

7.3. ANALIZA VREMENA I TROŠKOVA – METODA KRITIČNOG PUTA –

7. Zadatak

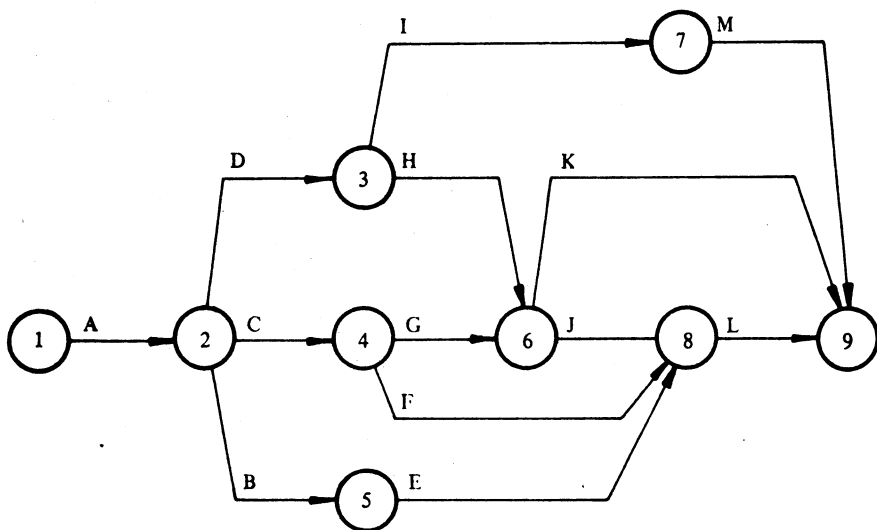
Za projekat čija je lista aktivnosti data u tabeli 1:

- a) nacrtati mrežni dijagram i numerisati isti rastućim uzastopnim numerisanjem po pravilu Fulkersona;
- b) izvršiti analizu vremena pri normalnom trajanju aktivnosti;
- c) odrediti kritični put pri usiljenom trajanju aktivnosti;
- d) odrediti direktne troškove projekta pri normalnom i usiljenom trajanju aktivnosti i jedinični priraštaj direktnih troškova za svaku aktivnost;
- e) odrediti najmanje moguće direktne troškove projekta pri trajanju projekta jednakom dužini usiljenog kritičnog puta.

Rešenje:

a) Mrežni dijagram je dat na slici 1. Isti je numerisan uzastopnim rastućim numerisanjem primenom pravila Fulkersona. Ukupno ima 9 događaja. Sa leve strane aktivnosti (gledano u smeru odvijanja aktivnosti) nanete su oznake aktivnosti.

Aktivnost		Trajanje (v.j.)		Direktni troškovi	
oznaka	zavisi od	normalno t_n	usiljeno t_u	normalno C_n	usiljeno C_u
A	nezavisna	10	5	150	300
B	A	6	3	170	290
C	A	6	4	270	330
D	A	10	5	350	700
E	B	4	1	150	300
F	C	20	10	700	1200
G	C	3	1	300	360
H	D	14	7	400	820
I	D	22	15	500	990
J	G, H	4	3	300	300
K	G, H	10	5	500	1000
L	E, F, J	8	8	700	700
M	I	5	2	240	480



Slika 1

b) Analiza vremena počinje određivanjem najranijeg nastupanja događaja po obrascu

$$t_j^{(0)} = \max_i \{t_i^{(0)} + (t_e)_{ij}\}, \text{ za } j = 2, 3, \dots, n,$$

usvojeno je $t_1^{(0)} = 0$.

Ova vremena su unesena u levim (prednjim) kvadrantima krugova (predstavnik događaja) mrežnog dijagrama na slici 2. Takođe su data u tabeli 2. U donjem kvadrantu kruga upisan je broj početnog događaja aktivnosti na osnovu koje je određeno najranije nastupanje događaja.

