomena: $a^3 \overset{def}{=} e$, $b^2 \overset{def}{=} e$.

Rj.

ZATVORENOST

$\forall x,y \in G \quad x\cdot y \in G$

Napravimo multiplikativnu tabelu za ovaj skup (Kejlijevu tabelu)

$\cdot$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	ab	a^2b	e	a	a^2
ab	ab	a^2b	b	a	a^2	e
a^2b	a^2b	b	ab	a^2	e	a

$a^2\cdot a^2 = a^4 = a^3\cdot a = e\cdot a = a$

$a^2\cdot ab = a^3 b = e\cdot b = b$

$ba = ab$

$ba^2 = a^2 b$

$b\cdot ab = ab^2 = a$

$ab\cdot b = ab^2 = a\cdot e = a$

Iz tabele vidimo da je operacija obično množenje zatvorena.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z \in G \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

Da je operacija "obično" množenje asocijativno znamo od ranije.

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall x \in G \quad \exists e \in G \quad x\cdot e = e\cdot x = x$

Iz tabele vidimo da je neutralni element u ovom slučaju e.

INVERZNI ELEMENT

$\forall x \in G \quad \exists x' \in G \quad x\cdot x' = x'\cdot x = e$

Neutralni element za e je e.
Neutralni element za a je a^2.
Neutralni element za a^2 je a.
Neutralni element za b je b.
Neutralni element za ab je a^2b.
Neutralni element za a^2b je ab.

Svaki element iz G ima neutralni element.

$\Rightarrow (G,\cdot)$ je grupa
q.e.d.

KOMUTATIVNOST

$\forall x,y \in G \quad x\cdot y = y\cdot x$

Primjetimo da je tabela simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Operacija $\cdot$ jest komutativna. $(G,\cdot)$ je Abelova grupa

(#) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješiti sistem jednačina.

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda \\
x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2 .
\end{aligned}
$$

Rj. Riješimo sistem Cramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{I_k+(II_k+III_k)}} \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 3+\lambda & 1+\lambda & 1 \\ 3+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \frac{II_v - I_v}{III_v - I_v}$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\lambda^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1+\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \frac{II_k - I_k}{III_k - I_k} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 1-\lambda \\ \lambda^2 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} \underline{\underline{II_k - I_k}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1-\lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda - \lambda^3 = 2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2-\lambda^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{I_k - III_k}} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda^2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{III_v + I_v}} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2+1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 - 1) = \lambda(2\lambda - 1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \underline{\underline{I_k - II_k}} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \underline{\underline{II_v + I_v}} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1)$$

Diskusija

1° za $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -3$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$$

2° za $\lambda = -3$ imamo $D=0$ ali $D_x \neq 0$ pa sistem nema rješenja

3° za $\lambda = 0$ imamo $D = D_x = D_y = D_z = 0$ pa rješimo sistem na drugi način.

za $\lambda=0$ sistem postaje

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Odavdje vidimo (ZAŠTO?) da sistem za $\lambda=0$ nema rješenja.

(#) Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeva.

Rj.

Prisjetimo se, nenula vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor matrice A ako je $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ za neki skalar λ. U našem slučaju $\lambda\in\mathbb{C}$ (λ zovemo svojstvena vrijednost).

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix},\qquad \begin{aligned} A\vec{v}&=\lambda\vec{v}\\ A\vec{v}-\lambda\vec{v}&=\vec{0}\\ (A-\lambda I)\vec{v}&=\vec{0}\end{aligned}\quad \text{gdje je } I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2+4=9-6\lambda+\lambda^2+4=\lambda^2-6\lambda+13$$

$$\lambda^2-6\lambda+13=0$$

$$D=36-52=-16$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{6\pm 4i}{2}$$

Svojstvene vrijednost matrice A su $\lambda_1=3-2i$ i $\lambda_2=3+2i$

Za $\lambda_1=3-2i$ imamo

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}2i & 2\\ -2 & 2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}2i\,x_1+2\,x_2&=0\\ -2x_1+2ix_2&=0 \quad /\cdot i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2i\,x_1+2x_2&=0\\ -2i\,x_1-2x_2&=0\end{aligned}$$

$$2i\,x_1=-2x_2 \quad /:2$$
$$i\,x_1=-x_2$$
$$x_2=-i\,x_1$$

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}s\\ -is\end{bmatrix},\ s\neq 0$$ svojstveni vektori koji odgovaraju svojstv. vrij. λ_1

Za $\lambda_2=3+2i$ imamo

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}-2i & 2\\ -2 & -2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}-2ix_1+2x_2&=0 \quad /:2\\ -2x_1-2ix_2&=0\end{aligned}$$

$$-ix_1+x_2=0$$
$$x_2=ix_1$$

$$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}t\\ it\end{bmatrix},\ t\neq 0$$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_2.