Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ i $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Odrediti sve skupove X za koje važi $X \subseteq E$, $A \cap X = \{3, 5\}$ i $B \cup X = E$.

b) S je skup uređenih parova (p, q), gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p, q)\rho(p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x \qquad\quad + \qquad 2z &= 0 \\ (2\lambda - 1)x + \qquad y + \qquad 4z &= 2 \\ -3x + (\lambda + 2)y + (\lambda + 5)z &= \lambda + 3 \ . \end{aligned}$$

3. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu $B^{-1}XA = (3B - 2I)^{-1}$.

4. Neka su date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Dati su skupovi $A=\{2,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$ i $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Odrediti sve skupove X za koje važi

$$X \subseteq E, \quad A \cap X = \{3,5\}, \quad B \cup X = E.$$

R:

$A \cap X = \{3,5\} \Rightarrow 3 \in X$ i $5 \in X$, $2 \notin X$

$B \cup X = E \Rightarrow 1 \in X$ i $3 \in X$ i $5 \in X$

a može biti $4 \in X$, $6 \in X$.

Prema tome $1, 3, 5$ su sigurno u X, dok 4 i 6 mogu ali i ne moraju biti.

$X = \{1,3,5\}$ ili $X = \{1,3,4,5\}$ ili $X = \{1,3,5,6\}$ ili

$X = \{1,3,4,5,6\}$.

(#) S je skup uređenih parova (p, q) gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p,q)\,\rho\,(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

Rj.

REFLEKSIVNOST

$\underline{\forall}\,\underline{(p,q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad (p,q)\,\rho\,(p,q)$

$(p,q)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow pq = qp$ što je tačno za svaki izbor cijelih pozitivnih brojeva p i q

ρ jest refleksivna relacija

SIMETRIČNOST

$\underline{\forall}\,\underline{(p,q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2 \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \Rightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr \Rightarrow rq = sp \Leftrightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$

$(r,s)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow rq = sp$

ρ jest simetrična relacija

TRANZITIVNOST

$\forall ((p,q),(r,s),(a,b) \in \mathbb{N}^2) \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr$

$(r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow rb = as$

$(p,q)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow pb = qa$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow ps = qr \wedge rb = sa \Rightarrow$

$\Rightarrow ps \cdot rb = qr \cdot sa \Rightarrow pb \cdot rs = qa \cdot rs \xRightarrow{/:rs} pb = qa$

$\Leftrightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$ $\quad \rho$ jest tranzitivna relacija

ρ je relacija ekvivalencije q.e.d.

Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \quad 2z &= 0 \\ (2\lambda-1)x + y + 4z &= 2 \\ -3x + (\lambda+2)y + (\lambda+5)z &= \lambda+3 \end{aligned}$$

Rj. Riješit ćemo sistem Kramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 1 & 4 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v - I_v\cdot 2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6-4\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \lambda+11-(6\lambda+12-4\lambda^2-8\lambda)$$

$$= \lambda+11+4\lambda^2+2\lambda-12 = 4\lambda^2+3\lambda-1 = (\lambda+1)(4\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 2(2\lambda+4-\lambda-3) = 2(\lambda+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 2 & 4 \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v + I_v\cdot(-2)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 2 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6-4\lambda \\ \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = 2\lambda+22-(18-6\lambda-4\lambda^2) =$$

$$= 2\lambda+22-18+6\lambda+4\lambda^2 = 4\lambda^2+8\lambda+4 = 4(\lambda+1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda+3-2\lambda-4 = -\lambda-1 = (-1)(\lambda+1)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq -1$; $\lambda \neq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+1)(4\lambda-1)} = \frac{2}{4\lambda-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{4(\lambda+1)}{4\lambda-1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{4\lambda-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1, \tfrac{1}{4}\}$$

2° $\lambda = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $D_x \neq 0$ sistem nema rješenja

3° $\lambda = -1$ $\Rightarrow$ $D = D_x = D_y = D_z = 0$ sistem trebamo riješiti na drugi način

Za $\lambda=-1$ sistem postaje

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ -3x + y + 4z &= 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \\ \hline x + 2z &= 0 \quad /\cdot 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x \quad + 4z &= 0 \\ - \quad -3x + y + 4z &= 2 \\ \hline 5x - y &= -2 \\ y &= 5x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + \overbrace{5x+\cancel{2}}^{y} + 4z &= \cancel{2} \\ 2x + 4z &= 0 \quad /:2 \\ 2z &= -x \\ z &= -\tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(t, 5t+2, -\frac{1}{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$

#) Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$,

a I je jedinična matrica trećeg reda.

Riješiti jednačinu $B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1}$.

R:

$B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1}$ $\quad /\cdot B$ sa lijeve str.

$X\cdot A=B(3B-2I)^{-1}$ $\quad /\cdot A^{-1}$ sa desne strane

$X=B\underbrace{(3B-2I)}_{C}^{-1}\cdot A^{-1}$

$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}$

$$C=3B-2I=\begin{bmatrix}6 & -9 & 0\\ 3 & 0 & -3\\ -6 & 3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -9 & 0\\ 3 & -2 & -3\\ -6 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C_{kof}^{T}$$

$$\det C=\begin{vmatrix}4 & -9 & 0\\ 3 & -2 & -3\\ -6 & 3 & 7\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}4 & -9 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v\cdot(-4)}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}0 & -21 & -28\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-21 & -28\\ -2 & -3\end{vmatrix}=63-56=7$$

$C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-14+9=-5$ $\quad C_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-9 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=63$ $\quad C_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-9 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}=27$

$C_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & -3\\ -6 & 7\end{vmatrix}=(-1)(21-18)=-3$ $\quad C_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 0\\ -6 & 7\end{vmatrix}=28$ $\quad C_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & -3\end{vmatrix}=12$

$C_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & 3\end{vmatrix}=9-12=-3$ $\quad C_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & -9\\ -6 & 3\end{vmatrix}=-(12-54)=42$ $\quad C_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}4 & -9\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-8+27=19$

$$C_{kof}=\begin{bmatrix}-5 & -3 & -3\\ 63 & 28 & 42\\ 27 & 12 & 19\end{bmatrix}\qquad C^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5 & 63 & 27\\ -3 & 28 & 12\\ -3 & 42 & 19\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4+4=8$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3+1=4$ $\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$ $\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$ $\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$ $\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3+4=7$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5 & 63 & 27\\ -3 & 28 & 12\\ -3 & 42 & 19\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 7\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-92 & 26 & 242\\ -44 & 10 & 106\\ -58 & 17 & 169\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}-52 & 22 & 166\\ -34 & 9 & 73\\ -34 & 9 & 129\end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

Rj.
Karakteristični polinom matrice A je polinom oblika
$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

Karakteristični polinom matrice B je polinom oblika
$p(\lambda)=\det(\lambda I-B)$

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$k(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)\neq(\lambda-2)^2(\lambda-1)=p(\lambda)$$

Matrice A i B imaju različite karakteristične polinome.

Minimalni polinom matrice A $m(\lambda)$ mora dijeliti $k(\lambda)$. Također svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ tj. $\lambda-1$ i $\lambda-2$ su također faktori od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ može biti tačno jedan od sljedeća dva polinoma $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ ili $g(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

Izračunajmo $f(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Minimalni polinom matrice A je $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$.

Na potpuno isti način (za vežbu) pokažemo da je $n(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ minimalni polinom matrice B.

Matrice A i B imaju isti minimalni polinom.

q.e.d.