Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**, 20.06.2012.

1. (a) Neka su R_1 i R_2 dvije relacije na skupu S.
(i) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti refleksivna, aku su R_1 i R_2 refleksivne.
(ii) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti simetrična, aku su R_1 i R_2 simetrične.
(iii) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti tranzitivna, aku su R_1 i R_2 tranzitivne.
(Prisjetimo se: Relacija R na skupu S je podskup Dekartovog proizvoda $S \times S$, tj. skup čiji su elementi uređeni parovi (s_1, s_2)).

(b) Za date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
provjeriti da li vrijedi jednakost $B = 4C^{-1}A^{-1}$.

2. Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$.

3. Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra λ :

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -5 \\ 2\lambda x_1 - 8x_2 + 18x_3 + 20x_4 &= 22 \\ -6x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 8x_4 &= -9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7\ . \end{aligned}$$

4. (60%) (a) Dat je skup $P_2[x]$, skup svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepena najviše 2, tj.

$$P_2[x] = \{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \mid p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Dokazati da je $P_2[x]$ vektorski prostor, gdje je sabiranje elemenata iz $P_2[x]$ definisano kao "obično" sabiranje polinoma, dok je množenje elemenata iz $P_2[x]$ sa skalarom definisano kao obično množenje skalara sa polinomom.
(40%) (b) Posmatrajmo skup $T = \{a, b, ...\}$ sa najmanje dva člana. Neka je $\mathrm{FUN}(T,T)$ skup svih funkcija koje preslikavaju T u T. Dokazati ili oboriti sljedeću tvrdnju: Operacija kompozicije $\circ$ je komutativna na skupu $\mathrm{FUN}(T,T)$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Neka su R_1 i R_2 dvije relacije na skupu S.
(a) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti refleksivna ako su R_1 i R_2 refleks.
(b) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti simetrična ako su R_1 i R_2 simetr.
(c) Mora li $R_1 \cup R_2$ biti tranzitivna ako su R_1 i R_2 tranz.
(Prisjetimo se: Relacija R na skupu S je podskup Dekartovog proizvoda $S \times S$, tj. skup čiji su elementi uređeni parovi (s_1, s_2)).

Rj:
(a) Kako je R_1 refleksivna relacija to je sR_1s za $\forall s \in S$
(ili $(s,s) \in R_1$ $\forall s \in S$).
R_2 refleksivna $\Leftrightarrow$ sR_2s $\forall s \in S$ $\Leftrightarrow$ $(s,s) \in R_2$ $\forall s \in S$
$R_3 \stackrel{def}{=} R_1 \cup R_2$
Kako je $\forall s \in S$ $(s,s) \in R_1$ i $(s,s) \in R_2$ $\Rightarrow$ $(s,s) \in R_3 = R_1 \cup R_2$
R_3 mora biti refleksivna relacija

(b) R_1 simetrično $\Leftrightarrow$ $\forall s,t \in S$ $(s,t) \in R_1 \Leftrightarrow (t,s) \in R_1$
R_2 simetrično $\Leftrightarrow$ $\forall s,t \in S$ $(s,t) \in R_2 \Leftrightarrow (t,s) \in R_2$
$R \stackrel{def}{=} R_1 \cup R_2$
Proizvoljno $m,n \in S$ $(m,n) \in R_3 \Leftrightarrow (m,n) \in R_1$ ili $(m,n) \in R_2$
$\Leftrightarrow (n,m) \in R_1$ ili $(n,m) \in R_2 \Rightarrow (n,m) \in R_3$

R_3 mora biti simetrična relacija

(c) R_1 tranzitivno $\Leftrightarrow$ $\forall m,n,r \in S$ $(m,n) \in R_1$ i $(n,r) \in R_1 \Rightarrow (m,r) \in R_1$
R_2 tranzitivno $\Leftrightarrow$ $\forall u,v,z \in S$ $(u,v) \in R_2$ i $(v,z) \in R_2 \Rightarrow (u,z) \in R_2$
Sad izaberimo tri proizvoljna elementa $u,w,v \in S$ takve da
$(u,w) \in R_3$ i $(w,v) \in R_3$ $\quad R_3 = R_1 \cup R_2$.
R_3 ne mora bito tranzitivno zato što se može desiti
slučaj da $((u,w) \in R_1$ i $(w,v) \notin R_1)$ i $((u,w) \notin R_2$ i $(w,v) \in R_2)$.

R_3 ne mora biti tranzitivna relacija.

