Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 03.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru** (obe grupe)

1. Matematičkom indukcijom dokazati: $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$.

2. Matematičkom indukcijom dokazati: $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot n!$

3. Data je matrična jednačina $A(X-B)^{-1} = B^{-1}A$ i matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Koji uslov moraju zadovoljavati matrice A i B da bi data jednačina imala rješenje $X = 2B$?
b) Riješiti datu jednačinu ako matrice A i B ne zadovoljavaju uslov dobijen pod a) .

4. Neka je M skup matrica oblika $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c \in \mathbb{R})$. Koji uslov moraju zadovoljavati a,b,c da bi matrice iz M bile regularne? Za tako određeno a,b,c dokazati da skup M u odnosu na operaciju množenja matrica ima trukturu grupe. Da li je grupa abelova?

5. Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} ax_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9 \end{aligned}.$$

6. Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + ax_4 &= 9 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}.$$

7. Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$$

(determinanta ima n vrsta i n kolona).

Rj.

BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+2x^2+x^4-x^2 = 1+x^2+x^4$$

Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima k vrsta i k kolona

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2k}$$

gdje k uzima brojeve od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima $n+1$ vrstu i $n+1$ kolonu tačnije dokažimo da

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}.$$

Polazimo od determinante koja ima $(n+1)$-vrstu i $(n+1)$-kolonu:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \overset{\text{razvoj po prvoj}}{\underset{\text{koloni}}{=}} (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} =$$

(ova determinanta ima n vrsta i n kolona)

(ovu determinantu mogu razviti po prvoj vrsti i ostaće mi determinanta iz pretpostavke koja ima $n-1$ vrstu i $n-1$ kolonu)

$$\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} (1+x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2})$$

$$= (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) + (x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}) -$$

$$-(x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n-2}+x^{2n}) = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n+2}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

Rj. BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2 = (-1)^{2-1} \cdot 2!$$ Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & \dots & k & k \\ k & 2 & k & \dots & k & k \\ k & k & 3 & \dots & k & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \dots & k-1 & k \\ k & k & k & \dots & k & k \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot k!$$

tačna za sve brojeve od 1 do n $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za broj $n+1$ tj. dokažimo

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot (n+1)!$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{I_k - (N+1)_k} \begin{vmatrix} -n & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ 0 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ 0 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-n) \begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-n)(n+1) \begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & 1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} I_k - N_k \\ II_k - N_k \\ \vdots \\ (N-1)_k - N_k \end{array}$$

$$= (-1) \cdot n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & 1 \\ n & 2 & \dots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & 1 \\ n & n & \dots & n & 1 \end{vmatrix} = (-1)(n+1) \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & n \\ n & 2 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} \underset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} (-1)(n+1)(-1)^{n-1} \cdot n! = (-1)^n (n+1)!$$

$\boxed{\text{ZAKLJUČAK: Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve}}$

\# Data je matrična jednačina $A(X-B)^{-1}=B^{-1}A$ i matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \quad i \quad B=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}.$$

a) Koji uslov moraju zadovoljavat matrice A i B da bi data jednačina imala rješenje $X=2B$?

b) Riješiti datu jednačinu ako matrice A i B ne zadovoljavaju uslov dobijen pod a)

Rj. a) $A(X-B)^{-1}=B^{-1}A$

$X=2B$

$A\cdot B^{-1}=B^{-1}A$ uslov koji moraju zadovoljavati matrice A i B da bi data matrica imala rješenje $X=2B$.

Uslov možemo pisati i na drugi način:

$A=B^{-1}AB$

ili

$B=A^{-1}\cdot B\cdot A$

b)

$A(X-B)^{-1}=B^{-1}\cdot A \quad /\cdot(X-B)$ sa desne str

$B^{-1}A(X-B)=A \quad /\cdot B$ sa lijeve str.

$A(X-B)=BA \quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve str.

$X-B=A^{-1}BA$

$X=A^{-1}BA+B$

i odavdje možemo pročitati uslov koji smo dobili pod a)

(ako je $B=A^{-1}BA$ tada jednačina ima rješenje $X=2B$)

Provjerimo da li je $B=A^{-1}BA$.

