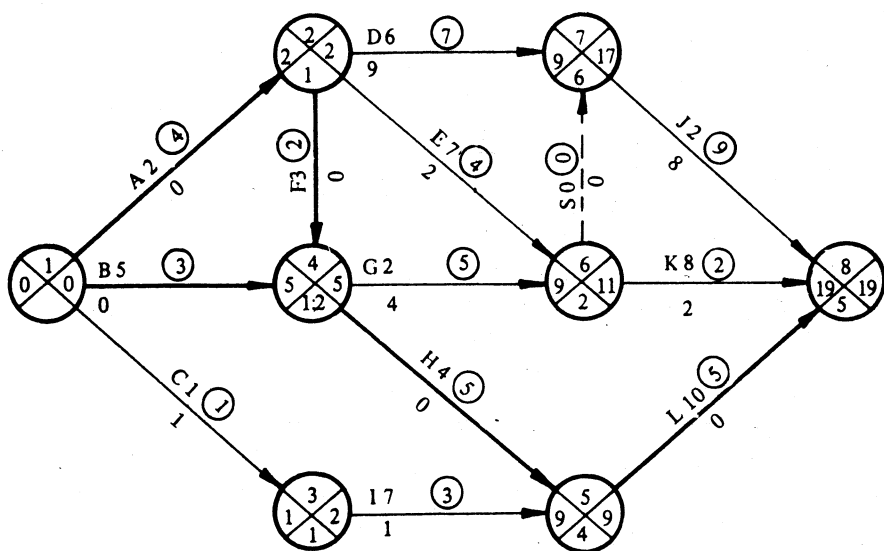


## 9. Zadatak

Projekat čiji je mrežni dijagram, sa izvršenom analizom vremena, dat na slici 1. treba izvršiti sa raspoloživom radnom snagom od 14 radnika. Svaki radnik može biti angažovan na svakoj aktivnosti. Na mrežnom dijagramu su naneseni podaci, sa leve strane aktivnosti: oznaka aktivnosti, trajanje aktivnosti i (u kružićima) intenzitet radne snage za datu aktivnost ( $r_{ij}$ ), tj. broj radnika koji treba da rade na aktivnosti da bi bila izvršena u navedenom vremenu ( $t_{ij}$ ) sa desne strane svake aktivnosti je nanesena njena ukupna vremenska rezerva ( $St$ ) ij. Projekat ima dva kritična puta. Poštujući tehnološku uslovljenost pojedinih aktivnosti, odrediti vremena njihovih početaka, koja obezbeđuju obavljanje projekta u najkraćem roku sa raspoloživom radnom snagom.



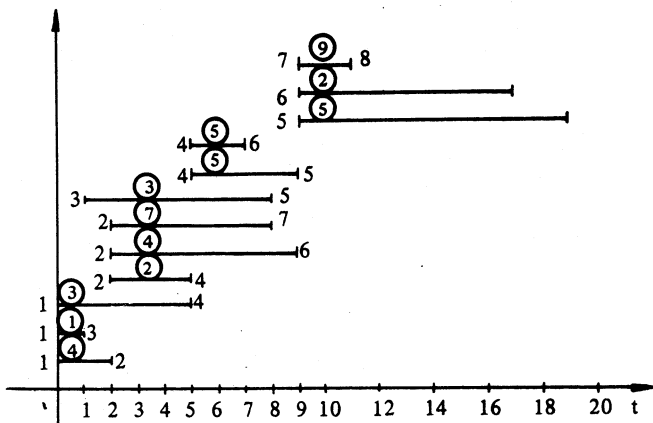
Slika 1.

**Rešenje.** Problem se sastoji u iznalaženju optimalne raspodele jednog resursa (radne snage) da bi se projekat obavio u najkraćem mogućem vremenskom intervalu. Za rešenje ovog problema koristiće se Grey-Kidd-ov algoritam <sup>1)</sup>.

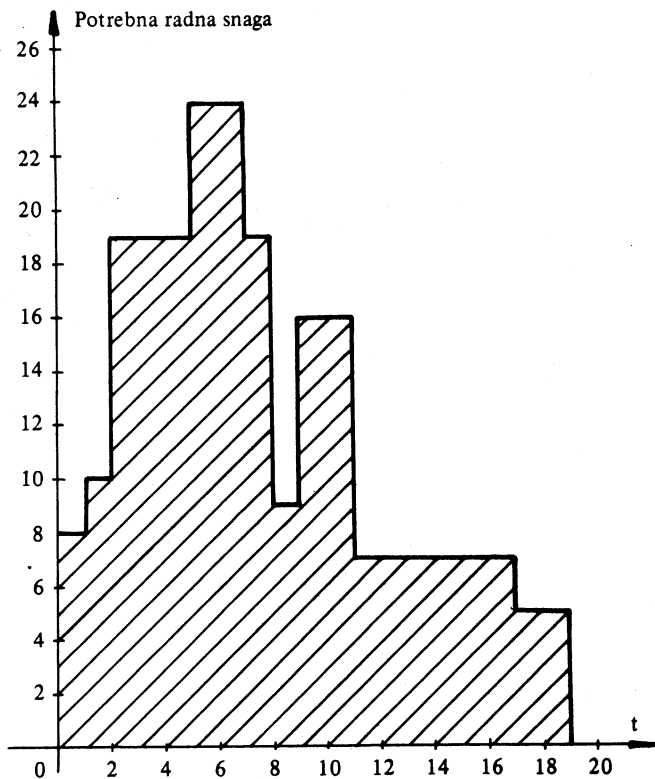
Polazi se od određivanja linijskog dijagrama (Gantograma) projekta i grafičkog prikaza potrebne radne snage (resursa) u pojedinim vremenskim intervalima, kao što je predstavljeno na slici 2a i 2b.

