6.4. REŠAVANJE MATRIČNIH IGARA n x m PRIMENOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Svaku konačnu antagonističku igru dva licsa nultom sumom možemo rešiti primenom linearnog programiranja. Kanonični oblik ove igre je matrica plaćanja igrača II u odnosu na igrača I,

$$A = \|a_{ij}\|, \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

gde se indeks i odnosi na strategijske mogućnosti igrača I, a indeks j na strategijske mogućnosti igrača II.

Ako pretpostavimo da su primenljive svaka od n strategijskih mogućnosti igrača I, odredimo verovatnoće njihovog korišćenja u sklopu optimalne mešovite strategije (ako je neka od strategijskih mogućnosti nekorisna to će odgovarajuća verovatnoća biti jednaka nuli). Označimo ove verovatnoće sa p_1 p_2 , ... , p_m, a vrednost igre sa V. Pošto za optimalnu strategiju očekivana dobit igrača I ne može biti manja od vrednosti igre V za bilo koji strategijski izbor protivnika. ovo matematički možemo izraziti sa n nejednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + \ldots + a_{m1}\, p_m &\geqslant V \\
a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + \ldots + a_{m2}\, p_m &\geqslant V \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + \ldots + a_{mn}\, p_m &\geqslant V.
\end{aligned}
$$

Sada uvodimo nove promenljive,

$$x_1 = \frac{p_1}{V};\ x_2 = \frac{p_2}{V};\ \ldots\ x_m = \frac{p_m}{V}$$

Da bi izbegli mogućnost deljenja sa nulom, možemo se uvek obezbediti da bude $V > 0$. Dovoljno je matricu A transformisati tako da svi elementi novodobijene matrice budu veći od nule. Može se pokazati da će ova transformacija povećati vrednost igre za veličinu d koja se dodaje elementima matrice A da bi postali veći od nule.

Kako je $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, to će zbir novouvedenih promenljivih biti

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V}.$$

Ako se leva i desna strana nejednačine podeli sa V dobija se novi sistem nejednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots + a_{m1} x_m &\geqslant 1 \\
a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{m2} x_m &\geqslant 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_m &\geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Za uvedene uslove sve promenljive x_i su veće od nule.

Kako je cilj optimalne strategije igrača I maksimizacija dobiti, to će za ostvarivanje ovog cilja biti potrebno da se linearna funkcija

$$f(X) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \tag{2}$$

minimizira. Prema tome, optimalna strategija prvog igrača, tj. skup verovatnoća $p_i = Vx_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, određuje se iznalaženjem minimuma funkcija $f(X)$ za x_i veća od nule a da pri tome bude zadovoljen sistem ograničenja (1).

Vektor optimalne mešovite strategije igrača II, tj. skup verovatnoća q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, može se odrediti na sličan način. Pošto za optimalnu strategiju očekivani gubitak drugog igrača ne može biti veći od V pri bilo kojoj strategiji protivnika, to se može pisati sledeći sistem nejednačina,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leqslant V, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Na sličan način, kao u prethodnom slučaju, i ovde se uvode nove promenljive

$$y_j = \frac{q_j}{V}, (j = 1, 2, \ldots, n),$$

čiji je zbir $\quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V}$ jer je $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$

Uslov nenegativnosti promenljivih y_j, kao i promenljivih x_i u prethodnom modelu, može se ostvariti transformacijom početne matrice cene igre. Naime, dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja d tako da je A' = A + d, postiže se da će vrednost V' = V + d biti uvek veća od nule, a samim tim postiže se i uslov nenegativnsoti promenljivih x_i i y_j.

Kako optimalna strategija igrača II ima za cilj minimizaciju gubitaka, to će ovaj cilj biti postignut maksimizacijom funkcije

$$\Phi(Y) = y_1 + y_2 + \ldots y_n = \frac{1}{V}. \tag{4}$$

Optimalna strategija igrača II, tj. skup verovatnoća $q_j = V_{yj}$, može se odrediti iznalaženjem maksimuma funkcije $\Phi(Y)$ za y_j veće od nule, a da pri tome budu zadovoljene ograničenjima koja su definisana sistemom nejednačina (3).

