Za svaku od sljedećih relacija, koje su definisane na skupu $S=\{0,1,2,3\}$, odrediti koju od osobina refleksivnost (R), anti-refleksivnost (AR), simetričnost (S), antisimetričnost (AS) i tranzitivnost (T) date relacije zadovoljavaju:

a) $(m,n)\in R_1$ ako $m+n=3$

b) $(m,n)\in R_2$ ako $\max\{m,n\}=3$

(Prisjetimo se: Relacija $\rho\subseteq S\times S$ je antisimetrična na skupu S akko $\forall x,y\in S$ $(x,y)\in\rho \wedge (y,x)\in\rho \Rightarrow x=y$.
Relacija $\rho\subseteq S\times S$ je antirefleksivna na skupu S akko $(x,x)\notin\rho$ (drugim riječima $\cancel{x\rho x}$) za $\forall x\in S$.)

R: a) $S=\{0,1,2,3\}$

$\forall m,n\in S$ $(m,n)\in R_1$ ako $m+n=3$

$\boxed{R_1=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}}$

REFLEKSIVNOST ($\forall m\in S$ $(m,m)\in R_1$)

$\forall m\in S$ $\overset{\text{treba biti}}{m+m=3}$ → ovo nije tačno za svaki $m\in\{0,1,2,3\}$.
(mi imamo $\forall m\in S$ $m+m\neq 3$) Tačnije nije tačno ni za jedan $m\in\{0,1,2,3\}$

nije (R), (ali je zato (AR))

ANTIREFLEKSIVNOST ($\forall m\in S$ $(m,m)\notin R_1$)

$0+0=0$, $1+1=2$, $2+2=4$, $3+3=6$, $m+m\neq 3$ $\forall m\in S$ jest (AR).

SIMETRIČNOST ($\forall m,n\in S$ $(m,n)\in R_1 \Rightarrow (n,m)\in R_1$).

$(1,2)\in R_1 \Rightarrow (2,1)\in R_1$; $(2,1)\in R_1 \Rightarrow (1,2)\in R_1$

$(0,3)\in R_1 \Rightarrow (3,0)\in R_1$; $(3,0)\in R_1 \Rightarrow (0,3)\in R_1$ jest (S)

ANTISIMETRIČNOST ($\forall m,n\in S$ $(m,n)\in R_1 \wedge (n,m)\in R_1 \Rightarrow m=n$)

$\left.\begin{array}{l} 1+2=3 \Leftrightarrow (1,2)\in R_1 \\ 2+1=3 \Leftrightarrow (2,1)\in R_1 \end{array}\right\}$ ali odavde ne slijedi $1=2$

nije (AS)

TRANZITIVNOST ($\forall m,n,p\in S$ $(m,n)\in R_1 \wedge (n,p)\in R_1 \Rightarrow (m,p)\in R_1$)

$\left.\begin{array}{l} 1+2=3 \Leftrightarrow (1,2)\in R_1 \\ 0+3=3 \Leftrightarrow (0,3)\in R_1 \end{array}\right\}$ ali $(1,3)\notin R_1$ nije (T).

b) $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$(m,n) \in R_2$ ako $\max\{m,n\} = 3$

$R_2 = \{(0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

REFLEKSIVNOST ($\forall m \in S \ (m,m) \in R_2$)

Nije refleksivna, npr. $\max\{1, 1\} = 1 \Rightarrow (1,1) \notin R_2$

nije (R)

ANTIREFLEKSIVNOST ($\forall m \in S \ (m,m) \notin R_2$)

Nije antirefleksivna, npr. $\max\{3, 3\} = 3 \Rightarrow (3,3) \in R_2$

nije (AR)

SIMETRIČNOST ($\forall m,n \in S \ (m,n) \in R_2 \Rightarrow (n,m) \in R_2$)

$\max\{0, 3\} = 3 \Leftrightarrow \max\{3, 0\} = 3$

$\max\{1, 3\} = 3 \Leftrightarrow \max\{3, 1\} = 3$

$\max\{2, 3\} = 3 \Leftrightarrow \max\{3, 2\} = 3$

R_2 jest (S) relacija

ANTISIMETRIČNOST ($\forall m,n \in S \ (m,n) \in R_2 \wedge (n,m) \in R_2 \Rightarrow m = n$)

$\left.\begin{array}{l} \max\{2,3\} = 3 \Leftrightarrow (2,3) \in R_2 \\ \max\{3,2\} = 3 \Leftrightarrow (3,2) \in R_2 \end{array}\right\}$ ali odavde ne slijedi da je $3 = 2$

nije (AS)

TRANZITIVNOST ($\forall m,n,p \in S \ (m,n) \in R_2 \wedge (n,p) \in R_2 \Rightarrow (m,p) \in R_2$)

$\left.\begin{array}{l} \max\{0,3\} = 3 \Leftrightarrow (0,3) \in R_2 \\ \max\{3,2\} = 3 \Leftrightarrow (3,2) \in R_2 \end{array}\right\}$ ali odavde ne slijedi da je $(0,2) \in R_2$

$\max\{0,2\} = 2 \neq 3$

nije (T).