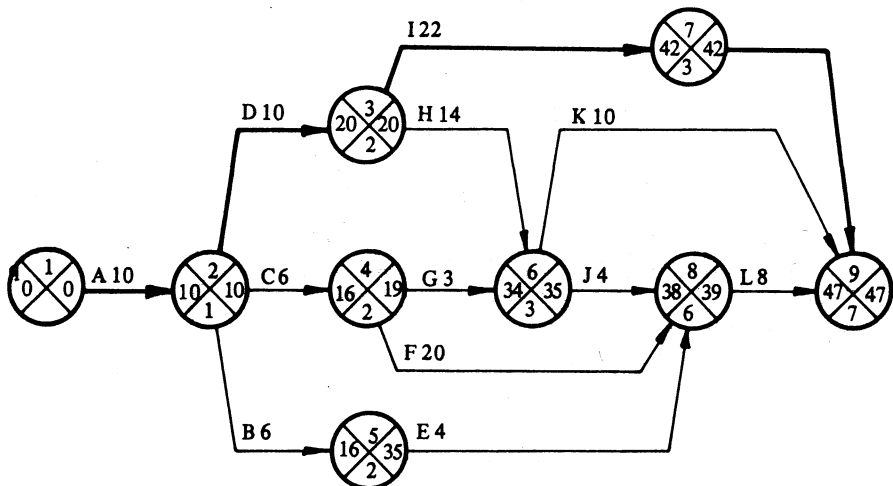
Kao drugi korak u analizi vremena određuje se najkasnije nastupanje događaja koristeći se izrazom

$$t_i^{(1)} = \min_j \{t_j^{(1)} - (t_e)_{ij}\}, \text{ za } i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1,$$

usvojeno je $t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$.

Ova vremena su unesena u desne kvadrante krugova mrežnog dijagrama na slici 2, a takođe su data u zadnjoj koloni tabele 2.

U mrežnom dijagramu na slici 2. sa leve strane orijentisanih duži nanete su oznake aktivnosti i normalno trajanje aktivnosti u vremenskim jedinicama, u gornjim kvadrantima krugova brojevi odgovarajućih događaja. Kritični put pri normalnom trajanju aktivnosti je naznačen punim linijama.



Slika 2.

Kritični put se određuje kao treći korak u analizi vremena. Može se odrediti po određivanju najranijeg nastupanja događaja, na taj način što se polazi od

završnog događaja i ide preko događaja čiji su brojevi upisani u donjim kvadrantima krugova dok se ne stigne do početnog događaja. U našem primeru polazi se od događaja 9 i ide na događaj 7, jer je u donjem kvadrantu kruga koji predstavlja događaj 9 ubeležen broj 7. Od događaja 7 ide se preko događaja 3 i 2 do događaja 1. Znači kritični put sačinjavaju aktivnosti A-D-I-M. Trajanje kritičnog puta iznosi 47 vremenskih jedinica.

Naravno, kada se odredi najkasnije nastupanje događaja, onda to vreme služi za proveru ili određivanje kritičnog puta, jer za događaje na kritičnom putu moraju biti ista vremena najranijeg i najkasnijeg nastupanja.

Vremenske rezerve se određuju na sledeći način.

Ukupna vremenska rezerva aktivnosti (i-j) određuje se korišćenjem izraza

$$(S_t)_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Slobodna vremenska rezerva prve vrste ili prethodna slobodna vremenska rezerva određuje se kao

$$(S'_s)_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Slobodnu vremenska rezerva druge vrste ili naredna slobodna vremenska rezerva određuje se po izrazu

$$(S''_s)_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(1)} - t_{ij}$$

Nezavisna vremenska rezerva određuje se po izrazu

$$(S_n)_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(1)} - t_{ij}$$

Vremenska rezerva događaja ili uslovna vremenska rezerva određuje se koristeći se izrazom

$$S_i = t_i^{(1)} - t_i^{(0)}$$

U gornjim izrazima su:

t_{ij} — trajanje aktivnosti (i - j);

$t_i^{(0)}$ — najranije nastupanje događaja i ili najraniji početak aktivnosti (i-j);

$t_i^{(1)}$ — najkasnije nastupanje događaja i, ili najkasniji početak aktivnosti (i-j);

$t_j^{(0)}$ — najranije nastupanje događaja j;

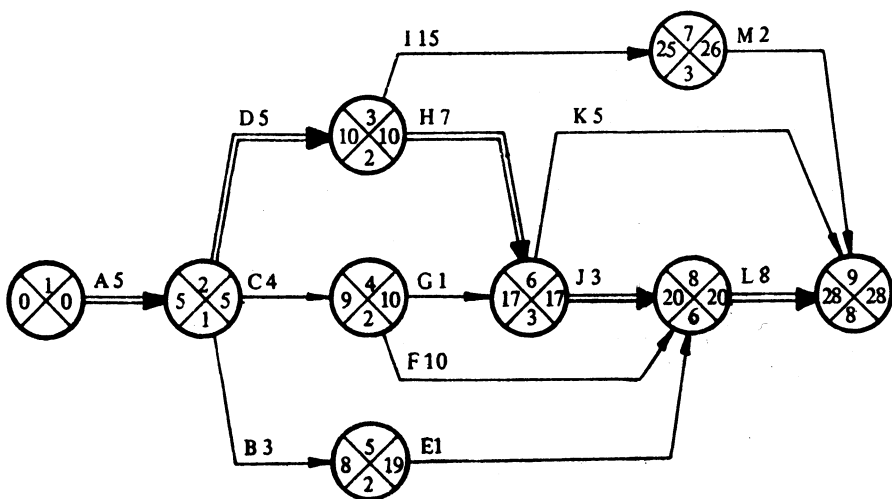
$t_j^{(1)}$ — najkasnije nastupanje događaja j, ili najkasniji završetak aktivnosti (i-j).