Iz prethodnog razmatranja proizilazi da je

$$(\min) f(X) = (\max) \Phi(Y) = \frac{1}{V}.$$

Prema tome, na preblem iznalaženja rešenja matrične igre primenom linearnog programiranja treba gledati kao na rešavanje jedinstvenog zadatka LP, gde se na osnovu rešenja primarnog zadatka određuje optimalna strategija jednog igrača, a na osnovu rešenja dualnog zadatka određuje optimalna strategija drugog učesnika u igri. Pri iznalaženju optimalnih strategija igrača treba koristiti činjenicu da rešenje primarnog zadatka sadrži i rešenje dualnog zadatka linearnog programiranja.

Bilinearni pristup[16] . – Polazeći od osnovnog matematičkog modela, koji je definisan izrazima (1) i (2), može se izvesti bilinearni model (15) koji direktno daje rešenja oba linearna modela. Bilinearni model ima funkciju cilja oblika

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j , \tag{5}$$

a ograničenja su

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant 1, \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant 1, \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, m) \\ &x_i \geqslant 0, \quad y_j \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Bilinearna metoda rešavanja zadataka iz oblasti matričnih igara bazirana na matematičkom modelu definisanom izrazima (5) i (6). Lako se može pokazati da je $F(X, Y) = 1/V$, gde je V – vrednost igre, pri čemu se polazi od opšte definicije vrednosti igre, gde je

$$V = C(P, Q) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i q_j .$$

Bilinearni algoritam ilustrovan je na konkretnim numeričkim primerima.

20. Zadatak

Definicija zadatka. Naći rešenje matrične igre, koja je definisana matricom cene

Igrač II / Igrač I	B_1	B_2
A_1	0,2	0,8
A_2	0,7	0,3

gde su B_1 i B_2 strategijske mogućnosti igrača II, a A_1 i A_2 strategijske mogućnosti igrača I. Problem rešiti primenom linearnog programiranja.

Rešenje. Matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$$P = (p_1, p_2),$$

gde je $pp_1 + p_2 = 1$ i $p_1 \geqslant 0$ i $p_2 \geqslant 0$, ima sledeći oblik

$$(\min)\ f(X) = x_1 + x_2 = \frac{1}{V}$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 \geqslant 1$$

$$0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 \geqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$$Q = (q_1, q_2),$$

gde je $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 \geqslant 0$ i $q_2 \geqslant 0$, ima sledeći oblik

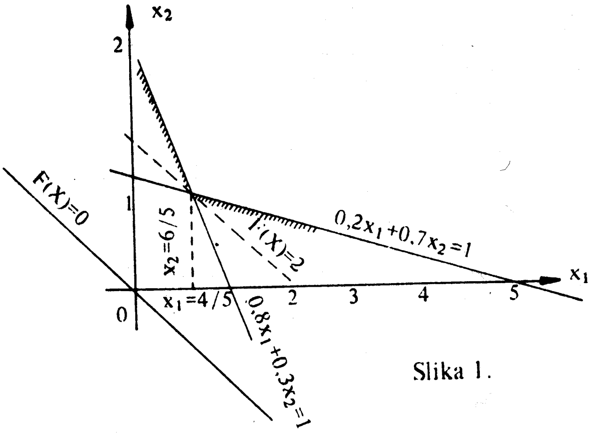
$$(\max)\ \phi(Y) = y_1 + y_2 = \frac{1}{V}$$

$$0{,}2y_1 + 0{,}8y_2 \leqslant 1$$

$$0{,}7y_1 + 0{,}3y_2 \leqslant 1$$

$$y_1 \geqslant 0 \text{ i } y_2 \geqslant 0.$$

Problem će biti rešen grafičkom metodom. Na slici 1 prikazano je rešenje problema za izgrača I, gde su dobijene vrednosti za promenljive x_1 i x_2.



