Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 30.06.2011.

1. (40%) **(a)** Neka su $x = 2a + 3$ i $y = 4a + 9$, $a \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi

I) dokazati da je broj $(x + y)(y - x)$ djeljiv sa 24;

II) odrditi ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.

Odgovore obrazložiti!

(60%) **(b)** Neka su (a, b) i (c, d) elementi iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definišimo relaciju $\leq$ na sljedeći način: $(a, b) \leq (c, d)$ akko je ili $a < c$ ili ($a = c$ i $b \leq d$). Dokazati da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i da zadovoljava zakon trihotomije (prisjetimo se relacija $\leq \subseteq P \times P$ zadovoljava zakon trihotomije na nekom skupu P akko $\forall x, y \in P$ imamo $x \leq y$ ili $y \leq x$).

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

b) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu $\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda\ . \end{aligned}$$

4. Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 30.06.2011.

1. (40%) **(a)** Neka su $x = 2a + 3$ i $y = 4a + 9$, $a \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi

I) dokazati da je broj $(x + y)(y - x)$ djeljiv sa 24;

II) odrditi ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.

Odgovore obrazložiti!

(60%) **(b)** Neka su (a, b) i (c, d) elementi iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definišimo relaciju $\leq$ na sljedeći način: $(a, b) \leq (c, d)$ akko je ili $a < c$ ili ($a = c$ i $b \leq d$). Dokazati da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i da zadovoljava zakon trihotomije (prisjetimo se relacija $\leq \subseteq P \times P$ zadovoljava zakon trihotomije na nekom skupu P akko $\forall x, y \in P$ imamo $x \leq y$ ili $y \leq x$).

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

b) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu $\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda\ . \end{aligned}$$

4. Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.