Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. (a) Definišimo relaciju dijeljenja R na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa

$$(m,n) \in R \text{ akko } m|n$$

(prisjetimo se da se simbol $m|n$ čita "m dijeli n" a matematički znači da postoji cijeli broj k takav da $n = km$). Koju od osobina (R), (AR), (S), (AS) i (T) relacija R zadovoljava (napisane skraćenice su od pojmova refleksivnost, antirefleksivnost, simetrčnost, antisimertičnost i tranzitivnost).

(b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A$ za 72 člana $(\underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{\text{72 puta}})$.

2. Izračunati determinantu reda $2n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$: $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & ... & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & ... & 4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & 0 & ... & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (determinanta ima $2n$ kolona i $2n$ vrsta, n je prirodan broj). (Mala pomoć: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$ gdje su A, B, C i D determinante (kvadratni blokovi)).

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ :

$$\begin{aligned} -4x_1 \quad\quad +x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -\lambda \\ 6x_1 \quad\quad -x_3 \quad\quad -2x_5 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \quad\quad -2x_4 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \ . \end{aligned}$$

4. Zadana je matrica A čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1: $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ a poslije toga i preostale svojstvene vrijednosti (ako ih ima).

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Definišimo relaciju dijeljenja R na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa

$$(m,n)\in R \quad \text{akko} \quad m\,|\,n$$

(prisjetimo se da se simbol $m|n$ čita "m dijeli n" a znači da postoji cijeli k t.d. $n=km$).
Koju od osobina (R), (AR), (S), (AS) i (T) relacija R zadovoljava (napisane skraćenice su od pojmova refleksivnost, antirefleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost).

Rj. Prisjetimo se: Za relaciju R definisanu na skupu S kažemo da je

(R) refleksivna akko $(x,x)\in R$ za $\forall x\in S$

(AR) antirefleksivna akko $(x,x)\notin R$ za $\forall x\in S$

(S) simetrična akko $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$ za $\forall x,y\in S$

(AS) antisimetrična akko $(x,y)\in R$ i $(y,x)\in R) \Rightarrow x=y$

(T) tranzitivna akko $(x,y)\in R$ i $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

(R) $(m,m)\in R$ za $\forall m\in\mathbb{N}$

Kako svaki prirodan broj dijeli sam sebe to je R refleks. relacija.

(AR) $(m,m)\notin R$ za $\forall m\in\mathbb{N}$

npr. $3|3 \Rightarrow$ R nije antirefleksivna relacija

(S) $(m,n)\in R \Rightarrow (n,m)\in R$ za $\forall m,n\in S$

R nije simetrična relacija. Zašto? Npr.

$5|15 \Leftrightarrow$ 5 dijeli 15 ali 15 ne dijeli 5 tj. imamo

$$5|15 \overset{\text{ne povlači}}{\not\Rightarrow} 15|5$$

(AS) $(m,n)\in R$ i $(n,m)\in R \Rightarrow m=n$

$$\left.\begin{array}{l} (m,n)\in R \Leftrightarrow m|n \Leftrightarrow \exists k_1\in\mathbb{Z} \quad n=k_1 m \\ (n,m)\in R \Leftrightarrow n|m \Leftrightarrow \exists k_2\in\mathbb{Z} \quad m=k_2 n \end{array}\right\} \Rightarrow n=k_1k_2n \Rightarrow k_1k_2=1$$

kako radimo u $\mathbb{N}$ $k_1=k_2=1$

$$\Rightarrow m=n$$

R jest antisimetrična relacija. (T) ZA VJEŽBU... R jest (T)

(#) Neka je $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ za 72 člana ($\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{72 \text{ puta}}$).

Rj.

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A \cdot A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{= A \cdot A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odavde vidimo da je $A^3 = I$.

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{72 \text{ puta}} = A^{72} = \left(A^3\right)^{26} = I^{26} = I$$

Prema tome $\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{72 \text{ puta}} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Izračunati determinantu reda $2n$ (gdje je $n \in \mathbb{N}$) (determinanta ima $2n$ kolona i $2n$ vrsta, n je prirodan broj)

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Pomoć:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$$

gdje su A, B, C i D determinante. (kvadratni blokovi).

