**Univerzitet u Zenici**
**Pedagoški fakultet**
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

**1.** **a)** Dati su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz $A$ u $B$. Koje od napisanih relacija su funkcije (preslikavanja)? Koje od napisanih funkcija su bijekcije?

**b)** Dat je polinom $f(x) = (b - a)x^n + 2^n a - b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Odrediti $a$ i $b$ tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2 - 3x + 2$ bude $(2^n - 1)x$.

**2.** Neka je $S = \{(1, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ i neka je na $S$ definisana binarna operacija zvjezdica $*$ sa $(1, a) * (1, b) = (\alpha, a + b + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
**a)** Odrediti vrijednost parametra $\alpha$ tako da skup $S$ bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.
**b)** Za dobijenu vrijednost parametra $\alpha$ pokazati da je $(S, *)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

**3.** Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra $\lambda$:

$$\begin{array}{rl} x_1 - x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 6x_1 \qquad - x_3 \qquad - 2x_5 &= 3 \\ 4x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= \lambda \end{array}.$$

**4.** Odrediti $t$ tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno $t$ odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice $M$ i svojstvene vektore.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Dati su skupovi $A=\{a,b\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz $A$ u $B$. Koje od napisanih relacija su f-je (preslikavanja)? Koje od napisanih f-ja su bijekcije?

Rj.

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

Binarna relacija je podskup od $A\times B$.

Binarne relacije ću označiti sa $\rho_1, \rho_2, \dots$

Binarne relacije su

$\rho_1=\emptyset$

$\rho_2=\{(a,1)\}$

$\rho_3=\{(a,2)\}$

$\rho_4=\{(b,1)\}$

$\rho_5=\{(b,2)\}$

$\rho_6=\{(a,1),(a,2)\}$

$\rho_7=\{(a,1),(b,1)\}$

$\rho_8=\{(a,1),(b,2)\}$

$\rho_9=\{(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{10}=\{(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{11}=\{(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{12}=\{(a,1),(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{13}=\{(a,1),(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{14}=\{(a,1),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{15}=\{(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{16}=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

F-je (preslikavanja) su: $\rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}$.

Bijekcije su: $\rho_8, \rho_9$.

(#) Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$, $a,b\in\mathbb{C}$. Odrediti $a$ i $b$ tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2-3x+2$ bude $(2^n-1)x$.

Rješenje

$f(x)$ je djeljiv sa $x-c$ akko je $f(c)=0$.
Ako $f(x)$ nije djeljiv sa $x-c$ ostatak pri djeljenju $f(x)$ sa $x-c$ iznosi $f(c)$.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b \longrightarrow f(1)=b-a+2^n a-b=2^n a-a=(2^n-1)a$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$f(2)=(b-a)2^n+2^n a-b=$$
$$=b2^n\underset{\sim\sim}{-a2^n}\underset{\sim\sim}{+2^n a}-b=$$
$$=2^n b-b=(2^n-1)b$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=(2^n-1)a\\ f(2)&=(2^n-1)b\end{aligned}\right\}\ \ldots(1)$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=2^n-1\\ f(2)&=(2^n-1)\cdot 2\end{aligned}\right\}\ \ldots(2)$$

$$(1)\ i\ (2)\ \Rightarrow\ \begin{aligned} a&=1\\ b&=2\end{aligned}$$

tražene vrijednosti

(#) Neka je $S=\{(1,a) \mid a\in\mathbb{Q}\}$ i neka je na $S$ definisana binarna operacija $*$ sa $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Odrediti vrijednost parametra $\alpha$ tako da skup $S$ bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.

b) Za dobijenu vrijednost parametra $\alpha$ pokazati da je $(S,*)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

Rj. a) $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$

Nama treba $\alpha$ t.d. $(\alpha, a+b+1)\in S$

$a+b+1\in\mathbb{Q}$. Prema tome $\alpha=1$.

b) Zatvorenost je zadovoljena (iz a)). Pokažimo da je operacija $*$ asocijativna, da $\exists$ inverzni i neutralni element.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z\in S \quad (x*y)*z=x*(y*z)$

Uzmimo tri proizvoljna elementa iz $S$, $(1,a),(1,b),(1,c)\in S$

$$\left.\begin{array}{l}((1,a)*(1,b))*(1,c)=(1,a+b+1)*(1,c)=(1,a+b+1+c+1)=(1,a+b+c+2)\\(1,a)*((1,b)*(1,c))=(1,a)*(1,b+c+1)=(1,a+b+c+1+1)=(1,a+b+c+2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow *$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(1,a)\in S \quad \exists(1,a')\in S$ t.d. $(1,a)*(1,a')=(1,a) \Rightarrow (1,a+a'+1)=(1,a)$

$(1,a')*(1,a)=(1,a) \Rightarrow (1,a'+a+1)=(1,a)$

Neutralni element je $(1,-1)\in S$

INVERZNI ELEMENT

$\forall(1,a)\in S \quad \exists(1,a^*)\in S$ t.d. $(1,a)*(1,a^*)=(1,-1)$

$(1,a^*)*(1,a)=(1,-1)$

$(1,a)*(1,a^*)=(1,-1)$

$(1,a+a^*+1)=(1,-1)$

$a+a^*+1=-1 \Rightarrow a^*=-a-2$

Inverzni element elementa $(1,a)$ je $(1,-a-2)$.