Dokazati da je polinom $p_{2n+1}(x)=(x+a+b)^{2n+1}-x^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}$ djeljiv sa $\frac{p_3(x)}{3(a+b)}$ za svaki $n\in N$.

Rj.:

$$p_{2n+1}(x)=(x+a+b)^{2n+1}-x^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}$$

za $n=1$ imamo $p_3(x)=(x+a+b)^3-x^3-a^3-b^3$

Rastavimo polinom $p_3(x)$ na faktore (prije toga možemo li primijetiti da je $p_3(x)$ polinom drugog stepena i da su njegove nule $-a$ i $-b$?)

$$p_3(x)=(x+a+b)^3-x^3-a^3-b^3=$$
$$=\cancel{x^3}+3x^2(a+b)+3x(a+b)^2+(a+b)^3-\cancel{x^3}-\underbrace{(a^3+b^3)}_{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=$$
$$=(a+b)\left[3x^2+3xa+3xb+a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2\right]$$
$$=3(a+b)(\underbrace{x^2+xa}_{x(x+a)}+\underbrace{xb+ab}_{b(x+a)})=3(a+b)(x+a)(x+b)$$

$$p_3(x)=3(a+b)(x+a)(x+b) \Rightarrow \frac{p_3(x)}{3(a+b)}=(x+a)(x+b)$$

Prema posljedici Bazuove teoreme $p_{2n+1}(x)$ je djeljiv sa $x-c$ akko je c korijen polinoma $p_{2n+1}(x)$.

$$p_{2n+1}(-a)=(-a+a+b)^{2n+1}-(-a)^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}=0, \quad \forall n\in N$$
$$p_{2n+1}(-b)=(-b+a+b)^{2n+1}-(-b)^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}=0, \quad \forall n\in N$$

Prema tome $p_{2n+1}(x)$ je djeljiv sa $(x+a)(x+b)$ $\forall n\in N$.

q.e.d.

(#) Za koje vrijednosti parametra λ (lambda) rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

iznosi: a) 1; b) 2; c) 3?

Rj.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{bmatrix} \overset{III_k \leftrightarrow IV_k}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \overset{III_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = -3$ rang matrice A je 2

Za $\lambda \neq -3$ rang matrice A je 3

Rang matrice A bez obzira na vrijednost parametra λ ne može biti 1.

(#) Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva, i neka je na skupu $\mathbb{R}$ definisana operacija $*$ sa

$$x * y = xy + 2(x+y+1) \quad \text{za } \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Ispitati da li je $(\mathbb{R}, *)$ grupa.

Rj. Da bi uređen par $(\mathbb{R}, *)$ bio grupa operacija $*$ mora biti zatvorena, asocijativna, a u $\mathbb{R}$ mora postojati neutralni i inverzni element.

ZATVORENOST $(\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x*y \in \mathbb{R})$

Uzmimo proizvoljno $x,y \in \mathbb{R}$. Imamo

$$x*y = \underbrace{xy}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(x+y+1)}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow x*y \in \mathbb{R}.$$ $*$ jest zatvorena

ASOCIJATIVNOST $(\forall x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x*y)*z = x*(y*z))$

Uzmimo tri proizvoljna $x,y,z \in \mathbb{R}$

$$(x*y)*z = (xy + 2(x+y+1))*z = xyz + 2(x+y+1)z + 2(xy + 2(x+y+1) + z + 1)$$
$$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4(x+y+1) + 4z + 2$$
$$= xyz + 2(xy + xz + yz) + 4(x+y+z+1) + 2 \quad \dots (\circledast)$$

$$x*(y*z) = x*(yz + 2(y+z+1)) = xyz + 2x(y+z+1) + 2(x + yz + 2(y+z+1) + 1)$$
$$= xyz + \underline{2xy} + \underline{2xz} + 2x + \underline{2yz} + 2x + 4(y+z+1) + 2$$
$$= xyz + 2(xy + xz + yz) + 4(x+y+z+1) + 2 \quad \dots (\circledast\circledast)$$

$(\circledast) = (\circledast\circledast) \Rightarrow *$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT $(\forall x \in \mathbb{R} \ \exists e \in \mathbb{R} \quad x*e = e*x = x)$

$x*e = xe + 2(x+e+1)$ tj. $x*(-1) = -x + 2(x-1+1)$
Nije teško vidjeti da je $e=-1$ $\qquad = -x + 2x = x$

$e=-1$ je neutralni element.