Nađimo prvo A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \qquad A_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=2\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}, \qquad B\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\3&0&4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B\cdot A=2\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\3&0&4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-1&3&-1\\5&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

ovdje vidimo da matrice A i B ne zadovoljavaju uslov dobijen pod a)

$$X=A^{-1}BA+B=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-\frac{1}{2}&3/2&-1/2\\5/2&3/2&7/2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\3/2&5/2&-1/2\\11/2&1/2&11/2\end{bmatrix}$$

rješenje matrične jednačine

(#) Neka je M skup matrica oblika $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
Koji uslov moraju zadovoljavati a, b i c da bi matrice iz M bile regularne? Za tako određeno a, b i c dokazati da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe. Da li je grupa Abelova?

Rj.
Za matricu A kažemo da je regularna ako je $\det A \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} \overset{I_k + III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} a+b & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ a+b & 0 & a \end{vmatrix} \overset{I_v - III_v}{=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a \\ 0 & c & 0 \\ a+b & 0 & a \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} 0 & c \\ a+b & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a+b)c$$

Da bi matrice iz skupa M bile regularne potrebno je i dovoljno da je $a \neq \pm b$ i $c \neq 0$.
Za $a \neq \pm b$ i $c \neq 0$ pokažimo da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.

(a) zatvorenost: $\forall A, B \in M \;\; A \cdot B \in M$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$$

Kako je $c_1 \neq 0$ i $c_2 \neq 0 \Rightarrow c_1c_2 \neq 0$.
Da bi matrica $\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$ bila u skupu M potrebno je

još da je $a_1a_2 + b_1b_2 \neq \pm(a_2b_1 + a_1b_2)$ tj. $a_1a_2 + b_1b_2 \neq a_2b_1 + a_1b_2$
i $a_1a_2 + b_1b_2 \neq -a_2b_1 - a_1b_2$.

$a_1a_2 + b_1b_2 \neq a_2b_1 + a_1b_2$

$a_1a_2 - a_1b_2 \neq a_2b_1 + b_1b_2$

$a_1(a_2 - b_2) \neq b_1(a_2 - b_2)$

$a_1(a_2 - b_2) - b_1(a_2 - b_2) \neq 0$

$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \neq 0$

Ovo je tačno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ zato što je $a_1 \neq \pm b_1$ i $a_2 \neq \pm b_2$.

$a_1a_2 + b_1b_2 \neq -a_2b_1 - a_1b_2$

$a_1a_2 + a_1b_2 + b_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$

$a_1(a_2 + b_2) + b_1(a_2 + b_2) \neq 0$

$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \neq 0$

Ovo je tačno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ zato što je $a_1 \neq \pm b_1$ i $a_2 \neq \pm b_2$.

Prema tome skup M je zatvoren u odnosu na operaciju množenja.

(b) asocijativnost $\forall A,B,C\in M \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & 0 & a_1b_2+a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1+a_1b_2 & 0 & b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3+\cancel{a_3}b_1b_2+a_1b_2b_3+a_2b_1b_3 & 0 & a_1a_2b_3+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1 \\ 0 & c_1c_2c_3 & 0 \\ a_2a_3b_1+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_1a_2b_3 & 0 & a_2b_1b_3+a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_1a_2a_3 \end{bmatrix} \quad \ldots (*)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2a_3+b_2b_3 & 0 & a_2b_3+a_3b_2 \\ 0 & c_2c_3 & 0 \\ a_3b_2+a_2b_3 & 0 & b_2b_3+a_2a_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3+a_1b_2b_3+a_2b_1b_2+a_2b_1b_2 & 0 & a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_2a_3b_1 \\ 0 & c_1c_2c_3 & 0 \\ a_2a_3b_1+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_1a_2b_3 & 0 & a_2b_1b_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3+a_1a_2a_3 \end{bmatrix} \quad \ldots (*)$$

$(*) = (*)$ vrijedi zakon asocijativnosti.

