Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. a) Data je $n \times n$ Hilbertova matrica definisana sa

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je npr. $h_{11} = 1$, $h_{23} = \frac{1}{4}$, $h_{3n} = \frac{1}{n+2}$. Izraziti proizvoljan element h_{ij} pomoću formule u kojoj figurišu indeksi i i j.

b) Neka je V skup uređenih parova (x, y) realnih brojeva, $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, i neka je na V definisano sabiranje na sljedeći način

$$(x, y) + (u, v) = (\sqrt{x^2 + u^2}, \sqrt{y^2 + v^2}).$$

Odrediti da li je $(V, +)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

2. Odrediti za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ će determinanta n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & (n-1)-a \end{vmatrix}$$

imati vrijednost različitu od nule.

3. a) Odrediti opšte rješenje homogenog sistema

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y + z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ 6x + 3y + z &= 0 \\ 8x + 4y + z &= 0\ . \end{aligned}$$

b) Objasniti zašto linearni sistem od m jednačina sa n nepoznatih $(m, n \geq 2)$ nikad ne može imati tačno dva različita rješenja. Proširiti svoje argumente u objašnjenju i obrazložiti da li je tačno da ako sistem ima više od jednog rješenja, tada mora imati beskonačno mnogo različitih rješenja.

4. Odrediti minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Šta je minimalni polinom?

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*