Slika 1.

Dobijeno rešenje osnovnog problema je $x_1 = 4/5$, $x_2 = 6/5$, a vrednost funkcije cilja je

$$f(X) = x_1 + x_2 = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Prema tome, vrednost igre je $V = 0,5$, a komponente vektora optimalne mešovite strategije P su

$$p_1 = Vx_1 = 0,5 \frac{4}{5} = 0,4$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Vektor mešovite strategije Q određuje se na osnovu matematičkog modela dualnog zadatka linearnog programiranja. Međutim, ako koristimo već izračunatu vrednost matrične igre vrednosti za y_1 i y_2 mogu se dobiti rešenjem sledećeg sistema jednačina

$$y_1 + y_2 = 2$$

$$0,2y_1 + 0,8y_2 = 1.$$

odakle proizilazi da je $y_1 = 1$ i $y_2 = 1$. Prema tome, za komponente vektora Q možemo pisati da su

$$q_1 = Vy_1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

$$q_2 = Vy_2 = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

tj. možemo pisati da je rešenje date matrične igre

$$Q = (0,5; 0,5) \qquad P = (0,4; 0,6) \qquad V = 0,5.$$

Zadatak za vežbu. Naći rešenje prethodne matrične igre nekom drugom metodom i uporediti dobijena rešenja.

21. Zadatak

Definicija zadatka. Dva dečaka se igraju tako što nezavisno jedan od drugog pokazuju jedan, dva ili tri prsta. Dobit ili gubitak u igri određuje ukupan broj ispruženih prstiju. Ako je ispruženi broj prstiju paran, onda taj broj označava dobit prvog dečaka (u dinarima), a ako je broj ispruženih prstiju neparan, onda taj broj označava dobit u dinarima drugog dečaka.

a) Formirati matricu plaćanja (cene).
b) Naći rešenje matrične igre.
c) Utvrditi da li je igra ravnopravna za oba igrača.

Rešenje. Iz same definicije igre proizilazi da će matrica plaćanja imati sledeći oblik:

STR D_2 / STR D_1	I_1	II_2	II_3	Minimum reda
I_1	2	−3	4	-3^*
I_2	−3	4	5	5
I_3	4	−5	6	5
maksimum kolone	4^*	4^*	6	

Donja vrednost igre je $\alpha = -3$, a gornja vrednost igre je $\beta = 4$. Kako matrična igra nema sedlo, jer su donja i gornja vrednost igre različite, to ne postoje stabilne minimaksne strategije. Rešenje igre treba tražiti u domenu mešovitih strategija.

Obzirom da oba učesnika u igri imaju isti broj strategijskih mogućnosti – tri, rešenje matrične igre naći ćemo rešavajući sistem jednačina – sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate.

Polazeći od očekivane dobiti prvog igrača u zavisnosti od strategijskog izbora drugog igrača možemo formirati sledeći sistem jednačina

$$1)\quad 2p_1 - 3p_2 + 4p_3 = V$$

$$2)\quad -3p_1 + 4p_2 - 5p_3 = V$$

$$3)\quad 4p_1 - 5p_2 + 6p_3 = V$$

$$4)\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

U ovom sistemu jednačina p_1, p_2, i p_3 predstavljaju relativne učestanosti sa kojima će prvi učesnik u igri upotrebljavati svoje čiste strategije (I_1, I_2 i I_3) respektivno, a V predstavlja vrednost igre.

