Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. (40%) **(a)** Neka su $x = 2a + 3$ i $y = 4a + 9$, $a \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi
I) dokazati da je broj $(x + y)(y - x)$ djeljiv sa 24;
II) odrditi ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.
Odgovore obrazložiti!

(60%) **(b)** Neka su (a, b) i (c, d) elementi iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definišimo relaciju $\leq$ na sljedeći način: $(a, b) \leq (c, d)$ akko je ili $a < c$ ili $(a = c$ i $b \leq d)$. Dokazati da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i da zadovoljava zakon trihotomije (prisjetimo se relacija $\leq \subseteq P \times P$ zadovoljava zakon trihotomije na nekom skupu P akko $\forall x, y \in P$ imamo $x \leq y$ ili $y \leq x$).

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda
$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

b) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu $\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda \ . \end{aligned}$$

4. Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Neka su $x=2a+3$; $y=4a+9$, $a\in\mathbb{N}$ prirodni brojevi.

a) dokazati da je broj $(x+y)(y-x)$ djeljiv sa 24;

b) odrediti ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.

Odgovore obrazložiti!

Rj. a) $(x+y)(y-x)=(2a+3+4a+9)(4a+9-2a-3)=(6a+12)(2a+6)=$

$$=6(a+2)\,2\cdot(a+3)=12(a+2)(a+3)$$

Posmatrajmo brojeve $12(a+2)(a+3)$ i 24.

Ako je a paran broj $(a=2k$ (za neko $k\in\mathbb{N}$)) tada

$$12(2k+2)(2k+3)=24(k+1)(2k+3)$$

pa je $(x+y)(y-x)$ djeljiv sa 24.

Ako je a neparan broj ($a=2k+1$ za neko $k\in\mathbb{N}$) tada

$$12(a+2)(a+3)=12(2k+1+2)(2k+1+3)=\underbrace{12\cdot 2}_{=24}(2k+3)(k+2)$$

pa je i u ovom slučaju $(x+y)(y-x)$ djeljivo sa 24.

Broj $(x+y)(y-x)$ je djeljiv sa 24.

b) $y:x=(4a+9):(2a+3)=\dfrac{4a+9}{2a+3}=\dfrac{2a+3+2a+3+3}{2a+3}=2+\dfrac{3}{2a+3}$

Ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x je 3 (ostatak je uvijek cio broj), dok je izraz $\dfrac{3}{2a+3}$ decimalni dio broja $\dfrac{y}{x}$.

II način:

$$\begin{array}{l} (4a+9):(2a+3)=2 \\ \underline{-\;4a+6} \\ \quad\;\; 3 \end{array}$$

ostatak je 3.

(#) Neka su (a,b) i (c,d) elementi iz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definišimo $(a,b)\le(c,d)$ ako je ili $a<c$ ili ($a=c$ i $b\le d$).
Dokazati da je relacija $\le$ relacija totalnog poretka.

Rj.

Za relaciju $\le$ kažemo da je relacija totalnog poretka na nekom skupu P akko je $\le\subseteq P\times P$ tako da $\forall x,y,z\in P$ zadovoljava
a) $x\le x$ (refleksivnost);
b) $x\le y$ i $y\le x$ povlači $x=y$ (antisimetričnost);
c) $x\le y$ i $y\le z$ povlači $x\le z$ (tranzitivnost) i
d) $x\le y$ ili $y\le x$ (zakon trihotomije)

REFLEKSIVNOST

$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\quad (a,a)\le(a,a)$

po naŠoj definiciji relacije $\le$ ili je $a<a$ ili je $a=a$ i $a\le a$
kako važi $a=a$ i $a\le a$ relacija $\le$ jest refleksivna

ANTISIMETRIČNOST

$\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\quad (a,b)\le(c,d)$ i $(c,d)\le(a,b)\Rightarrow(a,b)=(c,d)$

$(a,b)\le(c,d)\overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $a<c$ ili ($a=c$ i $b\le d$)

$(c,d)\le(a,b)\overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $c<a$ ili ($c=a$ i $d\le b$) ...(2)

Kako istovremeno ne može biti $a<c$ i neka tvrdnja iz (2) to mora biti $a=c$ i $b=d$ tj. $(a,b)=(c,d)$

Relacija $\le$ je antisimetrična.