Vrednosti svih vremenskih rezervi date su u tabeli 2. U tabeli 2. nije navedena vremenska rezerva završnog (devetog) događaja, ali kako ovaj događaj mora biti na kritičnom putu, to i njegova vremenska rezerva mora biti jednaka nuli.

Tabela 2

Aktivnost			Početni događaj		Završni događaj		Vremenske rezerve				
oznaka	1-j	trajanje t_{ij}	$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(1)}$	$(S_T)_{ij}$	$(S_S)_{ij}$	$(S_D)_{ij}$	$(S'_D)_{ij}$	$(S_N)_{ij}$	S_i
A	1-2	10	0	0	10	10	0	0	0	0	0
B	2-5	6	10	10	16	35	19	0	19	0	0
C	2-4	6	10	10	16	19	3	0	3	0	0
D	2-3	10	10	10	20	20	0	0	0	0	0
E	5-8	4	16	25	38	39	19	18	0	-1	19
F	4-8	20	16	19	38	39	3	2	0	-1	3
G	4-6	3	16	19	34	35	16	15	13	12	3
H	3-6	14	20	20	34	35	1	0	1	0	0
I	3-7	22	20	20	42	42	0	0	0	0	0
J	6-8	4	34	35	38	39	1	0	0	-1	1
K	6-9	10	34	35	47	47	3	3	2	2	1
L	8-9	8	38	39	47	47	1	1	0	0	1
M	7-9	5	42	42	47	47	0	0	0	0	0

c) Analiza vremena pri usiljenom trajanju aktivnosti vrši se kao i pri normalnom trajanju. Naravno, primenjuju se isti izrazi i postupci samo se računa sa usiljenim trajanjem aktivnosti. Za ovu analizu smo koristili mrežni dijagram sa slike 3. Sa leve strane aktivnosti date su njihove oznake i usiljeno trajanje. U levim kvadrantima su unešeni najraniji počeci događaja, a u desnim najkasniji počeci. Kritični put pri usiljenom trajanju aktivnosti ucrtan je dvostrukim linijama.



Slika 3.

Kritične aktivnosti pri usiljenom trajanju su A-D-H-J-L, odnosno kritični događaji su 1-2-3-8-9. Kritičan put pri usiljenom trajanju aktivnosti iznosi 28 vremenskih jedinica. Ova vrednost je data u poslednjoj vrsti kolone za t_u u tabeli 3.

Aktivnost		Početni događaj		Završni događaj		Vremenske rezerve					
		$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	(S_t) ij	(S_s) ij	(S''_s) ij	(S_n) ij	S_i	
oznaka	I-j	trajanje t_{ij}									
A	1-2	0	0	10	10	0	0	0	0	0	0
B	2-5	10	10	16	35	19	0	19	0	0	0
C	2-4	10	10	16	19	3	0	3	0	0	0
D	2-3	10	10	20	20	0	0	0	0	0	0
E	5-8	16	35	38	39	19	18	0	-1	19	19
F	8	16	19	38	39	3	2	0	-1	3	3
G	4-6	16	19	34	35	16	15	13	12	3	3
H	3-6	20	20	34	35	1	0	1	0	0	0
I	3-7	20	20	42	42	0	0	0	0	0	0
J	6-8	34	35	38	39	1	0	0	-1	1	1
K	6-9	34	35	47	47	3	3	2	2	1	1
L	8-9	38	39	47	47	1	1	0	0	1	1
M	7-9	42	42	47	47	0	0	0	0	0	0

d) Direktni troškovi projekta se dobijaju kada se saberu direktni troškovi svih aktivnosti projekta. Tako za normalno trajanje aktivnosti direktni troškovi projekta iznose 4630 novčanih jedinica, što je dato u poslednjoj vrsti tabele 3. u koloni za C_n . Direktni troškovi projekta pri usiljenom trajanju aktivnosti dobijeni su sabiranjem vrednosti kolone za C_u u tabeli i dati su u poslednjoj vrsti.