1) Teorijsko obrazloženje ovog algoritma videti u knjizi: J.J. Petrić, OPERACIONA ISTRAŽIVANJA II, Savremena administracija, 1976, Beograd.

Dijagram potrebnog resursa (slika 2b) ukazuje da je za izvršenje projekta, prema vremenskoj analizi, potrebno najviše 24 radnika u vremenskom intervalu od dve (6. i 7.) vremenske jedinice (v.j.). U trećoj, četvrtoj, petoj i osmoj v.j. potrebno je 19, a u desetoj i jedanaestoj 16 radnika. To ukazuje da je nemoguće



Slika 2a.



Slika 2b.

obaviti projekat sa raspoloživom radnom snagom u terminu koji je dobijen vremenskom analizom. (Vremenska analiza se obavlja pod pretpostavkom da će se u svakom vremenskom intervalu raspolagati potrebnom količinom resursa). Međutim, postoji dosta vremenskih intervala ( u našem primeru) u kojima postoji višak resursa. Potrebe resursa su: 8 radnika u 1. v.j., 10 radnika u 2. v.j., 9 radnika u 9. v.j., 7 radnika u 12., 13., 14., 15., 16. i 17. v.j. i samo 5 radnika u 18. i 19. v.j. Drugim rečima, za ovakvo obavljanje projekta trebalo bi angažovati još

$$(24 - 14) \cdot 2 + (19 - 14) \cdot 4 + (16 - 14) \cdot 2 = 44 \text{ radnik} \cdot (\text{v.j.}).$$

Takođe bi trebalo obezbediti posao u iznosu

$$(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 9) \cdot 1 + (14 - 7) \cdot 6 + (14 - 5) \cdot 2 = 76 \text{ radnik} \cdot (\text{v.j.}).$$

Kako bi trebalo u tačno određenim vremenskim intervalima nalaziti nedostajuću radnu snagu i posao za suvišnu, nije teško zaključiti da je ovakva organizacija izvršenja projekta teška. Zbog toga pristupamo određivanju vremena za koje se može obaviti projekat sa raspoloživom radnom snagom. Pri primeni Grey-Kidd-ovog algoritma prednost će imati aktivnosti sa manjom ukupnom vremenskom rezervom i većim intenzitetom resursa  $r_{ij}$ . Aktivnosti jednom započete ne mogu se prekidati. Postupak ćemo sprovesti po etapama.

**1. etapa.** Prvi vremenski interval u kome nema promene u odvijanju aktivnosti, odnosno u radnoj snazi je  $[0;1]$ , jer toliko traje aktivnost (1-3). U ovom intervalu se odvijaju aktivnosti (1-2), (1-3) i (1-4). Na osnovu ukupne vremenske rezerve određuje se redosled prvenstva odvijanja aktivnosti. Ustanovljava se potreban resurs za obavljanje aktivnosti u datom intervalu. Ukoliko potrebni resursi premašuju raspoložive, vrši se pomeranje početka aktivnosti koje su poslednje po redosledu prvenstva. Izloženo je, radi bolje preglednosti, podesno predstaviti tabelarno.

[0:1]

Tabela 1

Pripadajuća aktivnost (i-j)	(1-2)	(1-3)	(1-4)	Ukupno
Ukupna vremenska rezerva ( $S_t$ ) <sub>ij</sub>	0	1	0	
Intenzitet resursa $r_{ij}$	4	1	3	8
Redosled prvenstava (R.P.)	1	3	2	
Angažovani resurs (A.R.)	4	1	3	8

Pošto je za istovremeno obavljanje tri navedene aktivnosti potrebno 8 radnika, ne treba odlagati početak odvijanja nijedne od ovih aktivnosti u prvom vremenskom periodu.

Mada su aktivnosti (1-2) i (1-4) imale istu ukupnu vremensku rezervu 0 (kritične su), kod rangiranja redosleda obavljanja dali smo prednost aktivnosti (1-2), zbog toga što je njen intenzitet resursa 4, a intenzitet resursa aktivnosti (1-4) je 3. Smatrali smo da će se lakše uklopiti kasnije aktivnost za čije je obavljanje potrebno manje resursa. Znači, u ovom intervalu će se obavljati aktivnosti (1-2), (1-3) i (1-4), a biće angažovano 8 radnika.

**2. etapa.** Razmatra se vremenski interval [1;2], jer u njemu počinje aktivnost (3-5), a završava se aktivnost (1-2). U ovom intervalu odvijaju se aktivnosti (1-2), (1-4) i (3-5). One poseduju svojstva, značajna za analizu resursa, predstavljena tabelom 2.

[1;2] Tabela 2.