(#) Za date matrice $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\\-1&1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&-2&2&-1\\1&4&-2&3\\0&-4&2&-2\\2&6&-2&2\end{bmatrix}$

i $C=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$ provjeriti da li vrijedi jednakost

$$B=4C^{-1}A^{-1}.$$

Rj.

$B=4C^{-1}A^{-1}$ $/\cdot A$ sa desne str.

$BA=4C^{-1}$ $/\cdot C$ sa desne str.

$BAC=4I$

Prema tome da bi pokazali da je $B=4C^{-1}A^{-1}$ potrebno je i dovoljno pokazati da je $B\cdot A\cdot C=4I$

$$A\cdot C=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\\-1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\-1&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&3&1\\1&-1&-1&1\\3&1&1&1\\1&3&1&-1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A\cdot C=\begin{bmatrix}-1&-2&2&-1\\1&4&-2&3\\0&-4&2&-2\\2&6&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&3&1\\1&-1&-1&1\\3&1&1&1\\1&3&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4I$$

$-1+2+2-3$

$0+4+2-2$

Vrijedi data jednakost

(#) Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix}.$$

R.: Da bi nam "došla" ideja kako izračunati determinantu n-tog reda, pokušajmo izračunati determinante drugog, trećeg i četvrtog reda.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} \overset{I_k - II_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -(-x) = x \quad \dots (*)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \end{vmatrix} \overset{II_k - III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1-x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = -(-x) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{det. drugog} \\ \text{reda, vidi } (*)}} = x \cdot x = x^2 \quad \dots (**)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \end{vmatrix} \overset{III_k - IV_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(-x) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{= x^2 \\ \text{(vidi } **)}}$$

$$= x \cdot x^2 = x^3$$

Odavde vidimo da našu determinantu n-tog reda možemo svesti na oblik $(-1)^k x$ puta ista determinanta $(n-1)$-og reda (gdje je $k \in \mathbb{N}$). Pa vrijednost determinante izračunajmo matematičkom indukcijom. Tvrdimo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix} = x^{n-1}.$$

BAZA INDUKCIJE

$n=2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} = x$ (vidi (*)). Tvrdnja je točna za $n=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je za determinantu n-tog reda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix} = x^n$$

Izračunajmo determinantu $(n+1)$-og reda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \overset{n\text{-ta kolona} - (n+1)\text{-va kolona}}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n-1}(-x) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{prema pretpostavci} \\ = x^n}} =$$

$$= x^{n+1}$$

ZAKLJUČAK

Tražena vrijednost determinante n-tog reda je x^n.

(#) Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra λ:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -5 \\ 2\lambda x_1 - 8x_2 + 18x_3 + 20x_4 &= 22 \\ -6x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 8x_4 &= -9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -3 & -4 & -5 \\ 2\lambda & -8 & 18 & 20 & 22 \\ -6 & 3 & -7 & -8 & -9 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{I_v\cdot(-1) \\ II_v:2 \\ III_v\cdot(-1) \\ III_v\leftrightarrow IV_v \\ I_v\leftrightarrow II_v}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \underset{I_v\leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right]$$

$$\underset{II_v\leftrightarrow I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{I_k\leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array} \underset{I_k\leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{\substack{II_v-I_v\cdot 3 \\ III_v-I_v\cdot 2 \\ IV_v-I_v\cdot 4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9 \end{array}\right] \underset{II_k\leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] \end{array} \underset{III_v\leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{III_v-II_v\cdot 2 \\ IV_v-II_v\cdot 3}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Za $\lambda = 8$ imamo rang A = rang $\bar{A} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja.
2. promjenljive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$ $x_1 = s$

$$\begin{aligned} -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 2s + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 2s + 9 - 6t + 4t - 5$

$x_2 = 2s - 2t + 4$

Za $\lambda = 8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t, s \in \mathbb{R}$

b) Za $\lambda \neq 8$ imamo rang A = rang $\bar{A} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.
1. (jednu) promjenljivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$

$$\begin{aligned} (\lambda - 8)x_1 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 9 - 6t + 4t - 5 = -2t + 4$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

(#) Dat je skup $P_2[x]$, skup svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepena najviše 2, tj.

$$P_2[x] = \{ p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \mid p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Dokazati da je $P_2[x]$ vektorski prostor, gdje je sabiranje elemenata iz $P_2[x]$ definisano kao "obično" sabiranje polinoma, dok je množenje elemenata iz $P_2[x]$ sa skalarom definisano kao "obično" množenje skalara sa polinomom.

