

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 15.06.2011.

1. a) Neka su dati skupovi $A = \{10k + 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{4p + 13 \mid p \in \mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A \cap B \neq \emptyset$.
 b) Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Neka je $\rho \subseteq A \times A$ zadana ovako $\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, b), (d, d), (d, e), (e, e), (e, d), (f, f)\}$. Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A .

2. a) Izračunati determinantu n -tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

b) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra t

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 \\ x + 2y - 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8. \end{aligned}$$

4. Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \text{ i } x_5 = 0\}$. Sabiranje u V je definisano na uobičajen način $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ kao i množenje sa skalarom $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$. Dokažite da je V vektorski prostor te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 15.06.2011.

1. a) Neka su dati skupovi $A = \{10k + 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{4p + 13 \mid p \in \mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A \cap B \neq \emptyset$.
 b) Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Neka je $\rho \subseteq A \times A$ zadana ovako $\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, b), (d, d), (d, e), (e, e), (e, d), (f, f)\}$. Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A .

2. a) Izračunati determinantu n -tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

b) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra t

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 \\ x + 2y - 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8. \end{aligned}$$

4. Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \text{ i } x_5 = 0\}$. Sabiranje u V je definisano na uobičajen način $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ kao i množenje sa skalarom $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$. Dokažite da je V vektorski prostor te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.