Gornji sistem jednačina rešavamo tako što iz četvrte jednačine izračunavamo p_3 i dobijeni izraz za p_3 smenjujemo u prethodne tri jednačine. Posle sređivanja dobija se novi sistem jednačina

$$2p_1 + 7p_2 + V = 4$$

$$2p_1 + 9p_2 - V = 5$$

$$2p_1 + 11p_2 + V = 6.$$

Rešenje ovog sistema doredićemo pomoću determinanti. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 16.$$

Determinante pojedinih promenljivih imaju sledeće vrednosti

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 8;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \\ 2 & 11 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti determinaanti određujemo vrednosti promenljivih:

$$p_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad p_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2};$$

$$p_2 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ i } V = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{16} = 0.$$

Ako relativne učestanosti primene strategija (II_1, II_2 i II_3) drugog učesnika obeležimo sa q_1, q_2 i q_3, možemo postaviti sledeći sistem jednačina

$$2q_1 - 3q_2 + 4q_3 = V$$

$$-3q_1 + 4q_2 - 5q_3 = V$$

$$4q_1 - 5q_3 + 6q_3 = V$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Kako je već određena vrednost igre $V = 0$, to nisu potrebne sve četiri jednačine već samo tri. Prema tome imamo da je

$$2q_1 - 3q_2 + 4q_3 = 0$$

$$-3q_1 + 4q_2 - 5q_3 = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Rešenjem ovog sistema jednačina dobijamo da je

$$q_1 = \frac{1}{4}\ ;\ q_2 = \frac{1}{2}\ ;\ q_3 = \frac{1}{4}.$$

Prema tome, optimalne mešovite strategije učesnika u igri su:

$$S^*_{D_1} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad S^*_{D_2} = \begin{pmatrix} II_1 & II_2 & II_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

pri čemu je vrednost igre $V = 0$.

Zaključak je da oba dečaka u 50% slučajeva treba da pruže dva prsta, a u 25% slučajeva 1 i 3 prsta. Igra je ravnopravna i očekivana dobit u igri je jednaka nuli.

Rešavanje problema primenom linearnog programiranja. U ovom slučaju polazi se od matrice cene koju treba transformisati tako da svi elementi matrice budu veći od nule. Za koeficijenat transformacije uzzimamo $d = 5$, koji dodajemo svakom elementu matrice plaćanja, posle čega se dobija nova matrica plaćanja. Pri uvođenju nove matrice treba voditi računa da će vrednost igre biti

$$V' = V + d = V + 5.$$

STR D_2 / STR S_1	II_1	II_2	II_3
I_1	7	2	9
I_2	2	9	0
I_3	9	0	11

Igrač D_2 nastoji da odabere svoju strategiju tako da, bez obzira na to koju je strategiju izabrao protivnik, njegovo očekivano plaćanje bude manje ili najviše jednako vrednosti igre, što matematički možemo pisati

$$7q_1 + 2q_2 + 9q_3 \leqslant V$$

$$2q_1 + 9q_2 + 0q_3 \leqslant V$$

$$9q_1 + 0q_2 + 11q_3 \leqslant V$$

Uvođenjem novih promenljivih $y_1 = q_1/V$, $y_2 = q_2/V$ i $y_3 = q_3/V$ i imajući u vidu da je $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, izbor optimalne strategije za igrača D_2 svodi se na rešavanje sledećeg zadatka linearnog programiranja. Maksimizirati linearnu funkciju

$$(\max)\ \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V}$$

uz ograničenja

$$7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leqslant 1$$

$$2y_1 + 9y_2 + 0y_3 \leqslant 1$$

$$9y_1 + 0y_2 + 11y_3 \leqslant 1$$

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0.$$

Ovaj zadatak linearnog programiranja rešićemo pomoću simpleks tabele. Prethodno, uvođenjem izravnavajućih promenljivih gornji matematički model svodimo na kanonični oblik.

$$(\max)\ \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_6$$

$$7y_1 + 2y_2 + 9y_3 + y_4 = 1$$

$$2y_1 + 9y_2 + 0y_3 + y_5 = 1$$

$$9y_1 + 0y_2 + 11y_3 + y_6 = 1$$

Dalji postupak rešavanja problema prikazan je u sledeće četiri simpleks tabele ST-0, ST-1, ST-2 i ST-3.