$(S,*)$ jest grupa.

Da li vrijedi KOMUTATIVNOST?

$(1,a)*(1,b)=(1,a+b+1)$

$(1,b)*(1,a)=(1,b+a+1)$

DA. Grupa jest Abelova.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra $\lambda$:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2\\
6x_1 \qquad - x_3 \qquad - 2x_5 &= 3\\
4x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= \lambda .
\end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom.

$$\overline{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{II_v \leftrightarrow I_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{I_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{IV_v + II_v \cdot (-2)}{\overset{III_v + II_v \cdot (-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6 \end{array}\right]$$

$$\underset{IV_v \leftrightarrow V_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6\\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6 \end{array}\right] \underset{IV_v + III_v \cdot (-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-2\lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

$1^\circ$ $\lambda = 3$ $\quad \text{rang } A = \text{rang } \overline{A} = 3 < 5 \Rightarrow$ Sistem ima $\infty$ mnogo rješenja

2 promjenljive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$, $x_5 = s$

$$x_3 + 6x_4 - 10x_5 = -3 \qquad\qquad 2x_1 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 3 \qquad\qquad x_2 + x_1 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2$$

$$x_3 = -6t + 10s - 3 \qquad\qquad 2x_1 = -6t + 10s - 3 + 4t - 6s + 3 \qquad\qquad x_2 = t - 2s - 6t + 10s - 3 + 3t - 4s + 2$$

$$2x_1 = -2t + 4s$$

$$x_1 = -t + 2s \qquad\qquad x_2 = -2t + 4s - 1$$

Rješenje sistema je $(-t+2s, -2t+4s-1, -6t+10s-3, t, s)$

$2^\circ$ $\lambda \neq 3$ $\quad \text{rang } A = 3 < 4 = \text{rang } \overline{A}$ $\quad$ sistem nema rješenja

(#) Odrediti $t$ tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.

Za dobijeno $t$ odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice $M$ i svojstvene vektore.

Rj. Nenula vektor $\vec{v}$ zovemo svojstveni vektor od $M$ ako je

$$M\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

za neki skalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$M\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$

$(M - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & t \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina. On ima ∞ mnogo rješenja akko $\det(M-\lambda I) = 0$.

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & t \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & t \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-2 \underline{-2\lambda + \lambda} + \lambda^2 - 6t) = (5-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6t - 2)$$

Trebamo naći $t$ takvo da je 3 nula polinoma $\lambda^2 - \lambda - 6t - 2 = 0$

Za $\lambda = 3$: $9 - 3 - 6t - 2 = 0$

$-6t + 4 = 0$

$6t = 4$

$t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tražena vrijednost za $t$

$-6t - 2 = -6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = -4 - 2 = -6$

$$\det(M - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Svojstvene vrijednosti matrice $M$ su $-2$, $3$ i $5$.

Za $\lambda_1 = -2$ imamo $(M + 2I)\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2/3 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7v_1 \quad\quad\quad &= 0 \\ v_1 + 4v_2 + \tfrac{2}{3}v_3 &= 0 \\ 3v_1 + 6v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_1 = 0$

$4v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 0$ (1)

$6v_2 + v_3 = 0$ (2)

(1)·3: $12v_2 + 2v_3 = 0$

(2)·2: $12v_2 + 2v_3 = 0$

$v_3 = -6v_2$

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -6s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -2$

Za $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2/3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 \quad\quad\quad &= 0 \\ v_1 - v_2 + \tfrac{2}{3}v_3 &= 0 \quad /\cdot 6 \\ 3v_1 + 6v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_1 = 0$

$-6v_2 + 4v_3 = 0$

$6v_2 - 4v_3 = 0$

$6v_2 = 4v_3$

$v_2 = \frac{4}{6}v_3 = \frac{2}{3}v_3$

$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 3$

Za $\lambda_3 = 5$:

$v_1 - 3v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 0 \quad /\cdot 3$

$3v_1 + 6v_2 - 6v_3 = 0$

$3v_1 - 9v_2 + 2v_3 = 0$

$3v_1 + 6v_2 - 6v_3 = 0 \quad -$

$-15v_2 + 8v_3 = 0$

$v_2 = \frac{8}{15}v_3$

$3v_1 - \cancel{9}^{3} \cdot \frac{8}{\cancel{15}_{5}} v_3 + 2v_3 = 0$

$3v_1 = \frac{14}{5}v_3$

$v_1 = \frac{14}{15}v_3$

$\vec{v_3} = \begin{bmatrix} \frac{14}{15}s \\ \frac{8}{15}s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara $\lambda_3$