(c) neutralni element $\forall A\in M \ \exists J\in M \quad A\cdot J = J\cdot A = A$, $J=\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$

određujemo J

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$ax+by=a \Rightarrow x=1 \quad y=0$

$bx+ay=b \Rightarrow x=1 \quad y=0$

$cz=c \Rightarrow z=1$

$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad x\neq \pm y \quad z\neq 0 \quad J\in M$

Neutralni element je jedinična matrica

(d) inverzni element $\forall A\in M \ \exists A^{-1}\in M \quad A\cdot A^{-1}=I \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$

Kako je matrica A regularna to postoji inverzna matrica.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{a}{a^2-b^2}, \quad y=\frac{-b}{a^2-b^2}$$

$$z=\frac{1}{c}$$

Kako je $z\neq 0$ i $x\neq\pm y$ to $\exists$ inverzni element

Prema tome skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.

Da li je grupa Abelova?

(e) komutativnost $\forall A,B\in M \quad A\cdot B = B\cdot A$

PROVJERITI SAMI $\quad$ Grupa jest Abelova.

(#) Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{A} = [A \,|\, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{II_v \leftrightarrow I_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{I_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array} \underset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{\substack{II_v - I_v \cdot 3 \\ III_v - I_v \cdot 2 \\ IV_v - I_v \cdot 4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9 \end{array}\right] \underset{II_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] \end{array} \underset{III_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{III_v - II_v \cdot 2 \\ IV_v - II_v \cdot 3}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Za $\lambda = 8$ imamo $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja.
2. promjenljive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$ $x_1 = s$

$$\begin{aligned} -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 2s + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 2s + 9 - 6t + 4t - 5$

$x_2 = 2s - 2t + 4$

Za $\lambda = 8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t, s \in \mathbb{R}$

b) Za $\lambda \neq 8$ imamo $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.
1. (jednu) promjenljivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$

$$\begin{aligned} (\lambda - 8)x_1 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 9 - 6t + 4t - 5 = -2t + 4$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9\\
6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7\\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5\\
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Rj: Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$
\overline{B} = [B \mid b] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12 & 7 & \lambda & 9\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array}
\overset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim}
\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \end{array}\right]
\underset{IV_v - I_v\cdot 4}{\overset{\substack{II_v - I_v\cdot 3\\ III_v - I_v\cdot 2}}{\sim}}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-8 & 1 \end{array}\right]
\underset{IV_v - II_v}{\overset{III_v - II_v}{\sim}}
\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 \end{array}\right]
$$

1° za $\lambda = 8$ imamo $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \overline{B} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1 = t$, $x_4 = s$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2\\
-x_3 + 0x_4 &= 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&x_3 = -1\\
&2t + 3x_2 - 2 + 2s = 2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
3x_2 &= 4 - 2t - 2s\\
x_2 &= \frac{2}{3}(2 - t - s)
\end{aligned}
$$

Rješenje sistema (za $\lambda = 8$) je $\left(t, \frac{2}{3}(2-t-s), -1, s\right)$ gdje su $s, t \in \mathbb{R}$.

2° za $\lambda \neq 8$ imamo $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \overline{B} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = t$.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2\\
-x_3 \qquad\qquad &= 1\\
(\lambda - 8)x_4 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&x_4 = 0\\
&x_3 = -1\\
&2x_1 + 3t - 2 = 2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 &= 4 - 3t\\
x_1 &= 2 - \frac{3}{2}t
\end{aligned}
$$

Rješenje sistema (za $\lambda \neq 8$) je $\left(2 - \frac{3}{2}t, t, -1, 0\right)$ gdje su $t \in \mathbb{R}$.

(#) Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

$(\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, v_i \in \mathbb{R}, \vec{v} \neq \vec{0})$

$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ Ovo je homogeni sistem, ima netrivijalna rješenja akko je $\det(A - \lambda I) = \vec{0}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -7-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v + II_v}{=\!=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-7-\lambda+6) = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$

Za $\lambda_1 = -3$ imamo:

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 \quad &= 0 \quad I \\ -6x_1 - 4x_2 \quad &= 0 \quad II \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \quad III \end{aligned}$$

$6x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{6}x_2$

$x_1 = -\frac{2}{3}x_2$

$III \Rightarrow +\frac{2}{3}x_2 - x_2 + 4x_3 = 0$

$4x_3 = \frac{1}{3}x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{12}x_2$

Svojstveni vektor $\vec{v_1} = (-\frac{2}{3}t, t, \frac{1}{12}t)$, $t \neq 0, t \in \mathbb{R}$ koji odgovara svojs. vr. λ_1