(i-j)	(1-2)	(1-4)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	1	
$r_{ij}$	4	3	3	10
R.P.	1	2	3	
A.R.	4	3	3	10

Potrebno je 10 radnika, pa se sve aktivnosti ovoga intervala odvijaju bez odlaganja:

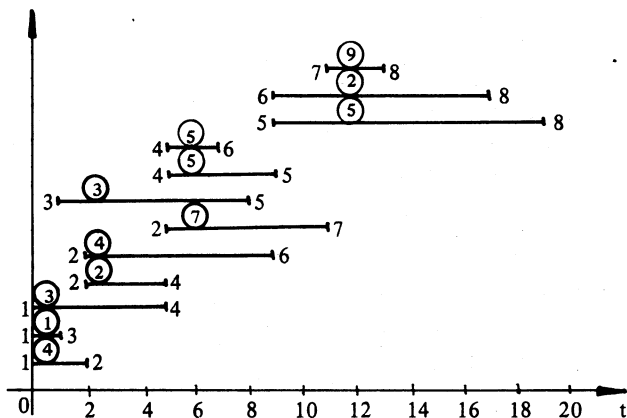
**3. etapa.** Razmatra se vremenski interval [2;5]. U njemu se odvijaju aktivnosti (1-4), (2-4), (2-6), (2-7) i (3-5). Svojstva su im predstavljena tabelom 3.

[2;5] Tabela 3.

(i-j)	(1-4)	(2-4)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	2	9	1	
$r_{ij}$	3	2	4	7	3	19
R.P.	1	3	4	5	2	
A.R.	3	2	4	0	3	12

Kod određivanja redosleda prvenstva rukovodili smo se sledećim. Aktivnost (1-4) je ranije započeta i kritična je, te je dobila prvo mesto. Aktivnost (3-5) je

na drugom mestu, mada ima veću ukupnu vremensku rezervu od aktivnosti (2-4), jer je ranije započeta, a usvojili smo da se ne mogu prekidati započete aktivnosti. Kako nemamo 19 radnika, početak aktivnosti (2-7) moramo odložiti do kraja ovog vremenskog intervala, odnosno sada ćemo smatrati da aktivnost (2-7) može početi tek po isteku pet vremenskih jedinica. Ovo pomeranje uslovljava najranije nastupanje događaja 7 posle 11. v.j. Sada su vremenske rezerve ( $S_t$ ) (2-7) = 6 v.j., ( $S_t$ ) (7-8) = 6 v.j. Stanje posle ove etape prikazano je linijskim dijagramom na slici 3.



Slika 3.

4. etapa. Razmatra se vremenski interval [5;7]. U njemu se odvijaju aktivnosti (2-6), (2-7), (3-5) i (4-6), čija su svojstva data tabelom 4.

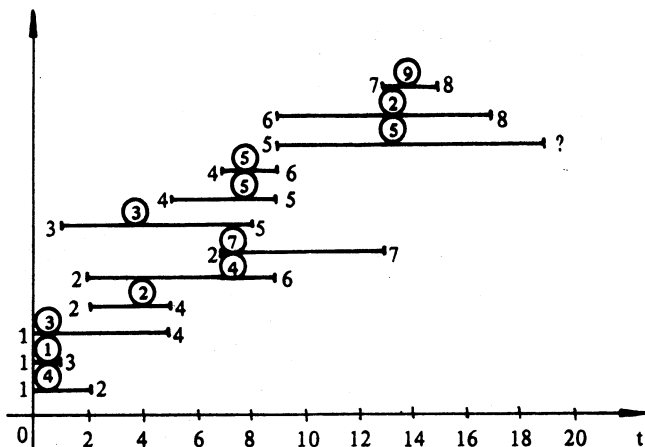
[5;7]

Tabela 4.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	6	1	0	4	
$r_{ij}$	4	7	3	5	5	24
R.P.	2	5	1	3	4	
A.R.	4	0	3	5	0	12

Kod određivanja redosleda prvenstva prvo smo razmatrali ranije započete aktivnosti (2-6) i (3-5), a potom ostale aktivnosti poređali prema vrednosti ukupne vremenske rezerve. Pošto je potrebno 24 radnika za istovremeno obavljanje svih pet aktivnosti, prinuđeni smo da početak aktivnosti (2-7) i (4-6) pomerimo do isteka razmatranog vremenskog intervala. Znači, ove aktivnosti će početi po isteku 7 v.j. Ovo pomeranje je uslovljavalo najranije nastupanje događaja 7 posle 13. v.j. Vremenske rezerve su: ( $S_t$ ) (2-7) = 4 v.j., ( $S_t$ ) (7-8) = 4 v.j.,

$(S_t)_{(4-6)} = 2$  v.j. Stanje posle ove etape je predstavljeno linijskim dijagramom na slici 4.

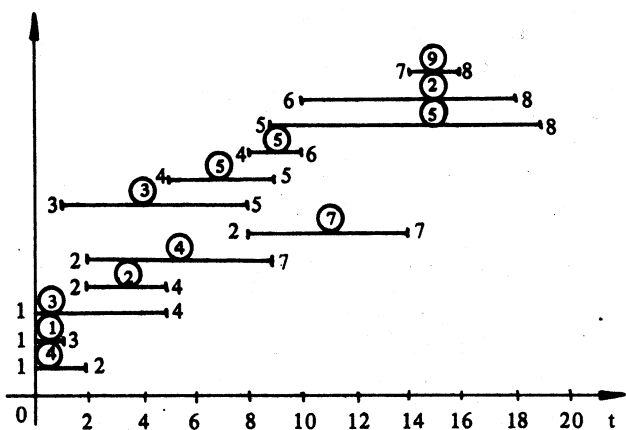


Slika 4.