Priraštaj direktnih troškova za jedinicu skraćenja vremena odvijaju aktivnosti (jednačini direktni troškovi aktivnosti) određeni su, uz pretpostavku da linearno rastu pri skraćenju trajanja aktivnosti od normalnog do usiljenog, na osnovu izraza

$$\Delta C = \left| \frac{C_u - C_n}{t_u - t_n} \right|,$$

gde su:

ΔC – jedinični direktni troškovi aktivnosti;

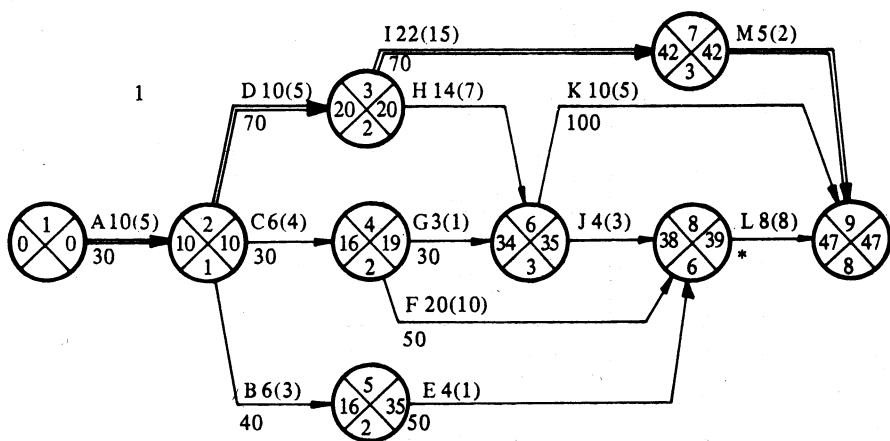
C_u – direktni troškovi aktivnosti pri usiljenom trajanju;

C_n – direktni troškovi aktivnosti pri normalnom trajanju;

t_u – usiljeno trajanje aktivnosti;

t_n – normalno trajanje aktivnosti.

Vrednosti jediničnih troškova date su u tabeli 3. i nanese sa desne strane aktivnosti mrežnog dijagrama na slici 4.



Slika 4

Na mrežnom dijagramu sa slike 4. sa leve strane aktivnosti su naneseni podaci: oznaka aktivnosti, normalno trajanje aktivnosti i (u malim zagradama) usiljeno trajanje aktivnosti. U pojedinim kvadrantima su uobičajeni podaci.

f) Najmanji mogući direktni troškovi pri usiljenom trajanju projekta određuju se na sledeći način:

Tabela 3.

Aktivnosti		Trajanje		Direktni troškovi		
oznaka	i-j	t_n	t_u	C_n	C_u	ΔC
A	1-2	10	5	150	300	30
B	2-5	6	3	170	290	40
C	2-4	6	4	270	330	30
D	2-3	10	5	350	700	70
E	5-8	4	1	150	300	50
F	4-8	20	10	700	1200	50
G	4-6	3	1	300	360	30
H	3-6	14	7	400	820	60
I	3-7	22	15	500	990	70
J	6-8	4	3	200	300	100
K	6-9	10	5	500	1000	100
L	8-9	8	8	700	700	*
M	7-9	5	2	240	480	80
Projekat		47	28	4630	7770	

1. iteracija. Bira se na kritičnom putu aktivnost sa najmanjim priraštajem jediničnih troškova i skraćuje se najviše što je moguće, tj. do njenog usiljenog trajanja ili do pojave novog kritičnog puta. Sa mrežnog dijagrama na slici 4. vidi se da je najjeftinije skraćivati kritičnu aktivnost A ($\Delta C_A = 30$ v.j.). Kako je ova aktivnost sastavni element svih puteva, to se može skratiti do njenog usiljenog trajanja, tj. do 5 vremenskih jedinica. Ovo izaziva i skraćivanje trajanja projekta za $\Delta t_1 = 5$ v.j, što daje:

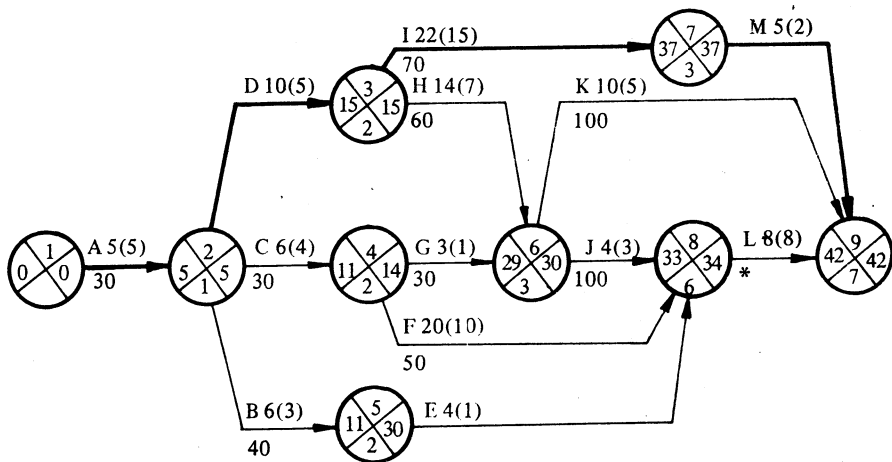
– trajanje projekta $T_1 = T_n^{(1)} - \Delta t_1 = 47 - 5 = 42$ v.j.

– troškove projekta $C_1 = C_{np} + \Delta t_1 \cdot \Delta C_A = 4630 + 5 \cdot 30 = 4780$ n.j.

Stanje posle iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 5.

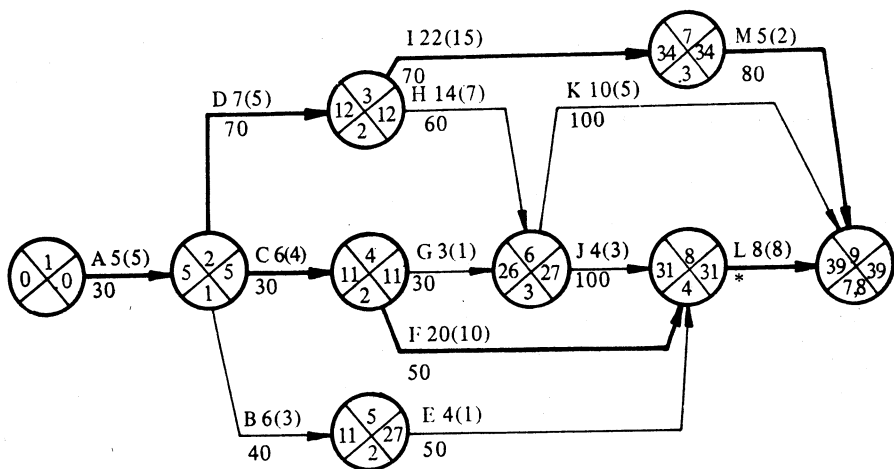
2. iteracija. Kritične aktivnosti D i I imaju iste jedinične troškove, ali se odabira aktivnost D, jer se ona može skratiti za 3 v.j. do pojave novog kritičnog puta preko aktivnosti A-C-F-L, a skraćivanje aktivnosti I za 1 v.j. izaziva pojavu novog kritičnog puta. Znači, u drugoj iteraciji usvaja se $\Delta t_2 = 3$ v.t. To daje:

- trajanje projekta $T_2 = T_1 - \Delta t_2 = 42 - 3 = 39$ v. j.
- troškovi projekta $C_2 = C_1 + \Delta t_2 \cdot \Delta C_D = 4780 + 3 \cdot 70 = 4990$ n. j.



Slika 5

Stanje posle ove iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 6.

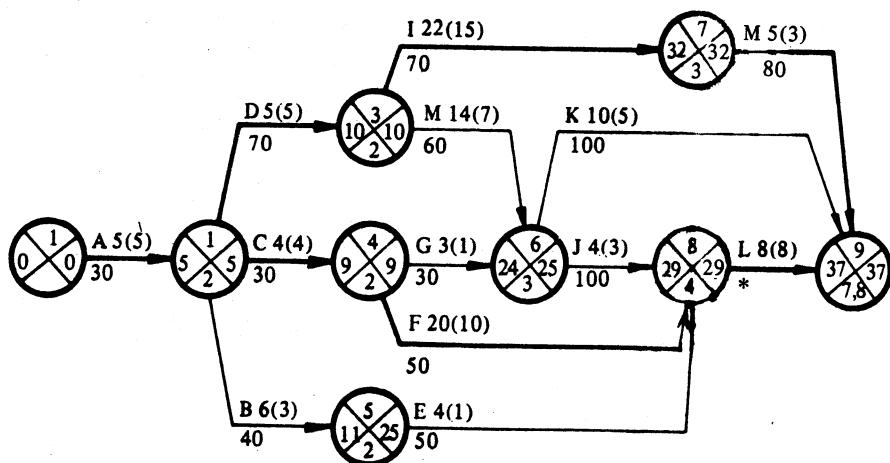


Slika 6.

