(#) Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je relacija R na sljedeći način:

a) $xRy \Leftrightarrow x=y$

b) $xRy \Leftrightarrow y=0$

c) $xRy \Leftrightarrow x^2y-xy^2-x+y=0$

za svako $x,y\in\mathbb{R}$. Odrediti za koje slučajeve je R relacija ekvivalencije.

Rj. R je relacija ekvivalencije akko

(I) $\forall x\in\mathbb{R}$ xRx (refleksivnost)

(II) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $xRy \Rightarrow yRx$ (simetričnost)

(III) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$. (tranzitivnost).

a) $xRy \Leftrightarrow x=y$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $xRx \Leftrightarrow x=x$ što je tačno $\Rightarrow R$ jest refleksivno

$\forall x,y\in\mathbb{R}$ $xRy \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow y=x \Leftrightarrow yRx \Rightarrow R$ jest simetr.

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l} xRy \Leftrightarrow x=y \\ yRz \Leftrightarrow y=z \end{array}\right\} \Rightarrow x=z \Leftrightarrow xRz \Rightarrow R$ jest tranzit.

U ovom slučaju R jest relacija ekvivalencije.

b) $xRy \Leftrightarrow y=0$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $xRx \Leftrightarrow x=0$ što nije tačno (npr. za $\underbrace{x=2}_{\text{ili bilo koji } x\neq 0}$).

R nije simetrično pa R nije relacija ekvivalencije u ovom slučaju

c) $xRy \Leftrightarrow x^2y-xy^2-x+y=0$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $xRx \Leftrightarrow x^2x-xx^2-x+x=0$ što je tačno $\Rightarrow R$ jest refleks.

$\forall x,y\in\mathbb{R}$ $xRy \Leftrightarrow x^2y-xy^2-x+y=0 \quad /\cdot(-1)$

$-x^2y+xy^2+x-y=0$

$y^2x-yx^2-y+x=0 \Leftrightarrow yRx \Rightarrow R$ jest simetrično

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l} xRy \Leftrightarrow x^2y-xy^2-x+y=0 \\ yRz \Leftrightarrow y^2z-yz^2-y+z=0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \underbrace{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2}_{\text{da bi relacija bila tranzitivna ovaj dio treba da bude } =x^2z-zx^2}-x+z=0$

Da jednakost $x^2y-xy^2+y^2z-yz^2=x^2z-zx^2$ vrijedi ostavljamo za vježbu $\Rightarrow R$ jest tranzit.

uputa:

$xRy \Leftrightarrow \quad x^2y - xy^2 - x + y = 0$

$$xy(x-y) + (-1)(x-y) = 0$$

$$(xy-1)(x-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy-1=0 \text{ ili } x-y=0 \quad \dots(*)$$

$yRz \Leftrightarrow \quad y^2z - yz^2 - y + z = 0$

$$yz(y-z) + (-1)(y-z) = 0$$

$$(yz-1)(y-z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad yz-1=0 \text{ ili } y-z=0 \quad \dots(**)$$

$$x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 = x^2z - zx^2$$

$$xy(x-y) + yz(y-z) = xz(x-z)$$

$$xy(x-y) + yz(y-z) + xz(z-x) = 0$$

Prema (*) i (**) znamo da se mora desiti jedan od slučajeva

1° $x-y=0$ i $y-z=0$

2° $x-y=0$ i $yz-1=0$

3° $xy-1=0$ i $y-z=0$

4° $xy-1=0$ i $yz-1=0$

U sve i jednom slučaju imaćemo $xy(x-y)+yz(y-z)+xz(z-x)=0$

R jest relacija ekvivalencije

(#) Pretpostavimo da jednakost $xyz=1$ važi u grupi $(G,\cdot)$. Da li tada slijedi da važi $yzx=1$? Da li je $yxz=1$? Odgovor obrazložiti. (1 je jedinični element grupe $(G,\cdot)$).

Rj: $(G,\cdot)$ je grupa. To znači da je operacija $\cdot$ zatvorena, asocijativna, i da u G za $\forall$ element postoji neutralni (jedinični) element (u našem slučaju 1) i inverzni element.

$xyz=1$

$x(yz)=(xy)z=1$

$x(yz)=1 \Rightarrow$ yz je inverzni element za x sa desne strane, a kako je inverzni element u grupi jedinstven on je inverzni element za x i sa lijeve strane.

$x(yz)=1 \Rightarrow (yz)x=1$

Kako važi asocijativnost $(yz)x=y(zx)$ tj.

$(yz)x=y(zx)=yzx=1$

Prema tome vrijedi $yzx=1$.