5. etapa. Razmatra se vremenski interval  $[7;8]$ . U njemu se odvijaju aktivnosti (2-6), (2-7), (3-5), (4-5) i (4-6). Svojstva ovih aktivnosti su data u tabeli 5.

$[7;8]$	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	4	1	0	2	
$r_{ij}$	4	7	3	5	5	24
R.P.	3	5	2	1	4	
A.P.	4	0	3	5	0	12

Pri određivanju redosleda prvenstva prvo smo razmatrali ranije započete aktivnosti (2-6), (3-5) i (4-5), a potom aktivnosti (2-7) i (4-6). Opet zaključujemo da se mora odložiti početak aktivnosti (2-7) i (4-6) do isteka 8 v.j. Tada će aktivnosti (2-7) i (7-8) imati ukupnu vremensku rezervu od 3 v.j., a aktivnost (4-6) od 1 v.j. Događaj 7 može najranije nastupiti posle 14. v.i., a događaj 6 posle 10. v.j. Stanje posle ovoga pomeranja predstavljeno je slikom 5.



Slika 5.

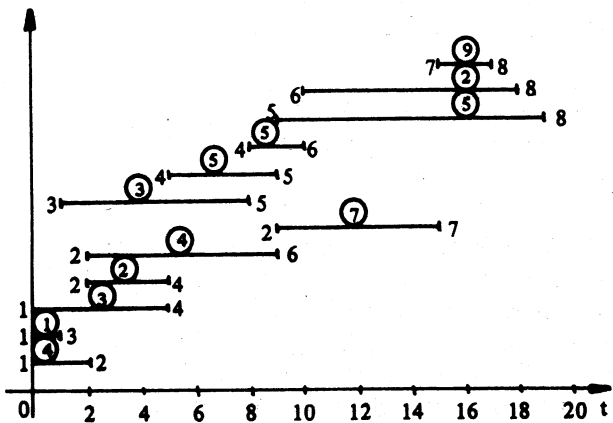
6. etapa. Razmatra se vremenski interval  $[8;9]$ , sa aktivnostima (2-6), (2-7), (4-5) i (4-6), čije su karakteristike predstavljene tabelom 6.

$[8;9]$

Tabela 6

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	3	0	1	
$r_{ij}$	4	7	5	5	21
R.P.	2	4	1	3	
A.R.	4	0	5	5	14

Konstatujemo da se mora odložiti početak aktivnosti (2-7) do isteka 9 v.j. Ovo uslovljava najranije nastupanje događaja 7 posle 15 v.j., odnosno  $(S_t)_{(2-7)} = 2$  v.j. i  $(S_t)_{(7-8)} = 2$  v.j. Stanje posle ove etape je prikazano linijskim dijagramom na slici 6.

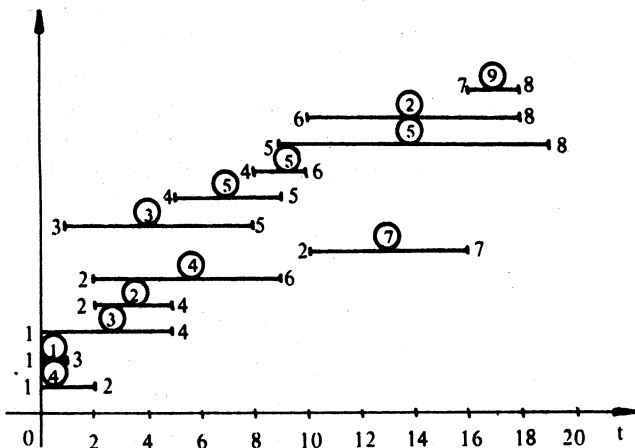


Slika 6.

7. etapa. Razmatra se vremenski interval [9;10] sa aktivnostima (2-7), (4-6) i (5-8), čije su karakteristike date u tabeli 7.

[9; 10]	Tabela 7.			
(i-j)	(2-7)	(4-6)	(5-8)	Ukupno
(St)ij	2	1	0	
$\eta_{ij}$	7	5	5	17
R.P.	3	1	2	
A.R.	0	5	5	10

Kod određivanja redosleda prvenstva aktivnosti (4-6) smo dodelili prvo mesto, zbog toga što je ranije započeta. I u ovoj etapi dolazi do pmeranja početka aktivnosti (2-7) za još jednu vremensku jedinicu, te se za toliko smanjuje njena ukupna vremenska rezerva, kao i aktivnosti (7-8), jer je sada najranije nastupanje događaja 7 posle 16. v.j. Stanje posle ove etape je prikazano linijskim dijagramom na slici 7.



Slika 7.

8. etapa. Razmatra se vremenski interval [10;16] u kome se odvijaju aktivnosti (2-7), (5-8) i (6-8), čije su karakteristike date tabelom 8.



[10; 16]

Tabela 8.

(i-j)	(2-7)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	1	
$r_{ij}$	7	5	2	14
R.P.	2	1	3	
A.R.	7	5	2	14

Karakteristika ove etape je da je potrebno 14 radnika, te neće doći do odlaganja izvršenja aktivnosti.