INVERZNI ELEMENT $(\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x' \in \mathbb{R} \quad x*x' = x'*x = -1)$

$$\left.\begin{array}{l} x*x' = -1 \\ x*x' = xx' + 2(x+x'+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} xx' + 2x' = -1 - 2x - 2 \\ x' = \dfrac{-3-2x}{x+2} \end{array}$$ za $x=-2$ x' nije definisan

$$x*(-2) = -2x + 2(x-2+1) = -2$$

Vidimo da je $x*(-2) = -2$ za $\forall x \in \mathbb{R}$ što znači (-2) nema inverznog elementa.
Prema tome struktura $(\mathbb{R}, *)$ nije grupa.

\# Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti parametra λ:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + (2+\lambda)z &= \lambda \\ 2x + (2+\lambda)y + 2z &= 3\lambda \\ 2x + 2y + (1+\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Cramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2+\lambda \\ 2 & 2+\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underset{}{\overset{II_k - I_k}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2+\lambda \\ 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 3 & 2+\lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v - II_v}{=\!=} \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(1+\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 2+\lambda \\ 3\lambda & 2+\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \underset{II_v - III_v}{\overset{I_v - III_v}{=\!=}} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 3\lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \overset{II_v - I_v \cdot 3}{=\!=} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -2-\lambda \\ 0 & 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2-\lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v + II_v}{=\!=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1 + 2) = \lambda(\lambda^2+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 2+\lambda \\ 2 & 3\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v - III_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 3\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k - III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 3\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda) = \lambda(\lambda-1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 3 & \lambda \\ 2 & 2+\lambda & 3\lambda \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{II_k - I_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & 3\lambda \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (-2\lambda) = -2\lambda^2$$

$D = \lambda(\lambda-1)$, $D_x = \lambda(\lambda^2+1)$, $D_y = \lambda(\lambda-1)$, $D_z = -2\lambda^2$

Diskusija

1° $\lambda = 0 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ sistem treba rješiti na drugi način

za $\lambda = 0$ sistem postaje

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 2z &= 0 \quad (I) \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \quad (II) \\ 2x + 2y + z &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

(II)-(III): $z = 0$

(I)-(II): $x + y = 0$

$x = -y$

U ovom slučaju sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(-t, t, 0)$, $t \in R$

2° $\lambda = 1 \Rightarrow D = 0$, $D_x = 2 \neq 0 \Rightarrow$ sistem nema rješenje

3° $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ sistem ima jedinstveno rješenje

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{\lambda(\lambda-1)}$, $y = \frac{D_y}{D} = 1$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2\lambda^2}{\lambda(\lambda-1)}$

Rješ. je oblika $\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda-1}, 1, \frac{-2\lambda}{\lambda-1}\right)$.

Odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$, nad poljem kompleksnih brojeva, gdje je $i^2=-1$.

Rj: Po definiciji tražimo λ i v tako da $Av=\lambda v$.

$$Av-\lambda v=0$$

$$(A-\lambda I)v=0, \quad v=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ovo je homogeni sistem jednačina, ima netrivijalno rješenje akko $\det(A-\lambda I)=0$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & 1-\lambda & i \\ 0 & -i & -\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v+III_v\cdot(-1)}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ i & 1-\lambda & i \\ 0 & -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 1-\lambda & i \\ 0 & -i & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{I_k+III_k}{=} \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2i & 1-\lambda & i \\ -\lambda & -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2i & 1-\lambda \\ -\lambda & -i \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda-\lambda^2) = (-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$=(-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$ i $\lambda_3=2$.

Za $\lambda=-1$ sistem $(A-\lambda I)v=0$ postaje $\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1-ix_2&=0 \\ ix_1+2x_2+ix_3&=0 \\ -ix_2+x_3&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=+ix_2 \\ x_3&=ix_2 \end{aligned}$$

$\vec{v_1}=\begin{bmatrix} is \\ s \\ is \end{bmatrix}$, $s\neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstv. vr. $\lambda=-1$

Za $\lambda=0$ sistem $(A-\lambda I)v=0$ postaje $\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} -ix_2&=0 \\ ix_1+x_2+ix_3&=0 \\ -ix_2&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_2&=0 \\ ix_1+ix_3&=0 \\ x_1&=-x_3 \end{aligned}$$

$\vec{v_2}=\begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t\neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda=0$

Za $\lambda=2$ sistem $(A-\lambda I)v=0$ postaje $\begin{bmatrix} -2 & -i & 0 \\ i & -1 & i \\ 0 & -i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} -2x_1-ix_2&=0 &\Rightarrow\quad x_1&=-\tfrac{1}{2}ix_2 \\ ix_1-x_2+ix_3&=0 \\ -ix_2-2x_3&=0 &\Rightarrow\quad x_3&=-\tfrac{1}{2}ix_2 \end{aligned}$$

$\vec{v_3}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}is \\ s \\ -\frac{1}{2}is \end{bmatrix}$, $s\neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda=2$.