ST–0

C_0	B	X_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	1	7	2	9	1	0	0
0	y_5	1	2	9	0	0	1	0
0	y_6	1	9	0	11	0	0	1
$\phi_j - c_j$		0	−1	−1	−1	0	0	0

ST 1

C_0	B	X_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	2/9	0	2	4/9	1	0	−7/9
0	y_5	7/9	0	9	−22/9	0	1	−2/9
1	y_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
$\phi_j - c_j$		1/9	0	−1	2/9	0	0	1/9

ST 2

C_0	B	X_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	4/81	0	0	80/81	1	−2/9	59/81
1	y_2	7/81	0	1	−22/81	0	1/9	2/81
1	y_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
$\phi_j - c_j$		16/81	0	0	−4/81	0	1/9	7/91

ST 3

C_0	B	X_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	y_3	1/20	0	0	1	81/80	−9/40	59/80
1	y_2	1/10	0	1	0	11/40	1/20	9/40
1	y_1	1/20	1	0	0	99/80	11/40	81/80
$\phi_j - c_j$		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20

Na osnovu dobijenih rezultata u poslednjoj simpleks tabeli možemo pisati da je

$$\phi(Y) = \frac{1}{5} = \frac{1}{V}.$$

odakle proizilazi da je V = 5, a vrednost igre za prvobitno definisanu matričnu igru je

$$V = V' - d = 5 - 5 = 0.$$

Komponente vektora optimalne mešovite strategije za igrača D_2 su:

$$q_1 = y_1 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}\ ;\quad q_2 = y_2 \cdot V = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2}\ ;$$

$$q_3 = y_3 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4},$$

Prema tome, možemo pisati da je

$$Q = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

U poslednjem redu poslednje simpleks tabele, u kolonama y_4, y_5 i y_6, nalaze se rešenja za realne promenljive primarnog zadatka linearnog programiranja na osnovu kojih se određuju komponente vektora optimalne mešovite strategije za igrača D_1. Naime, imamo da su

$$x_1 = 1/20,\quad x_2 = 1/10,\quad x_3 = 1/20.$$

Otuda je

$$p_1 = x_1 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}\ ;\quad p_2 = x_2 \cdot V = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2}\ ;$$

$$p_3 = x_3 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}.$$

Prema tome, možemo pisati da je

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

Zadatak za vežbu. Ako se pođe od toga da igrač D_1 nastoji da odabere svoju strategiju tako da, bez obzira na izbor protivnika, njegova očekivana dobit bude maksimalna ili bar jednaka vrednosti matrične igre, formulisati zadatak linearnog programiranja. Rešavajući ovako formulisan zadatak linearnog programiranja naći rešenje ove matrične igre.

22. Zadatak

Definicija zadatka. Primenom linearnog programiranja rešiti matričnu igru definisanu matricom cene (plaćanja)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Rešenje. Da bi našli rešenje matrične igre, definisane matricom A, primenom linearnog programiranja potrebno je matricu A transformisati u novu matricu A', tako da je

$$A' = A + d,$$

gde je d dovoljno veliki pozitivan broj takav da posle transformacije svi elementi novodobijene matrice A', budu veći od nule.

Ako usvojimo da je d = 3, imaćemo

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$$

Ovu matričnu igru posmatraćemo kao igru igračI i igrača II od kojih svaki ima po tri čista strategijska izbora, kako je to pokazano u tabeli 1. Pri ovome se podrazumeva obično, ako se drugačije ne naglasi, da elemenat matricyA pokazuje iznos dobiti za igrača I za odgovarajući par čistih strategija.