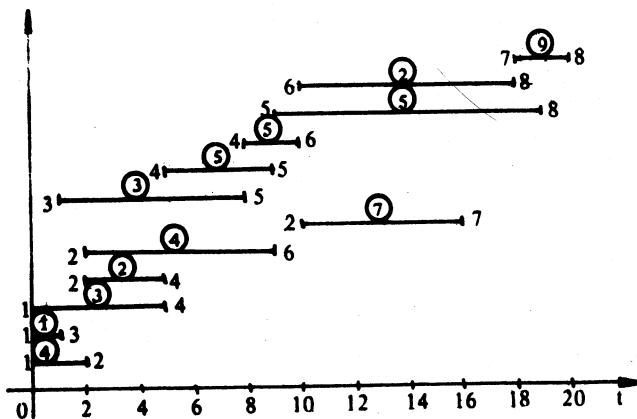
9. etapa. Razmatra se vremenski interval [16;18] u kome se odvijaju aktivnosti (5-8), (6-8) i (7-8), čije su karakteristike date tabelom 9.

[16;18]

Tabela 9.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	1	1	
$r_{ij}$	5	2	9	16
R.P.	1	2	3	
A.R.	5	2	0	7

Držeći se principa, da se ne prekidaju započete aktivnosti, morali smo pomeriti početak aktivnosti (7-8) do isteka 18. v.j. iako smo svesni da nam to produžuje trajanje projekta do 20 v.j. i da u ovom vremenskom intervalu angažujemo 7 radnika. Sada je  $(S_t)_{(7-8)} = -1$  v.j., što samo ukazuje da se izvršenje projekta produžava za 1 v.j. u odnosu na prvobitno određeno vreme  $T_n = 19$  v.j. Stanje posle ovoga pomeranja predstavljeno je slikom 8.



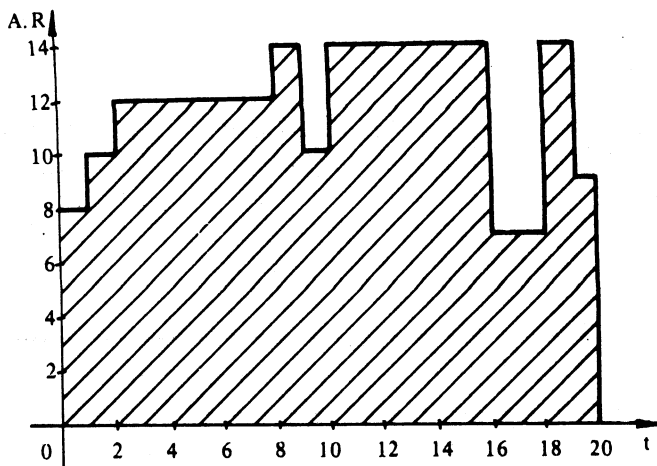
Slika 8.

**10 etapa.** Razmatra se vremenski interval [18;19] sa aktivnostima (5-8) i (7-8), čije su karakteristike date u tabeli 10.

[18;19]		Tabela 10.	
(i-j)	(5-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	
$r_{ij}$	5	9	14
R.P.	1	2	
A.R.	5	9	14

U ovoj etapi ne dolazi do odlaganja izvršenja aktivnosti.

**11. etapa** Razmatra se vremenski interval [19;20], u kome se odvija samo aktivnost (7-8). Kako je za njeno obavljanje potrebno 9 radnika, to će ona biti i obavljena u ovom periodu.



Slika 9.

Na slici 9. je grafički prikazana angažovanost radne snage u vremenskom periodu. [0;20]. Raspolaze se sa  $14 \cdot 20 = 280$  radnik  $\cdot$  (v.j.), a neiskorišćeno je :  $(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 12) \cdot 6 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 7) \cdot 2 + (14 - 9) \cdot 1 = 45$  radnik  $\cdot$  (v.j.). Znači, neiskorišćenost resursa iznosi  $(45 : 280) \cdot 100 = 16,07\%$ . Ukoliko ne smatramo da su neiskorišćeni radnici koji nisu angažovani u 20. v.j., jer se mogu blagovremeno uputiti na drugi posao, onda neiskorišćenost resursa iznosi  $(40 : 280) \cdot 100 = 14,2\%$ .

## 10. Zadatak

Rešiti problem tretiran u 9. zadatku sa jedinom izmenom, da se mogu prekidati započete aktivnosti.

**Rešenje.** Za rešavanje ovoga zadatka korišćićemo takođe Grey-Kidd-ov algoritam. Rešenje ćemo dati u vidu tabela sa neophodnim komentarom koji će se odnositi samo na razlike u odnosu na prethodni zadatak.

Mrežni dijagram, linijski dijagram, dijagram potrebnog resursa i prve dve etape analize resursa su isti kao u 9. zadatku.

### 3. etapa

[2; 5]

Tabela 11.

(i-j)	(1-4)	(2-4)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	2	9	1	
$r_{ij}$	3	2	4	7	3	19
R.P.	1	2	4	5	3	
A.R.	3	2	4	0	3	12

Pomera se početak aktivnosti (2-7) do kraja 5. v.j. (kao i u 9. zadatku). Ovo uslovljava:  $t_7^{(0)} = 11$  v.i.,  $(S_t)_{(2-7)} = 6$  v.j.,  $(S_t)_{(7-8)} = 6$  v.j., odgovara slika 3. u 9. zadatku.

