

## 5 Problemi transporta i distribucije

### 5.1 Formulacija transportnog problema

**Zadatak.** Riješite grafičkom metodom problem prijevoza kave iz dvije pržionice  $P_1$  i  $P_2$  u diskonte  $D_1$ ,  $D_2$  i  $D_3$ , ako su troškovi, ponuda i potražnja kao u tablici:

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$a_i$
$P_1$	3	7	4	40
$P_2$	3	5	9	56
$b_j$	22	38	36	

(rješenje:  $T = 400$ )

Rješavanje transportnog problema može se razdijeliti u tri etape:

- određivanje početnog bazičnog rješenja
- ocjena optimalnosti dobivenog rješenja
- promjena plana

Metode određivanja početnog bazičnog mogućeg rješenja su:

- dijagonalna metoda ili metoda sjeverozapadnog kornera
- metoda najmanje cijene
- VAM - metoda ili Vogelova metoda

Metode ocjenjivanja optimalnosti rješenja transportnog problema su:

- Stepping-stone metoda
- MODI ili modificirana Stepping-stone metoda

Promjena plana koji nije optimalan, provodi se jedino Stepping - stone metodom.

## 5.2 Zadaci

1. Odredite plan transporta tako da ukupni troškovi budu minimalni. Ponuda, potražnja i jedinični troškovi dani su u tablici:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$O_5$	$a_i$
$I_1$	5	7	8	3	1	300
$I_2$	2	4	9	5	9	600
$I_3$	9	11	4	7	9	400
$I_4$	6	7	9	9	11	700
$b_j$	150	350	350	500	650	

(rješenje:  $T = 9650$ )

2. Zrno pšenice sa četiri lokacije treba transportirati u tri silosa. Na prvoj lokaciji ubrano je 400t, na drugoj 500t, na trećoj 800t i na četvrtoj 500t pšeničnog zrna. Kapaciteti silosa su: 700t prvog, 800t drugog i 700t trećeg. Odredite minimalne troškove transporta pšeničnog zrna ako su tablicom dani troškovi transporta jedne tone zrna s  $i$ -te lokacije u  $j$ -ti silos.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$L_1$	1	4	3
$L_2$	7	1	5
$L_3$	4	8	3
$L_4$	4	2	8

(rješenje:  $T = 4200$ )

3. Transportni je problem zadan tablično:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	3	15	6	4	90
$I_2$	1	8	10	5	75
$I_3$	4	3	6	10	35
$b_j$	50	50	85	15	

Zadan je plan:

$$x_{11} = 25, x_{13} = 50, x_{14} = 15, x_{21} = 25, x_{22} = 50, x_{33} = 35$$

Poboljšavajte zadani plan do optimalnog Stepping-stone metodom. Odredite plan transporta sa minimalnim troškom i izračunajte trošak (rješenje:  $T = 855$ )

4. Nadjite optimalni plan i izračunajte minimalni trošak

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
$S_1$	6	12	14	8	11	95
$S_2$	10	12	10	3	15	55
$S_3$	12	15	7	14	4	80
	35	50	40	70	35	

(rješenje:  $T = 1530$ )

### 5.3 Degeneracija

Početno bazično moguće rješenje je degenerirano radi postojanja zatvorenog potproblema. Ako je kod konstrukcije početnog bazičnog rješenja jednom bazičnom varijablom moguće istovremeno zadovoljiti i ponudu i potražnju, ostaviti jedno, ili ponudu ili potražnju, i to ono kod kojeg su jedinične cijene nepopunjenih polja pojedinačno manje od drugog.

1. Riješiti transportni problem:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$a_i$
$I_1$	3	1	4	50
$I_2$	5	8	3	40
$I_3$	2	1	6	85
$I_4$	4	5	0	15
$b_j$	90	75	25	

(rješenje:  $T = 375$ )

2. Riješite transportni problem i izračunajte minimalne troškove transporta

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	
$I_1$	1	1	6	4	90
$I_2$	1	8	10	5	75
$I_3$	4	3	6	2	35
	50	50	85	15	

(rješenje:  $T = 725$ )

3. Riješite problem transporta, nađite optimalni plan i izračunajte minimalni trošak toga plana

				$a_i$	
	4	3	6	15	90
	2	8	7	3	70
	4	5	1	10	30
$b_j$	50	40	85	15	

(rješenje:  $T = 630$ )