$xyz=1 \Rightarrow x(yz)=1 \xRightarrow{yz \text{ inverzni elem}} yzx=1$

$xyz=1 \Rightarrow (xy)z=1 \xRightarrow{xy \text{ inver. elem}} zxy=1 \quad \ldots(*)$

Ako bi vrijedilo $yxz=1$ tada je $(yx)z=1$ iz čega bi mogli zaključiti da je yx inverzni element za z. Prema $(*)$ inverzni element za z je i xy a prema jedinstvenosti inverznog elementa bi slijedilo $xy=yx$ $\forall x,y$ tj. da je $(G,\cdot)$ Abelova grupa, što ne znamo da li je tačno. Ako je G Abelova grupa tada vrijedi $yxz=1$, u suprotnom data jedn. ne vrijedi

(#) Riješiti matričnu jednačinu $-X+A^{-1}(A^2\cdot X-I)=A$, ako je I jedinična matrica i $A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$.

Rj.
$$-X+A^{-1}(A^2X-I)=A$$
$$-X+AX-A^{-1}=A$$
$$\underbrace{(-I+A)}_{=(A-I)}X=A+A^{-1} \quad /\cdot(A-I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

ili:
$$-X+A^{-1}(A^2X-I)=A$$
$$A^{-1}(A^2X-I)=A+X \quad /\cdot A \text{ sa lijeve str.}$$
$$A^2X-I=A^2+AX$$
$$A^2X-AX=A^2+I$$
$$(A^2-A)X=A^2+I$$
$$X=(A^2-A)^{-1}(A^2+I)$$

$$X=(A-I)^{-1}(A+A^{-1})$$

$$\det A=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-20-10=-30$$

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{\det A}A_{kof}^{T}$$

$$A_{11}=(-1)^2\cdot 4=4 \qquad A_{21}=(-1)^3\cdot 2=-2$$
$$A_{12}=(-1)^3\,5=-5 \qquad A_{22}=(-1)^4(-5)=-5$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-30}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -5 & -5\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 5\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=3 \qquad B_{21}=-2$$
$$B_{12}=-5 \qquad B_{22}=-6$$

$$A-I=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

$$B\overset{def}{=}\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix} \qquad \det B=\begin{vmatrix}-6 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-18-10=-28$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-28}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & -6\end{bmatrix}=\frac{1}{28}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}=(A-I)^{-1}$$

$$X=(A-I)^{-1}(A+A^{-1})=\frac{1}{28}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{30}\left(\begin{bmatrix}-150 & 60\\ 150 & 120\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$X=\frac{1}{840}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-154 & 62\\ 155 & 125\end{bmatrix}=\frac{1}{840}\begin{bmatrix}772 & 64\\ 160 & 1060\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{193}{210} & \frac{8}{105}\\ \frac{4}{21} & \frac{53}{42}\end{bmatrix} \text{ traženo rješenje}$$

\# Dokazati da
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rj.

I način:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{IV_k - III_k}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow II_k}{=\!=\!=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

q.e.d.

II način:

Izračunaćemo determinante na desnoj i lijevoj strani, pa ćemo provjeriti da li važi data jednakost.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{IV_v - I_v \cdot 4}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -19 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & -11 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -19 & -19 \end{vmatrix} \overset{II_k - III_k}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 3 & -11 \\ 0 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & -19 \end{vmatrix} \overset{III_k + II_k \cdot 3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -19 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -6 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(5 \cdot 19 - 12) = -83$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underline{\underline{III_k + IV_k \cdot (-2)}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{III_v - II_v \cdot 2}{\overset{I_v - II_v \cdot 2}{=\!=\!=}} (-1) \begin{vmatrix} 0 & -5 & -11 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -21 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -5 & -11 \\ -2 & -21 \end{vmatrix} = 5 \cdot 21 - 22 = 83$$

Dobili smo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -83, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 83$$

Prema tome

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{q.e.d.}$$

(#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4&=3\\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4&=1\\ 3x_1-6x_2-x_3-5x_4&=9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 5&-3&2&4&3\\ 4&-2&3&7&1\\ 3&-6&-1&-5&9\\ 7&-3&7&17&\lambda \end{array}\right] \underset{I_v\leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3&-6&-1&-5&9\\ 4&-2&3&7&1\\ 5&-3&2&4&3\\ 7&-3&7&17&\lambda \end{array}\right]$$

$$\underset{I_k\leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&3&-5&9\\ 3&-2&4&7&1\\ 2&-3&5&4&3\\ 7&-3&7&17&\lambda \end{array}\right]\end{array} \underset{IV_v+I_v\cdot 7}{\overset{II_v+I_v\cdot 3,\ III_v+I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&3&-5&9\\ 0&-20&13&-8&28\\ 0&-15&11&-6&21\\ 0&-45&28&-18&\lambda+63 \end{array}\right]$$

