Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 23.02.2012.

1. **a)** Za svaku od sljedećih relacija koje su definisane na skupu $S = \{0, 1, 2, 3\}$, odrediti koju od osobina refleksivnost (R), anti-refleksivnost (AR), simetričnost (S), antisimetričnost (AS) i tranzitivnost (T), date relacije zadovoljavaju:

I) $(m, n) \in R_1$ ako $m + n = 3$; II) $(m, n) \in R_2$ ako $max\{m, n\} = 3$.

(Prisjetimo se: Relacija $\rho \subseteq S \times S$ je antisimetrična na skupu S akko $\forall x, y \in S$ $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$. Relacija $\rho \subseteq S \times S$ je antirefleksivna na skupu S akko $(x, y) \notin \rho$ za $\forall x \in S$.)

b) Dokazati da je polinom $P_{2n+1}(x) = (x + a + b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$ djeljiv sa $\dfrac{P_3(x)}{3(a+b)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. **a)** Za koju vrijednost parametra λ (lambda) rang matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

iznosi: a) 1; b) 2; c) 3?

b) Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i neka je na skupu $\mathbb{R}$ definisana operacija $*$ sa

$$x * y = xy + 2(x + y + 1) \text{ za } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ispitati da li je $(\mathbb{R}, *)$ grupa.

3. Diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + (2+\lambda)z &= \lambda \\ 2x + (2+\lambda)y + 2z &= 3\lambda \\ 2x + 2y + (1+\lambda)z &= 0\ . \end{aligned}$$

4. Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeve, gdje je $i^2 = -1$.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 23.02.2012.

1. **a)** Za svaku od sljedećih relacija koje su definisane na skupu $S = \{0, 1, 2, 3\}$, odrediti koju od osobina refleksivnost (R), anti-refleksivnost (AR), simetričnost (S), antisimetričnost (AS) i tranzitivnost (T), date relacije zadovoljavaju:

I) $(m, n) \in R_1$ ako $m + n = 3$; II) $(m, n) \in R_2$ ako $max\{m, n\} = 3$.

(Prisjetimo se: Relacija $\rho \subseteq S \times S$ je antisimetrična na skupu S akko $\forall x, y \in S$ $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$. Relacija $\rho \subseteq S \times S$ je antirefleksivna na skupu S akko $(x, y) \notin \rho$ za $\forall x \in S$.)

b) Dokazati da je polinom $P_{2n+1}(x) = (x + a + b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$ djeljiv sa $\dfrac{P_3(x)}{3(a+b)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. **a)** Za koju vrijednost parametra λ (lambda) rang matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

iznosi: a) 1; b) 2; c) 3?

b) Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i neka je na skupu $\mathbb{R}$ definisana operacija $*$ sa

$$x * y = xy + 2(x + y + 1) \text{ za } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ispitati da li je $(\mathbb{R}, *)$ grupa.

3. Diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + (2+\lambda)z &= \lambda \\ 2x + (2+\lambda)y + 2z &= 3\lambda \\ 2x + 2y + (1+\lambda)z &= 0\ . \end{aligned}$$

4. Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeve, gdje je $i^2 = -1$.