4. Riješite transportni problem:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$a_i$
$I_1$	10	12	0	10
$I_2$	8	4	3	15
$I_3$	6	9	4	10
$I_4$	7	8	5	5
$b_j$	20	5	15	

(rješenje:  $T = 170$ )

5. Riješite transportni problem zadan tablicom:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	8	1	2	9	50
$I_2$	5	7	5	3	50
$I_3$	2	3	9	4	75
$b_j$	40	55	60	20	

(rješenje:  $T = 475$ )

6. Iz tri rudnika kapaciteta redom 300, 250 i 450 tona iskopanih dnevno, vozi se ugljen u tri prodajna skladišta ogrijeva:  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ . Dnevne potrebe tih skladišta su redom 300, 400 i 300 tona dnevno. Izračunajte najmanju cijenu prijevoza. Cijene prijevoza po jednoj toni iz prvog rudnika u skladišta redom iznose: 1, 3 i 2 novčane jedinice. Cijena po toni za prijevoz iz drugog rudnika u skladišta je 5, 7 i 10, dok iz trećeg redom 3, 1, i 4 novaca.

(rješenje:  $T = 2400$ )

7. Zadan je transportni problem s četiri ishodišta i tri odredišta. Početno bazično rješenje odredite metodom sjeverozapadnog kuta, a zatim STEP-PING STONE metodom odredite optimalno rješenje. Izračunajte minimalne troškove.

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$a_i$
$I_1$	10	12	0	20
$I_2$	8	4	3	30
$I_3$	6	9	4	20
$I_4$	7	8	5	10
$b_j$	40	10	30	

(rješenje:  $T = 340$ )

8. Odrediti plan transporta sa minimalnim troškovima i izračunati trošak:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
$S_1$	8	18	16	9	10	90
$S_2$	10	12	10	3	15	50
$S_3$	12	15	7	14	4	80
	30	50	40	70	30	

(rješenje:  $T = 1840$ )

## 5.4 Otvoreni problem

Otvoren je problem u kojem je

$$\sum_i a_i \neq \sum_j b_j$$

Problem zatvaramo dodavanjem retka ili stupca. Jedinične su cijene u danom retku ili stupcu jednake nuli. Ukoliko je ponuda veća od potražnje, dodaje se stupac i bazično rješenje u tom stupcu predstavlja količinu koja neće biti distribuirana. U suprotnom, dodaje se redak i bazično rješenje u tom retku predstavlja količinu robe koja neće biti dostavljena.

1. Riješiti transportni problem, izračunati ukupne troškove transporta, a sve za prijevoz robe iz četiri skladišta u tri potrošačka centra

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$a_i$
$S_1$	12	14	2	35
$S_2$	10	6	5	45
$S_3$	8	11	6	30
$S_4$	9	8	7	25
	40	40	20	

(rješenje:  $T = 610$ )

2. Riješiti transportni problem:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	ponuda
$S_1$	0	12	10	30
$S_2$	8	4	3	40
$S_3$	6	9	4	25
$S_4$	7	8	5	20
potražnja	35	35	15	

(rješenje:  $T = 610$ )

3. Građevinsko poduzeće ima pet gradilišta i četiri naselja za svoje djelatnike. Kapacitet prvog naselja je 200 radnika, drugog 100, trećeg 150 i četvrtog 50 radnika. Za prvo gradilište potrebno je 150, za drugo isto toliko, za treće 50, četvrto 60 i za peto 90 radnika. Ako je cijena

prijevoza jednog radnika od  $i$ -tog naselja do  $j$ -tog gradilišta zadana tablicom, nađite optimalni plan prijevoza radnika i izračunati minimalne troškove prijevoza:

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$
$N_1$	4	1	2	5	3
$N_2$	2	1	8	3	5
$N_3$	4	8	7	1	2
$N_4$	6	2	5	7	4

(rješenje:  $T = 940$ )

4. Riješite transportni problem i izračunajte minimalni trošak transporta:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	11	21	13	8	1210
$I_2$	4	7	10	13	1100
$I_3$	8	6	11	4	730
$b_j$	95	325	415	800	

(rješenje:  $T = 10285$ )

5. Treba naći optimalni program transporta iz tri ishodišta u četiri odredišta na temelju podataka o jediničnim troškovima, ponudi i potražnji. Izračunati minimalne troškove transporta.