$$\underset{II_v:(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&3&-5&9\\ 0&5&-\frac{13}{4}&2&-7\\ 0&-15&11&-6&21\\ 0&-45&28&-18&\lambda+63 \end{array}\right] \underset{IV_v+II_v\cdot 9}{\overset{III_v+II_v\cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&3&-5&9\\ 0&5&-\frac{13}{4}&2&-7\\ 0&0&\frac{5}{4}&0&0\\ 0&0&-\frac{5}{4}&0&\lambda \end{array}\right]$$

$$\underset{III_k\leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_4 & x_1 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&-5&3&9\\ 0&5&2&-\frac{13}{4}&-7\\ 0&0&0&\frac{5}{4}&0\\ 0&0&0&-\frac{5}{4}&\lambda \end{array}\right]\end{array} \underset{III_v+IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1&-6&-5&3&9\\ 0&5&2&-\frac{13}{4}&-7\\ 0&0&0&\frac{5}{4}&0\\ 0&0&0&0&\lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda\neq 0$ $\quad \operatorname{rang} A<\operatorname{rang}\bar{A} \Rightarrow$ sistem nema rješenja

2° $\lambda=0$ $\quad \operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}<4 \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja
(jednu promjenjivu ćemo uzeti proizvoljno)

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4+3x_1&=9\\ 5x_2+2x_4-\tfrac{13}{4}x_1&=-7\\ \tfrac{5}{4}x_1&=0 \quad\Rightarrow x_1=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4&=9 \quad /\cdot 2\\ 5x_2+2x_4&=-7 \quad /\cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_3-12x_2-10x_4&=18\\ +\quad 25x_2+10x_4&=-35\\ \hline -2x_3+13x_2&=-17, \qquad x_2=s \end{aligned}$$

$$x_3=\frac{13s+17}{2}$$

$$2x_4=-5x_2-7 \Rightarrow x_4=\frac{-5s-7}{2}$$

Rješenje sistema je $\left(0, s, \frac{13s+17}{2}, \frac{-5s-7}{2}\right)$ SGR

(#) Neka je $\mathbb{R}$ polje realnih brojeva i neka je X konačan skup. Označimo sa S skup svih f-ja sa X u $\mathbb{R}$. U skupu S definišemo operaciju sabiranja i množenje skalarom na sljedeći način: $\forall f, g \in S$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ za } \forall x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ za } \forall x \in X \text{ i } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dokazati da je S u odnosu na ove dvije operacije vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Rj. Da bi dokazali da je S s obzirom na dvije date operacije vektorski prostor nad poljem realnih brojeva trebamo pokazati da je

a) $(S, +)$ Abelova grupa

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f \in S \quad (\alpha\beta) f(x) = \alpha(\beta f(x))$

c) $\forall f \in S \quad 1 \cdot f(x) = f(x)$

d) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in S \quad (\alpha+\beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$

$\alpha (f+g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

a) ZATVORENOST

$\forall f, g \in S \quad (f+g)(x) \overset{def}{=} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$

$f+g$ jest f-ja sa X u $\mathbb{R}$ vrijedi zatvorenost

ASOCIJATIVNOST

$\forall f, g, h \in S \quad ((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) \quad \ldots(\square)$

$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) \quad \ldots(\square\square)$

kako su $f(x), g(x)$ i $h(x)$ realni brojevi $\Longrightarrow (\square) = (\square\square)$

vrijedi asocijativnost

NEUTRALNI ELEMENT

Neutralni element je f-ja $e: X \to \mathbb{R}$ koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje 0, tj. $e(x) = 0$ za $\forall x \in X$

$\forall f \in S \quad (f+e)(x) = f(x) + e(x) = f(x) + 0 = f(x)$

INVERZNI ELEMENT

za svaki $f \in S$ inverzni element je $-f \in S$ $\quad -f(x)$ je realan broj

$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0$

KOMUTATIVNOST Kako su $f(x)$ i $g(x)$ realni brojevi a u skupu $\mathbb{R}$ vrijedi komutativnost za $\forall f, g \in S$ vrijedi komutativnost

$(S,+)$ jest Abelova grupa

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f \in S$

$$(\alpha\beta) \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} = \alpha\,(\beta \cdot f(x)) \Rightarrow$$ vrijedi asocijativnost množenja

za tri realna broja vrijedi asocijativnost množenja

c) $\forall f \in S \quad \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow$ skalarno množenje sa realnim brojem 1 jest identična operacija

d) pokažimo da vrijede dva zakona distributivnosti

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in S$

$(\alpha+\beta) \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} = \alpha f(x) + \beta f(x) \Rightarrow$ vrijedi prvi distributivni zakon

(u skupu $\mathbb{R}$ vrijedi ovaj distributivni zakon)

$\alpha\,(f+g)(x) = \alpha\,(\underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}}) = \alpha f(x) + \alpha g(x) \Rightarrow$ vrijedi drugi distributivni zakon

(u skupu $\mathbb{R}$ vrijedi ovaj distributivni zakon)

Skup S jest vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.