3. iteracija. Sada se moraju za isti iznos skratiti oba kritična puta. Da bi se skratio novonastali kritični put najjeftinije je skratiti aktivnost C, a za skraćenje već postojećeg kritičnog puta opet je najpodesnije skratiti aktivnost D. Skraćivanje će se izvršiti do usiljenog trajanja i aktivnosti C i aktivnosti D, tj. za 2 vremenske jedinice ($\Delta t_3 = 2$ v.j.). Radi uveravanja da je ovo skraćivanje moguće obaviti, dovoljno je proveriti da se ne pojavljuje ranije kritični put preko aktivnosti B i E. Međutim, očigledno je da se ne pojavljuje. Ovo skraćivanje daje:

- trajanje projekta $T_3 = T_2 - t_3 = 39 - 2 = 37$ v. j.
- troškovi projekta $C_3 = C_2 + t_3 (C_c + C_D) = 4990 + 2 (70 + 30) = 5190$.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 7.

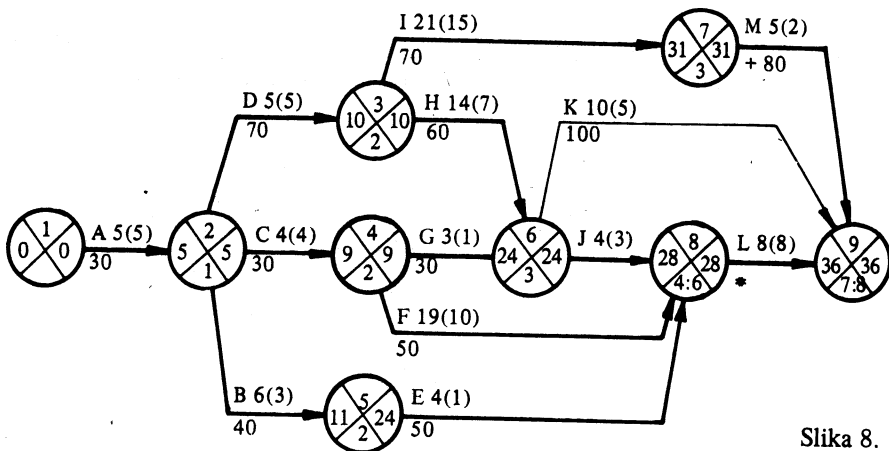


Slika 7.

4. iteracija. Da bi se dalje skratila oba kritična puta, najpodesnije je skratiti aktivnosti E i I. Mogu se skratiti samo za 1 vremensku jedinicu, jer se preko aktivnosti H-J-L pojavljuje tada novi kritični put. Sada je $\Delta t_4 = 1$ v. j. što daje:

- trajanje projekta $T_4 = T_3 - \Delta t_4 = 37 - 1 = 36$ v. j.
- troškovi projekta $C_4 = C_3 + \Delta t_4 (\Delta C_F + \Delta C_I) = 5190 + 1 (50 + 70) = 5310$ n. j.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 8.

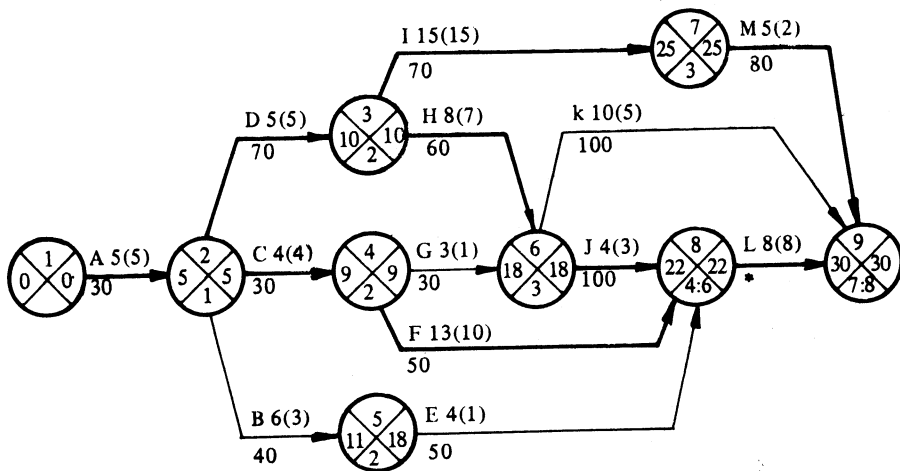


Slika 8.