### 4. etapa

[5;7]

Tabela 12.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	6	1	0	4	
$r_{ij}$	4	7	3	5	5	24
R.P.	3	5	2	1	4	
A.R.	4	0	3	5	0	12

Pomera se početak aktivnosti (2-7) i (4-6) do kraja 7. v.j. Ovo uslovljava:  $t_7^{(0)} = 13$  v.j.,  $t_6^{(0)} = 9$  v.j. (ne menja se),  $(S_t)_{(2-7)} = 4$  v.j.,  $(S_t)_{(7-8)} = 4$  v.j.,  $(S_t)_{(4-6)} = 2$  v.j. Stanje je predstavljeno slikom 4. u 9. zadatku.

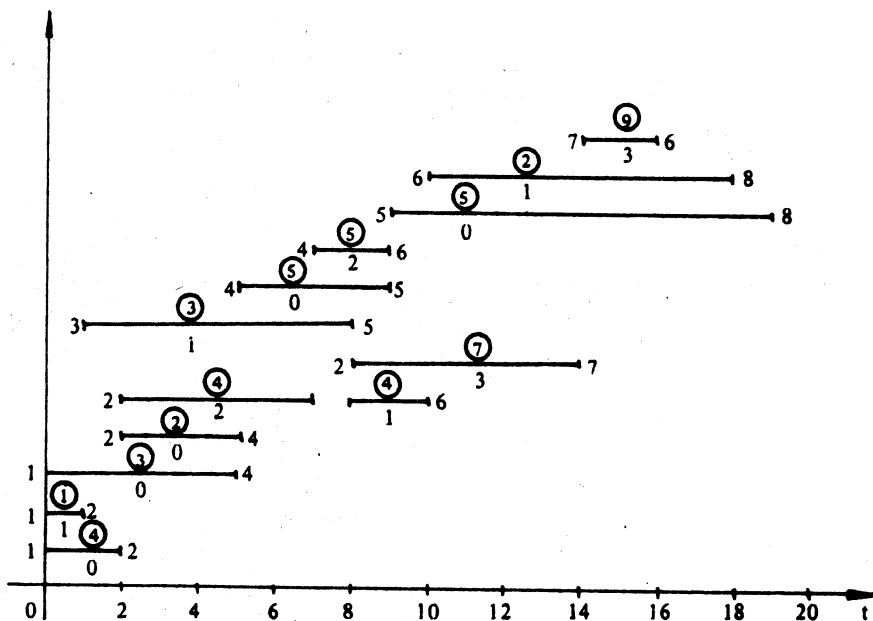
## 5. etapa

[7; 8]

Tabela 13.

(i j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	4	1	0	2	
$r_{ij}$	4	7	3	5	5	24
R.P.	4	5	2	1	3	
A.R.	0	0	3	5	5	13

Odlaze se izvršenje aktivnosti (2-7) i dela aktivnosti (2-6) do kraja 8. v.j. Ovo uslovljava:  $t_6^{(0)} = 10$  v.j.,  $t_7^{(0)} = 14$  v.j.,  $(S_t)_{(2-6)} = 1$  v.j.,  $(S_t)_{(2-7)} = 3$  v.j.,  $(S_t)_{(6-8)} = 1$  v.j.,  $(S_t)_{(7-8)} = 3$  v.j. Vremenska rezerva  $(S_t)_{(2-6)}$  odnosi se na deo ove aktivnosti čije je izvršenje odgođeno. Stanje posle ove etape dato je na slici 10.



Slika 10.

### 6. etapa

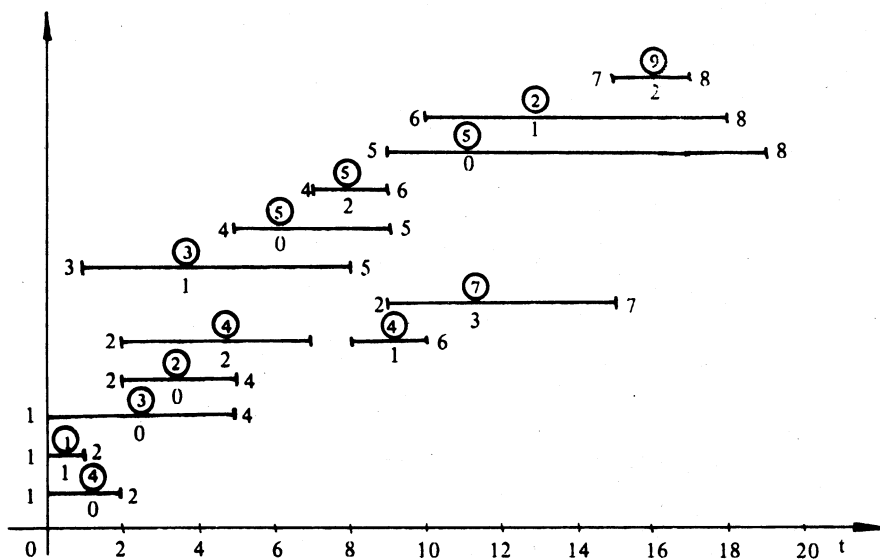
[8; 9]

Tabela 14.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	3	0	2	
$r_{ij}$	4	7	5	5	21
R.P.	2	4	1	3	
A.R.	4	0	5	5	14

Odlaze se početak aktivnosti (2-7) do kraja 9. v.j. Ovo uslovljava:

$t_7^{(0)} = 15$  v.j.,  $(S_{ts})_{(2-7)} = (S_t)_{(7-8)} = 2$  v.j. Stanje je dato slikom 11.