Relacija $\le$ je relacija totalnog poretka q.e.d

TRANZITIVNOST

$\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\quad (a,b)\le(c,d)$ i $(c,d)\le(e,f)\Rightarrow(a,b)\le(e,f)$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\le(c,d)\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee a=c \text{ i } b\le d\\ (c,d)\le(e,f)\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} c<e \vee c=e \text{ i } d\le f\end{array}\right\}\Rightarrow a<e\vee a=e \text{ i } b\le f$$

Relacija $\le$ je tranzitivna

TRIHOTOMIJA

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\le(c,d)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee b\le d \text{ i } a=c\\ (c,d)\le(a,b)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c<a \vee d\le b \text{ i } c=a\end{array}\right\}\Rightarrow (a,b)\le(c,d) \text{ ili } (c,d)\le(a,b)$$

Važi zakon trihotomije

Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Rj. Izračunajmo prvo determinante trećeg i četvrtog tipa.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x+1) + (x+1) = (x^2+1)(x+1) = x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{II_v + I_v}{=}$$

$$= x^3(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3(x+1) + \underbrace{\overset{x^2+x+1}{\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}}}_{\text{determinanta drugog tipa}} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} \overset{\text{razvijamo po prvoj koloni}}{=} (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{II_v + I_v}{=} x^{n-1}(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}(x+1) + \underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}}_{\text{naša determinanta } (n-2)\text{gog tipa}} =$$

$$= x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$$ ← Tražena vrijednost determinante

II način MATEM. INDUKCIJOM

(#) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rj.
$$M \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

Da li je skup M zatvoren? $(\forall A,B \in M \ \ A\cdot B \in M)$

$$A = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ac\underline{-ad}\underline{+ad}-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

Vidimo da $A\cdot B \in M \Rightarrow$ množenje matrica je zatvoreno u M

Da li je množenje u skupu M asocijativno? $(\forall A,B,C \in M \ \ (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C))$

$$(A\cdot B)\cdot C = \left(\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ace & ace\underline{\underline{-acf}}\underline{\underline{+acf}}-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace & ace-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ce & ce-df \\ 0 & df \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix} \right)$$

Množenje u M je asocijativno

Da li u M postoji neutralni element? $(\forall A \in M \ \exists E \in M \ \ A\cdot E = E\cdot A = A)$

Matrica $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pripada skupu M i očigledno $A\cdot E = E\cdot A = A \ \ \forall A \in M$

Postoji neutralni element u M.

Da li u M postoji inverzni element? $(\forall A \in M \ \exists A^{-1} \in M \ \ A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E)$

$$A\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_1-e_2 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} ae_1 = 1 &\Rightarrow e_1 = \tfrac{1}{a} \\ be_2 = 1 &\Rightarrow e_2 = \tfrac{1}{b} \end{aligned}$$

Prema tome $\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \Rightarrow$ M ima inverzni element.

ZA VJEŽBU POKAZATI DA JE MNOŽENJE KOMUTATIVNO U M.

Prema tome množenje matrica čini skup M Abelovom grupom.