Rj. Da bi pokazali da je $P_2[x]$ vektorski prostor, trebamo pokazati da vrijede sljedeće četiri aksiome

(I) $(P_2[x], +)$ je Abelova grupa

(II) $(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$ za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall p \in P_2[x]$

(III) $1 \cdot p = p$ gdje je $1 \in \mathbb{R}$, $\forall p \in P_2[x]$

(IV) važe dva zakona distributivnosti $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$

$\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$

za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall p, q \in P_2[x]$.

(I) Pokažimo da je $P_2[x]$ Abelova grupa

ZATVORENOST

$\forall p, q \in P_2[x]$ $p + q \in P_2[x]$

$$p+q = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + q_0 + q_1 x + q_2 x^2 = \underbrace{p_0 + q_0}_{= r_1} + \underbrace{(p_1 + q_1)}_{r_2} x + \underbrace{(p_2 + q_2)}_{r_3} x^2 = r \in P_2[x]$$

vrijedi zatvorenost

ASOCIJATIVNOST

$\forall p, q, r \in P[x]$ $(p+q)+r = p+(q+r)$

$$(p+q)+r = (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + q_0 + q_1 x + q_2 x^2) + r_0 + r_1 x + r_2 x^2 =$$

$$= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + r_0 + r_1 + r_2 x^2) = p + (q+r)$$

vrijedi asocijativnost

NEUTRALNI ELEMENT

$\exists e \in P_2[x]$ $\forall p \in P_2[x]$ $p + e = e + p = p$

Za e možemo uzeti $e = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$$p + e = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + 0 = p$$

$$e + p = 0 + p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = p$$

$e = 0 + 0\cdot x + 0\, x^2$ je neutralni element

INVERZNI ELEMENT

$$\forall p \in P_2[x] \quad \exists p^{-1} \in P_2[x] \qquad p + p^{-1} = p^{-1} + p = e$$

$$p + p^{-1} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{p^{-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= -p_0 \\ a_1 &= -p_1 \\ a_2 &= -p_2 \end{aligned}$$

Inverzni element od p je $-p$.

KOMUTATIVNOST

$$\forall p, g \in P_2[x] \qquad p + g = g + p$$

$$p + g = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + g_0 + g_1 x + g_2 x^2 = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = g + p$$

važi komutativnost

$(P_2[x], +)$ jest Abelova grupa

(II) Pokažimo da je $(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$ za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall p \in P_2[x]$

$$(\alpha\beta)p = (\alpha\beta)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = (\alpha\beta)p_0 + (\alpha\beta)p_1 x + (\alpha\beta)p_2 x^2 =$$
$$= \alpha(\beta p_0) + \alpha(\beta p_1 x) + \alpha(\beta p_2 x^2) = \ldots = \alpha(\beta p)$$

(III) $\forall p \in P_2[x]$ $1\cdot p = p$ gdje je $1 \in \mathbb{R}$

$$1\cdot p = 1\cdot(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = p$$

(IV) Pokažimo da vrijede dva zakona distributivnosti.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall p \in P_2[x]$

$$(\alpha + \beta)p = (\alpha+\beta)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = (\alpha+\beta)p_0 + (\alpha+\beta)p_1 x + (\alpha+\beta)p_2 x^2 =$$
$$= (\alpha p_0 + \alpha p_1 x + \alpha p_2 x^2) + (\beta p_0 + \beta p_1 x + \beta p_2 x^2) = \alpha p + \beta p$$

vrijedi prvi zakon distributivnosti

Za vježbu pokazati da vrijedi drugi zakon distributivnosti

Iz (I), (II), (III) i (IV) zaključujemo da je $P_2[x]$ vektorski prostor.

7) Posmatrajmo skup $T=\{a,b,\dots\}$ sa najmanje dva člana. Neka je $FUN(T,T)$ skup svih f-ja koje preslikavaju T u T. Dokazati ili oboriti sljedeću tvrdnju: Operacija kompozicije $\circ$ je komutativna na skupu $FUN(T,T)$.

Rj:

Izaberimo dvije proizvoljne f-je $f,g\in FUN(T,T)$.

Šta je rezultat kompozicije $f\circ g$?

Za proizvoljno $x\in T$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\underbrace{x'}_{\in T})=x''\in T$$

Kompozicija $f\circ g$ je neka nova f-ja iz $FUN(T,T)$.

Na skupu $FUN(T,T)$ operacija kompozicije $\circ$ će biti komutativna akko $f\circ g=g\circ f$ za $\forall f,g\in FUN(T,T)$.

Posmatrajmo f-je $f(x)=a$ i $g(x)=b$ za $\forall x\in T$. Tada

$$\left.\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))=f(b)=a\\(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(a)=b\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\circ g\neq g\circ f$$

Operacija kompozicije $\circ$ nije komutativna.