Slika 11.

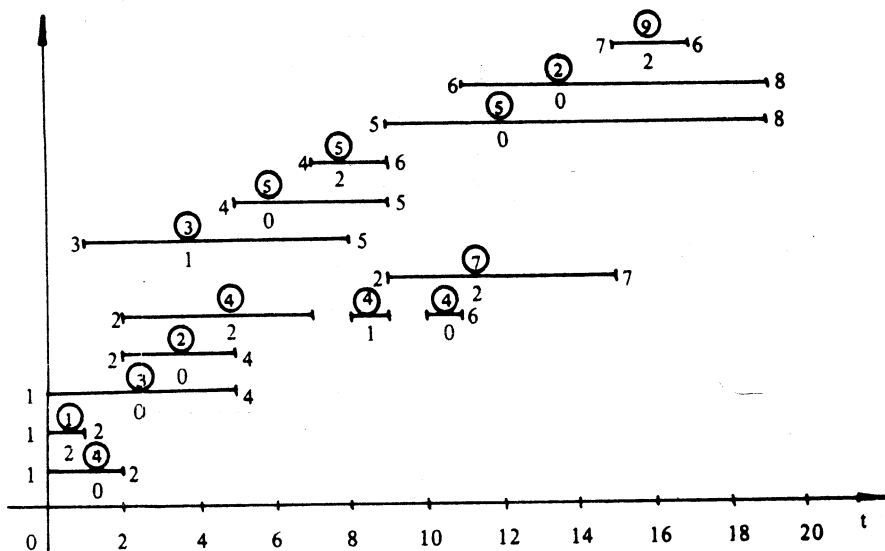
### 7. etapa

[9; 10]

Tabela 15.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(5-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	2	0	
$r_{ij}$	4	7	5	16
R.P.	2	3	1	
A.R.	0	7	5	12

Pomera se izvršenje dela aktivnosti (2-6) do kraja 10. v.j. Ovo je uslovilo:  $t_6^{(0)} = 11$  v.j.,  $(S_t)_{(2-6)} = (S_t)_{(6-8)} = 0$ . Stanje je dato slikom 12.



Slika 12.

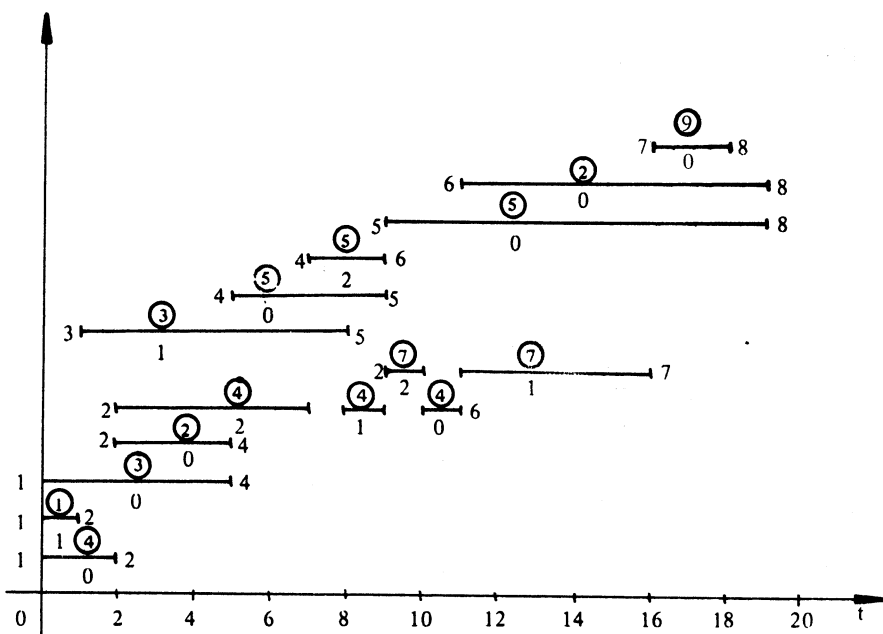
### 8. etapa

[10; 11]

Tabela 16.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(5-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	2	0	
$r_{ij}$	4	7	5	16
R.P.	1	3	2	
A.R.	4	0	5	9

Pomera se izvršenje dela aktivnosti (2-7) do kraja 11. v.j. Ovo uslovljava  $t_7^{(0)} = 16$  v.j.,  $(S_t)_{(2-7)} = (S_t)_{(7-8)} = 1$  v.j. Stanje je dato slikom 13.



Slika 13.

**9. etapa**

[11; 16]

Tabela 17.