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	
$I_1$	2	5	9	6	50
$I_2$	1	7	3	8	60
$I_3$	5	9	4	4	60
	15	40	65	50	

(rješenje:  $T = 630$ )

6. Na skladištima je redom po 60,70 i 55 tona robe mjesečno. Šest robnih kuća mjesečno potražuju redom po 20,40,30,55,15 i 35 tona robe. Jedinični troškovi prijevoza iz prvog skladišta u svaku od prodavaonica iznose redom: 3,2,2,3,3 i 1 kunu. Iz drugog skladišta: 2,0,1,1,0 i 1 kunu. Iz trećeg: 1,4,3,4,2 i 0 kuna. Odredite optimalni plan prijevoza i ukupni trošak. (rješenje:  $T = 185$ ).

## 5.5 Problemski zadaci

1. Na četiri kolodvora ima redom 28, 22, 36 i 14 vagona. Šest stanica treba redom: 20, 15, 17, 12, 8 i 28 vagona. Udaljenosti kolodvora i stanica dane su tablicom. Napravite plan prijevoza tako da umnožak broja vagona i kilometara bude najmanji.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$K_1$	20	27	30	35	40	45
$K_2$	18	35	40	42	50	20
$K_3$	40	30	35	25	48	40
$K_4$	21	45	28	32	40	44

2. Transportni problem zadan je tablicom:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	3	1	0	2	8000
$I_2$	2	3	4	0	7000
$I_3$	7	5	6	3	10000
$I_4$	1	1	0	1	3000
$b_j$	6500	7800	2500	9700	

Odredite minimalne troškove transporta.

3. Nadjite optimalni plan prijevoza i izračunajte minimalni trošak transportnog problema zadanog tablicom u kojoj su navedeni ponuda, potražnja i jedinični troškovi transporta.

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$a_i$
$I_1$	3	1	5	150
$I_2$	3	1	2	200
$I_3$	2	2	1	250
$I_4$	4	4	6	350
$I_5$	2	0	3	400
$b_j$	900	200	400	

Rješenja problemskih zadataka :

1. 2647 vagonских kilometara
2.  $T = 45600$  novčanih jedinica
3.  $T = 2950$  novčanih jedinica.

## 5.6 Zadaci s ispita

1. Naći optimalni plan transporta iz tri skladišta u četiri odredišta. Jedinični troškovi, kapaciteti skladišta i potražnja odredišta dani su u tablici:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	
$I_1$	3	15	6	4	50
$I_2$	10	8	10	5	75
$I_3$	4	3	6	10	35
	50	50	85	15	

(rješenje: problem zatvoriti dodavanjem retka  $I_4$  kapaciteta 40, jediničnih cijena 0, minimalni  $T = 900$ )

2. Riješite transportni problem prijevoza koji će minimizirati iznos tonskih kilometara, ako su kilometraže između tvornica i opskrbnih centara, kao ponuda tvornica i potražnja centara u tonama dani u tablici:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Ponuda
$T_1$	25	35	30	160
$T_2$	30	40	40	160
$T_3$	35	55	45	160
$T_4$	15	50	30	240
Potražnja	160	280	320	

(rješenje:  $T_{min} = 23600$ )

3. Transportni je problem zadan tablicom:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	15	15	40	40	80
$I_2$	9	8	10	15	125
$I_3$	23	3	6	42	45
$b_j$	50	60	95	10	

Početno bazično rješenje odredite metodom sjeverozapadnog kornera.

Poboljšavajte početni plan do optimalnog MODI metodom.

(rješenje:  $T_{min} = 2075$ ).

4. Riješite transportni problem, ako svaki neisporučeni transformator donosi štetu od 10 novčanih jedinica. Količine proizvedenih transformatora potražnja za njima i jedinične cijene transporta dani su tablično:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$a_i$
$P_1$	3	4	2	0	240
$P_2$	4	3	5	1	280
$P_3$	2	3	2	4	250
$b_j$	180	160	220	180	

(rješenje:  $T = 1670$ , 30 transformatora ostaje u  $P_2$ ).