Za $\lambda_2 = -1$ imamo:

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 \quad &= 0 \quad (1) \\ -6x_1 - 6x_2 \quad &= 0 \quad (2) \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$x_1 = -x_2$

$(3) \Rightarrow x_2 - x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = 0$ Svojstveni vektor $\vec{v_2} = (-t, t, 0)$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -1$. $(t \neq 0, t \in \mathbb{R})$

Za $\lambda_3 = 1$ imamo:

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 0 \quad (a) \\ -6x_1 - 8x_2 &= 0 \quad (b) \\ -x_1 - x_2 &= 0 \quad (c) \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow x_1 = -x_2$

Jedino rješenje ovog sistema je $x_1 = x_2 = 0$

$x_3 \in \mathbb{R}$ je proizvoljan broj.

Svojstveni vektor $\vec{v_3} = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_3 = 1$.

(#) Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -1 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $B=\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -1 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ homogeni sistem

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -2 & -1\\ -1 & 6-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{I_v+II_v} \begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 0\\ -1 & 6-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{II_k-I_k} \begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 7-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda & 1\\ 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(35-12\lambda+\lambda^2-1)=(4-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+34)$$

$D=144-136$

$D=8$

$\lambda_{1,2}=\frac{12\pm 2\sqrt{2}}{2}$

$$\det(A-\lambda I)=(4-\lambda)(\lambda-6+\sqrt{2})(\lambda-6-\sqrt{2})$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1=4$, $\lambda_2=6-\sqrt{2}$, $\lambda_3=6+\sqrt{2}$.

Za $\lambda_1=4$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ $x_i\in\mathbb{R}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$

$x_1-2x_2-x_3=0 \quad (I)$

$-x_1+2x_2+x_3=0 \quad (II)$

$x_1+2x_2+x_3=0 \quad (III)$

$(II)+(III)$: $4x_2+2x_3=0 \quad /:2$

$x_3=-2x_2$

$(I) \Rightarrow x_1=2x_2+(-2x_2)=0$

Karakteristični vektor $\vec{v_1}=(0,t,-2t)$, $t\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$ koji odgovara $\lambda_1=4$

Za $\lambda_2=6-\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad \begin{bmatrix}-1+\sqrt{2} & -2 & -1\\ -1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & 2 & -1+\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, $\vec{v}\neq 0$

$(\sqrt{2}-1)x_1-2x_2-x_3=0 \quad (1)$

$-x_1+\sqrt{2}x_2+x_3=0 \quad (2)$

$x_1+2x_2+(\sqrt{2}-1)x_3=0 \quad (3)$

$(2)+(3)$: $(2+\sqrt{2})x_2+\sqrt{2}x_3=0$

$x_3=\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right)x_2$

$x_3=(-\sqrt{2}-1)x_2=(-1)(\sqrt{2}+1)x_2$

$(1) \Rightarrow (\sqrt{2}-1)x_1=2x_2+x_3=2x_2-(\sqrt{2}+1)x_2=(1-\sqrt{2})x_2=-(\sqrt{2}-1)x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_2}=(-t,\, t,\, (-1)(\sqrt{2}+1)t)$ koji odgovara kar. vr. $\lambda_2=6-\sqrt{2}$

Za $\lambda_3=6+\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad \begin{bmatrix}-1-\sqrt{2} & -2 & -1\\ -1 & -\sqrt{2} & 1\\ 1 & 2 & -1-\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, $\vec{v}\neq 0$

$(-1)(1+\sqrt{2})x_1-2x_2-x_3=0 \quad (I)$

$-x_1-\sqrt{2}x_2+x_3=0 \quad (II)$

$x_1+2x_2-(1+\sqrt{2})x_3=0 \quad (III)$

$(I)+(II)$: $-(2+\sqrt{2})x_1-(2+\sqrt{2})x_2=0$

$x_1=-x_2$

$(III) \Rightarrow x_2-(1+\sqrt{2})x_3=0$

$x_3=\frac{x_2}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}=(-1)(1-\sqrt{2})x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_3}=(-t,\, t,\, (-1)(1-\sqrt{2})t)$ koji odgovara kar. vr. $\lambda_3=6+\sqrt{2}$.