5. iteracija. Sada postoje tri kritična puta: prvi A–D–I–M, drugi A–D–H–J–L i treći A–C–F–L. Da bi se skratili ovi kritični putevi najpodesnije je skratiti aktivnosti F, H i I. Kada se skraćuje aktivnost F mora se voditi računa o pojavi kritičnog puta preko aktivnosti E ili preko G i J. Kada se skraćuje aktivnost H, mora se voditi računa o pojavljivanju kritičnosti preko G, dok pri skraćivanju aktivnosti I, treba obratiti pažnju na aktivnost K, ali je ona za sada daleko od kritičnosti. Skraćivanje izvršiti do usiljenog trajanja aktivnosti I, tj. za 6 v. j. Sada je $\Delta t_5 = 6$ v. j. što daje:

- trajanje projekta $T_5 = T_4 - \Delta t_5 = 36 - 6 = 30$ v.j.
- troškovi projekta $C_5 = C_4 + \Delta t_5 (\Delta C_H + \Delta C_I) =$
 $= 5310 + 6 (50 + 60 + 70) = 6390$ n.j.

Stanje posle 5. iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 9.

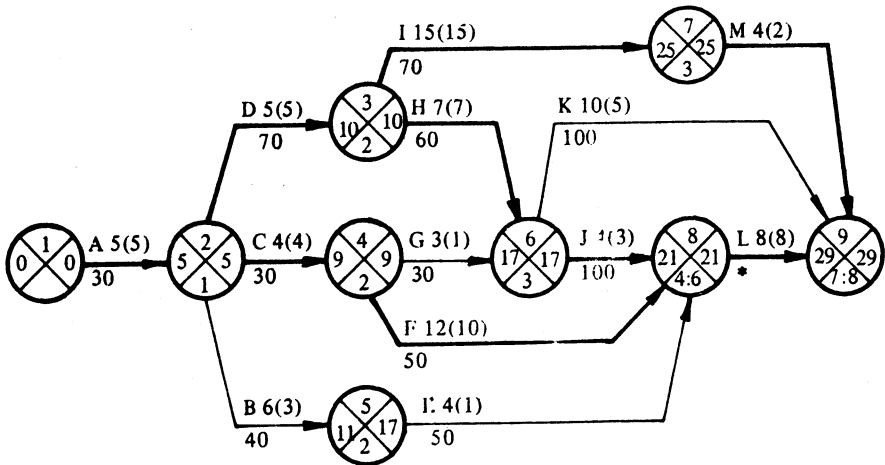


Slika 9.

6. iteracija. Opet su ostala tri ista kritična puta. Skraćuju se aktivnosti F, H i M. Ovdje je granicu skraćivanja uslovilo usiljeno trajanje aktivnosti H. Tako imamo $\Delta t_6 = 1$ v. j., što daje:

- trajanje projekta $T_6 = T_5 - \Delta t_6 = 30 - 1 = 29$ v.j.
- troškovi projekta $C_6 = C_5 + \Delta t_6 (\Delta C_F + \Delta C_H + \Delta C_M) =$
 $= 6390 + 1 (50 + 60 + 80) = 6580$ n.j.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 10.

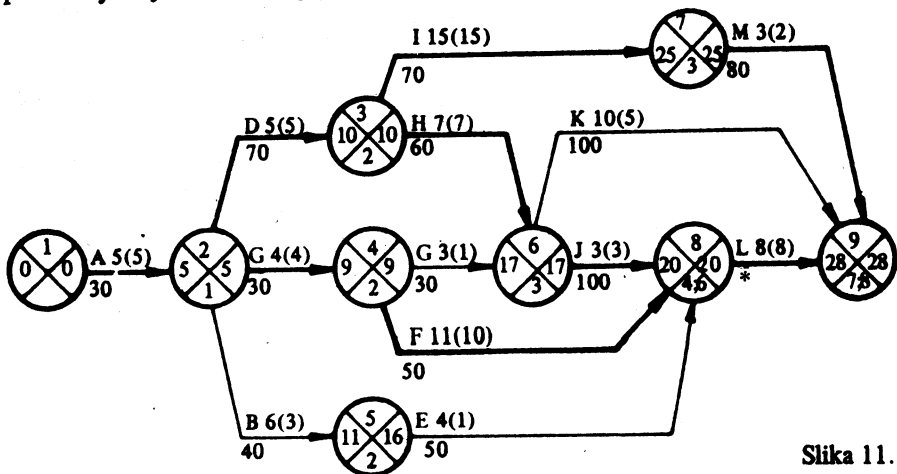


Slika 10.