(#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned}
5x_1-3x_2+2x_3+4x_4&=3\\
4x_1-2x_2+3x_3+7x_4&=1\\
3x_1-6x_2-x_3-5x_4&=9\\
7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda
\end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c}5&-3&2&4&3\\4&-2&3&7&1\\3&-6&-1&-5&9\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right]\underset{I_v\leftrightarrow III_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}3&-6&-1&-5&9\\4&-2&3&7&1\\5&-3&2&4&3\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right]$$

$$\underset{I_k\leftrightarrow III_k}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_3&x_2&x_1&x_4\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&3&-5&9\\3&-2&4&7&1\\2&-3&5&4&3\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right]\end{array}\underset{\substack{II_v+I_v\cdot 3\\ III_v+I_v\cdot 2\\ IV_v+I_v\cdot 7}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&3&-5&9\\0&-20&13&-8&28\\0&-15&11&-6&21\\0&-45&28&-18&\lambda+63\end{array}\right]$$

$$\underset{II_v:(-4)}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&3&-5&9\\0&5&-\frac{13}{4}&2&-7\\0&-15&11&-6&21\\0&-45&28&-18&\lambda+63\end{array}\right]\underset{\substack{III_v+II_v\cdot 3\\ IV_v+II_v\cdot 9}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&3&-5&9\\0&5&-\frac{13}{4}&2&-7\\0&0&\frac{5}{4}&0&0\\0&0&-\frac{5}{4}&0&\lambda\end{array}\right]$$

$$\underset{III_k\leftrightarrow IV_k}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_3&x_2&x_4&x_1\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&-5&3&9\\0&5&2&-\frac{13}{4}&-7\\0&0&0&\frac{5}{4}&0\\0&0&0&-\frac{5}{4}&\lambda\end{array}\right]\end{array}\underset{III_v+IV_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&-6&-5&3&9\\0&5&2&-\frac{13}{4}&-7\\0&0&0&\frac{5}{4}&0\\0&0&0&0&\lambda\end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda\neq 0$ $\quad \operatorname{rang} A<\operatorname{rang}\bar{A} \Rightarrow$ sistem nema rješenja

2° $\lambda=0$ $\quad \operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}<4 \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja (jednu promjenjivu ćemo uzeti proizvoljno)

$$\begin{aligned}
-x_3-6x_2-5x_4+3x_1&=9\\
5x_2+2x_4-\tfrac{13}{4}x_1&=-7\\
\tfrac{5}{4}x_1&=0 \quad\Rightarrow x_1=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-x_3-6x_2-5x_4&=9 \quad /\cdot 2\\
5x_2+2x_4&=-7 \quad /\cdot 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2x_3-12x_2-10x_4&=18\\
+\quad 25x_2+10x_4&=-35\\
\hline
-2x_3+13x_2&=-17, \qquad x_2=s
\end{aligned}$$

$x_3=\frac{13s+17}{2}$

$2x_4=-5x_2-7 \Rightarrow x_4=\frac{-5s-7}{2}$

Rješenje sistema je $\left(0,s,\frac{13s+17}{2},\frac{-5s-7}{2}\right)$ SGR

(#) Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, gdje je $\vec{v} \neq \vec{0}$

$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, gdje je $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ je homogeni sistem linearnih jednačina, i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I) = 0$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + (II_k + III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 3-\lambda & 5-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{=\!=\!=}} (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su 2, 3 i 6.

Za $\lambda = 2$ imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (1) \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \quad (2) \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1) \equiv (3)$

$(1)+(2)$: $2x_2 = 0$, $x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 0$

$x_3 = s \Rightarrow x_1 = -s$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ odgovara svojstveni vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$

Za $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \quad (a) \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad (b) \\ x_1 - x_2 \qquad &= 0 \quad (c) \end{aligned}$$

$\left.\begin{aligned} (a) &\Rightarrow x_2 = x_3 \\ (c) &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 3$ odgovara svojs. vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

Za $\lambda = 6$ imamo

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (I) \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \quad (II) \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

$(II)+(I)$: $-4x_1 - 2x_2 = 0 \quad /:2$

$(III)+(I)\cdot 3$: $-8x_1 - 4x_2 = 0$

$x_2 = -2x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$

Svojs. vrijednosti $\lambda = 6$ odgovara sv. vektor

$\vec{v} = \begin{bmatrix} l \\ -2l \\ l \end{bmatrix}$, $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$