(i-j)	(2-7)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	0	
$r_{ij}$	7	5	2	14
R.P.	3	1	2	
A.R.	7	5	2	14

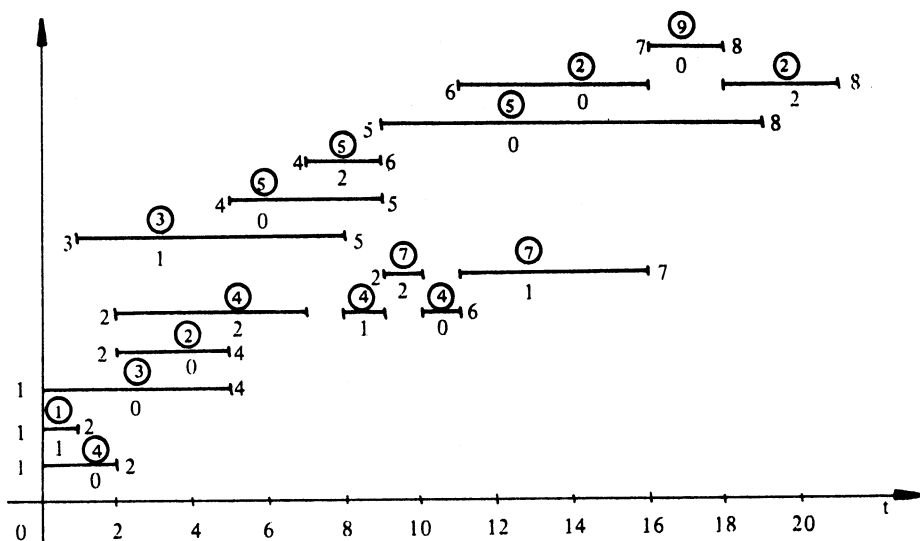
**10. etapa**

[16; 18]

Tabela 18.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	0	
$r_{ij}$	5	2	9	16
R.P.	2	3	1	
A.R.	5	0	9	14

Smatrajući da je najpodesnije odložiti izvršenje aktivnosti sa najmanjim intenzitetom resursa, to je urađeno sa delom aktivnosti (6–8). Ovo je uslovilo:  $t_8^{(0)} = 21$  v.j.,  $(S_t)_{(6-8)} = -2$  v.j. Ovo znači da će izvršenje projekta kasniti 2 v.j. u odnosu na ranije proračunato vreme. Stanje je dato slikom 14.



Slika 14

### 11. etapa

[18; 19]

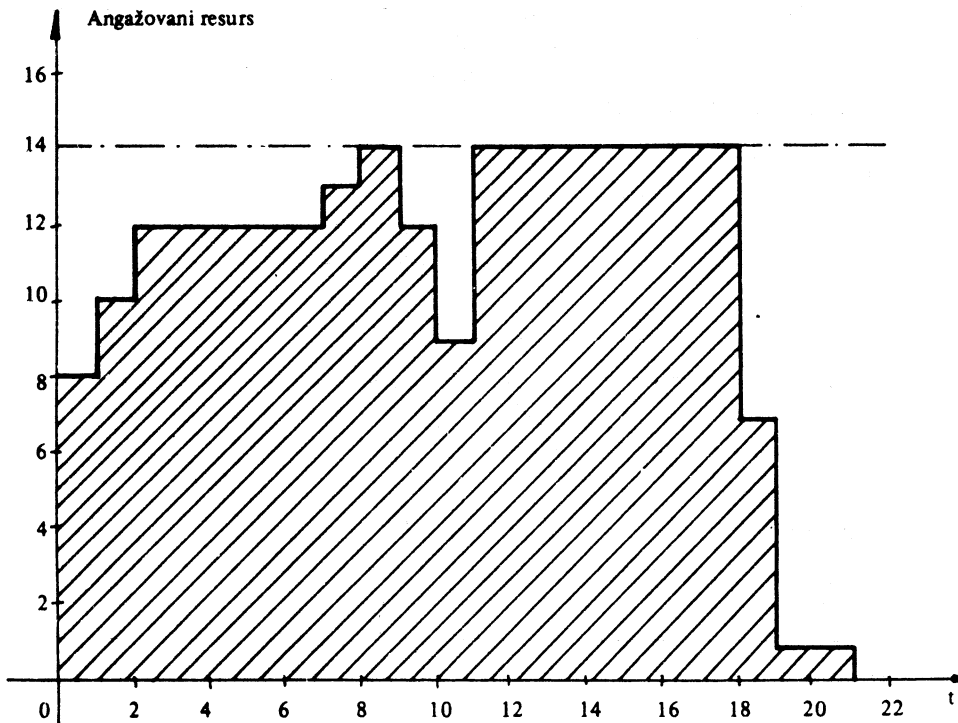
Tabela 19.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	-2	
$r_{ij}$	5	2	7
R.P.	2	1	
A.R.	5	2	7

12. etapa. Razmatra se vremenski interval [ 19; 21]. Odvija se aktivnost (6–8) i angažuju se samo dva radnika.

Angažovanje resursa (radne snage), u toku izvršenja projekta, je prikazano na slici 15.





Slika 15.

Raspolaže se sa  $14 \cdot 21 = 294$  radnik  $\cdot$  (v.j.). Neiskorišćeno je:  $(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 12) \cdot 6 + (14 - 13) \cdot 1 + (14 - 9) \cdot 1 + (14 - 2) \cdot 2 = 59$  radnik  $\cdot$  (v.j.). Procenat neiskorišćenosti je  $(59 : 294) \cdot 100 = 19,73\%$ . Smatrajući da se blagovremeno mogu premeštati na drugi posao radnici koji nisu angažovani na poslednjim etapama projekta, neiskorišćenost se smanjuje na 28 radnik  $\cdot$  (v.j.), odnosno procenat neiskorišćenosti na  $(28 : 294) \cdot 100 = 9,52\%$ .

(Ova stranica je ostavljena prazna)