7. iteracija. U ovoj iteraciji treba skratiti aktivnosti F, J i M i to samo za $\Delta t_7 = 1$ v. j, jer toliko je potrebno do kritičnog puta pri usiljenom trajanju aktivnosti. Uostalom, aktivnost J ne možemo skratiti za veći iznos. Sada je:

- trajanje projekta $T_7 = T_6 - \Delta t_7 = 29 - 1 = 28$ v.j.
- troškovi projekta $C_7 = C_6 + \Delta t_7 (\Delta C_F + \Delta C_J + \Delta C_M) = 6580 + 1(50 + 100 + 80) = 6810$ n.j.

Stanje posle sedme iteracije, i ujedno pri najkraćem mogućem trajanju projekta, predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 11



Slika 11.

Rezultat ukazuje da se projekat može izvršiti u vremenu trajanja usiljenog kritičnog puta, a da troškovi projekta budu 6810, umesto 7770 novčanih jedinica, koliko je dobijeno pri sabiranju troškova pojedinih aktivnosti pri usiljenom trajanju. Nesumnjivo, ovo predstavlja značajnu uštedu. Kako je ostvarena ova ušteda? Ostvarena je na taj način što je postignuto da ceo projekat usiljeno traje, a da sve aktivnosti ne budu svedene na usiljeno trajanje. Sve one aktivnosti, kod kojih je veći broj odmah posle oznake od onoga u zagradi na mrežnom dijagramu sa slike 11, nisu svedene na usiljeno trajanje. One su i doprinele uštedi, jer bilo bi besmisleno plaćati njihovo skraćivanje do usiljenog trajanja kada to ne može dovesti do skraćenja celog projekta. U ovom primeru je uštedeno na sledećim aktivnostima:

aktivnost B, ušteda $3 \times 40 = 120$ n.j.

aktivnost E, ušteda $3 \times 50 = 150$ n. j.

aktivnost F, ušteda $1 \times 50 = 50$ n.j.

aktivnost G, ušteda $2 \times 30 = 60$ n.j.

aktivnost K, ušteda $5 \times 100 = 500$ n.j.

aktivnost M, ušteda $1 \times 80 = 80$ n.j.

Ukupna ušteda = 960 n.j.

Ukupna ušteda odgovara razlici između troškova pri usiljenom trajanju svih aktivnosti i optimalnih troškova pri usiljenom trajanju projekta, tj. 7770 n.j. – 6810 n.j. = 960 n.j.

Kod praktične primene analize vreme – troškovi ne moraju se crtati mrežni dijagrami posle svake iteracije. Dovoljno je na već postojećem mrežnom dijagramu na podesan način izmeniti brojeve koji označavaju trajanje aktivnosti koje se skraćuju i izmeniti one brojeve koji se menjaju usled ovog skraćivanja. Takođe je potrebno obeležiti nove kritične puteve. Posebno je podesno različitim bojama naznačiti novo stanje posle iteracija.

Mada je kod velikih mrežnih dijagrama teško navesti sve puteve, može se izvršiti analiza troškova tabelarno navodeći sve puteve mrežnog dijagrama. To je urađeno pomoću table 4.

U tabeli 4. kritični putevi su obeleženi dopisivanjem slova K uz trajanje istih. Simbolično pisanje ispod iteracija, na primer A: $10 \rightarrow 5$ v.j. znači da je u prvoj iteraciji aktivnost A skraćena sa 10 na 5 vremenskih jedinica. Ispod oznake za skraćivanje aktivnosti navedeni su direktni troškovi projekta, posle te iteracije, odnosno posle datog skraćenja.

Tabela 4.

Red. broj puta	Trajanje puta		Iteracije						
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Sastav puta	normalno	usijano	A:10→5	D:10→7	C:6→4 D:7→5	I:22→21 F:20→19	H:14→8 F:19→13 I:21→15 C ₅ =6390	F:13→12 H:8→7 M:5→4 C ₆ =6580	F:12→11 J:4→3 M:4→3 C ₇ =6810
			C ₁ =4780	C ₂ =4990	C ₃ =5190	C ₄ =5310	C ₅ =6390	C ₆ =6580	C ₇ =6810
I	47K	27	42K	39K	37K	36K	30K	29K	28K
II	44	22	39	36	34	34	28	27	27
III	46	28K	41	38	36	36K	30K	29K	28K
IV	29	15	24	24	22	22	22	22	22
V	31	21	26	26	24	24	24	24	23
VI	44	27	39	39K	37K	36K	30K	29K	28K
VII	28	17	23	23	23	23	23	23	23