5. Riješite transportni problem: nadajte optimalni plan transporta i izračunajte minimalni trošak ako se drugom računskom centru treba isporučiti bar 50% traženih računala. Troškovi transporta, količine računala na raspolaganju i potrebe za računalima dani su tablicom:

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$a_i$
$I_1$	2	5	9	6	80
$I_2$	1	7	3	8	120
$I_3$	5	9	4	4	160
$b_j$	100	40	150	110	

(rješenje: nakon fiktivnog retka uvodi se stupac  $R'_2$  u kojem je potražnja 20, stvarne jedinične cijene podudarne su s cijenama u stupcu  $R_2$ , dok je fiktivna cijena  $M \geq 3 \cdot \max(c_{ij})$ . Ponuda u stupcu  $R_2$  mijenja se na 20. Nakon uobičajene procedure, minimalni trošak je 1140.)

6. Riješite transportni problem, tako da se iz svakog silosa otkupi bar polovica žita. Količina žita u silosima, potražnja otkupnih stanica i cijene po toni žita dani su tablično:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$S_1$	4	3	4	4	200
$S_2$	4	3	6	2	180
$S_3$	4	2	4	3	150
$b_j$	80	60	120	80	

(rješenje:  $T = 1080$ , treći je silos ispražnjen).

## 6.4 Minimizacija vremena transporta

Koeficijenti u funkciji cilja sada se interpretiraju kao duljina putovanja. Zadržev se sastoji u tome da što manja količina robe bude na najduljem putu.

### Zadaci

1. Izuzetno opasan plin treba prevesti željeznicom. Proizvodnja plina, potražnja i vremena transporta u satima zadana su tablično:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	proizvodnja
$P_1$	3	15	6	4	55
$P_2$	10	8	10	5	80
$P_3$	4	3	6	10	40
potrebe	55	55	90	20	

(rješenje: Najbolje što se može postići je da 5t putuje iz  $P_2$  u  $O_3$  10h).

2. U Republici Hrvatskoj iznenada je donesen zakon da se kamioni moraju transportirati željeznicom. U Rijeci, Zadru, Šibeniku i Splitu trebamo redom 180, 160, 90 i 100 vagona za prijevoz kamiona. Kotoriba, Dobova, Ploče i Vinkovci imaju na raspolaganju redom: 120, 160, 80 i 150 vagona. Udaljenosti kolodvora u Rijeci do spomenutih odredišta iznosi redom: 280, 170, 300 i 500km. Udaljenost kolodora u Zadru do spomenutih odredišta su redom: 450, 360, 280 i 600km. Šibenik je udaljen redom do spomenutih odredišta 560, 420, 180 i 680km, dok je iz Splita do odredišta po 600, 500, 100 i 780 kilometara. Napravite plan prijevoza po kojem najmanje vagona putuje najvećom kilometražom.

(rješenje: 130 vagona ipak će putovati 600km od Vinkovaca do Zadra i to će biti vagoni koji će najdalje putovati.)

3. Zadan je transportni problem gdje veličine  $c_{ij} = t_{ij}$  označavaju vremena transporta u satima. Nadjite minimalno vrijeme svih dostava, ako one počinju istovremeno:

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$a_i$
$I_1$	6	4	3	5	80
$I_2$	7	4	3	5	70
$I_3$	8	7	4	3	50
$b_j$	60	60	60	20	

(rješenje: 60 jedinica putuje 6 sati i to se ne može popraviti.)

4. Riba se izlovljava u uzgajalištima  $I_1, I_2, I_3$ . Svako jutro riba kreće put ribarnica koje se nalaze u mjestima  $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$ . Iz uzgajališta  $I_1$  do ribarnica prijevoz traje redom: 2, 5, 9 i 6 sati. Da bi iz  $I_2$  riba došla u spomenute ribarnice treba po 1, 7, 3 i 8 sati. Konačno, prijevozi iz  $I_3$  traju 5, 9, te po 4 sata do ribarnica  $R_3$  i  $R_4$ . Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje ribe na najduljem putu. Na uzgajalištima je na raspolaganju:  $80t, 120t, 160t$  dnevno, a ribarnice potražuju redom:  $100t, 40t, 150t$  i  $110t$  dnevno.

(rješenje:  $110t$  ribe putovat će  $4^h$ , dok će ostala riba putovati kraće. )