Rj: Da bi smo "skontali" ideju za izračunavanje determinante reda $2n$, prvo izračunajmo determinantu reda 2 i determinantu reda 4.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{ispred I v}}{\overset{\text{izvucimo 2}}{=\!=}} 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{ispred II v}}{\overset{\text{izvucimo 2}}{=\!=}} 2^2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2^2(1-4) = 2^2(-3) = -2^2 \cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{iz svake vrste izvucimo br 2 ispred dete.}} 2^4 \left|\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \xlongequal{\text{determinantu možemo podijeliti na blokove pa imamo}}$$

$$2^4\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = 2^4\left(1 \cdot 1 - (-4)(-4)\right) = 2^4 \cdot (-17)$$

Izračunajmo determinantu reda $2n$.

$$\left|\begin{array}{ccccc:ccccc} -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4 \\ 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \end{array}\right| \xlongequal{\text{determinantu možemo podijeliti na 4 bloka svaki reda } n}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)^n(-2)^n - (2^2)^n \cdot (2^2)^n =$$

$$= 2^{2n}(1 - 2^{2n})$$

traženo rješenje

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} -4x_1 \quad\quad &+ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -\lambda \\ 6x_1 \quad\quad &- x_3 \quad\quad - 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \quad &\quad\quad - 2x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 &- x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 . \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom.

$$\overline{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 1 & 2 & -2 & -\lambda \\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\overset{III_v : 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & -2 & -\lambda \end{array}\right] \underset{II_v \leftrightarrow III_v}{\overset{IV_v \cdot (-1)}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \overset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overset{I_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{IV_v + II_v \cdot (-2)}{\overset{III_v + II_v \cdot (-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6 \end{array}\right]$$

$$\overset{IV_v \leftrightarrow V_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6 \end{array}\right] \overset{IV_v + III_v \cdot (-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-2\lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda = 3$ $\quad \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3 < 5 \Rightarrow$ Sistem ima ∞ mnogo rješenja

2 promjenljive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$, $x_5 = s$

$$x_3 + 6x_4 - 10x_5 = -3$$
$$x_3 = -6t + 10s - 3$$

$$2x_1 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 3$$
$$2x_1 = -6t + 10s - 3 + 4t - 6s + 3$$
$$2x_1 = -2t + 4s$$
$$x_1 = -t + 2s$$

$$x_2 + x_1 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2$$
$$x_2 = t - 2s - 6t + 10s - 3 + 3t - 4s + 2$$
$$x_2 = -2t + 4s - 1$$

Rješenje sistema je $(-t+2s, -2t+4s-1, -6t+10s-3, t, s)$

2° $\lambda \neq 3$ $\quad \operatorname{rang} A = 3 < 4 = \operatorname{rang} \overline{A}$ $\quad$ sistem nema rješenja

(#) Zadana je matrica A čije su dvije svojstvene vrijednosti -1 i 1.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ a & -7 & b \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ a poslije toga i preostale svojstvene vrijednosti (ako ih ima).

Rj

Svojstvenoj vrijednosti λ odgovara svojstveni vektor v t.d.

$$Av = \lambda v \implies Av - \lambda v = 0$$
$$(A - \lambda I)v = 0$$

Imamo netrivijalna rješenje akko $\det(A - \lambda I) = 0$.

Za $\lambda = -1$:

$$\det(A - \lambda I) = |A + I| = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ a & -6 & b \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{II_v + III_v \cdot (-3)}{\overset{I_v + III_v \cdot (-2)}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ a-9 & 0 & b-3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (+2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ a-9 & b-3 \end{vmatrix} = (+2)(2b - 6 + 2a - 18) = (2)(2a + 2b - 24)$$

$$= 4 \cdot (a + b - 12)$$

Za $\lambda = 1$:

$$\det(A - \lambda I) = |A - I| = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ a & -8 & b \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{II_v + III_v \cdot (-4)}{\overset{I_v + III_v \cdot (-2)}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ a-12 & 0 & b+4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ a-12 & b+4 \end{vmatrix} = (-4)(a-12)$$

$$(-4)(a-12) = 0 \qquad\qquad 4(a+b-12) = 0$$
$$a = 12 \qquad\qquad b = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 12 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 12 & -7-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 12 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-49 - 7\lambda + 7\lambda + \lambda^2 + 48)$$
$$= (-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Svojstvene vrijednostima matrice A su 0, 1 i -1.