Tabela 1

I \ II	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	3
A_2	8	0	4
A_3	6	2	5

Rešiti matričnu igru znači naći vektor optimalne mešovite strategije za igrača I i za igrača II i vrednost mešovite igre, tj. odrediti

$$P = (p_1, p_2, p_3); \; p_1 + p_2 + p_3 = 1;$$

$$Q = (q_1, q_2, q_3); q_1 + q_2 + q_3 = 1; \; i$$

$$C(P, Q) = V = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \, p_i \, q_j.$$

a) Određivanje vektora mešovite strategije P

Komponente vektora mešovite strategije P možemo odrediti rešavajući sledeći problem linearnog programiranja. Traži se

$$(\min) \quad f(X) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{V},$$

pri ograničenjima

$$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geqslant 1$$

$$6x_1 + 0x_2 + 2x_3 \geqslant 1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0; \; x_3 \geqslant 0.$$

Primenom simpleks metoda može se naći rešenje problema, tj. mogu se odrediti promenljive x_1, x_2 i x_3. Na osnovu ovih rezultata izračunavamo vrednost igre

$$V = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

kao i komponente vektora mešovite strategije P,

$$p_1 = V \cdot x_1 \; ; \; p_2 = V \cdot x_2 \;\; i \;\; p_3 = V \cdot x_3.$$

b) Određivanje vektora mešovite strategije Q

Komponente vektora mešovite strategije Q možemo odrediti rešavajući sledeći problem linearnog programiranja. Traži se

$$(\max) \quad \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V}$$

pri ograničenjima

$$4y_1 + 6y + 3y_3 \leqslant 1$$

$$8y_1 + 0y_2 + 4y_3 \leqslant 1$$

$$6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leqslant 1$$

$$y_1 \geqslant 0; \; y_2 \geqslant 0 \; \text{i} \; y_3 \geqslant 0.$$

Primenom simpleks metoda može se naći rešenje problema, tj. mogu se odrediti promenljive y_1, y_2 i y_3. Na osnovu ovih rezultata izračunavamo komponente vektora mešovite strategije Q,

$$q_1 = V \cdot y_1 \,; q_2 = V \cdot y_2 \; \text{i} \; q_3 = V \cdot y_3.$$

Upoređivanje matematičkog modela pod a) i b) može se uočiti da se radi o primarnom i dualnom modelu zadatka linearnog programiranja. Prema tome, da bi se dobilo rešenje matrične igre potrebno je rešiti dualni problem, čije rešenje istovremeno sadrži i rešenje primarnog problema.

U cilju rešenja problema, tj. rešenja matrične igre, matematički model pod b) svodimo na kanonični oblik, pri čemu dobijamo matematički model pogodan za rešavanje pomoću simpleks tabele.

$$(\max)\, \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6$$

$$4y_1 + 6y_2 + 3y_3 + y_4 = 1$$

$$8y_1 + 0y_2 + 4y_3 + y_5 = 1$$

$$6y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 1$$

Postupak rešavanja problema dat je u sledećim simpleks tabelama ST – 0, ST – 1 i ST – 2.

ST – 0

C_0	B	Y_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	1	4	6	3	1	0	0
0	y_5	1	8	0	4	0	1	0
0	y_6	1	6	2	5	0	0	1
$\Phi_j - c_j$		0	–1	1	1	0	0	0

ST 1

C_0	B	Y_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	2/5	2/5	24/5	0	1	0	−3/5
0	y_5	1/5	16/5	−8/5	0	0	1	4/5
1	y_3	1/5	6/5	2/5	1	0	0	1/5
$\Phi_j - c_j$		1/5	1/5	−3/5	0	0	0	1/5

ST −2

C_0	B	Y_0	1	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	y_2	1/12	1/12	1	0	5/24	0	−3/24
0	y_5	1/3	10/3	0	0	1/3	1	−1
1	y_3	1/6	7/6	0	1	−1/12	0	1/4
$\Phi_j - c_j$		1/4	1/4	0,	0	1/8	0	1/8
			x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3

Simpleks tabela ST – 2 sadrži rešenje matrične igre u celini. Naime, imamo da je

$$(\min)\ f(X) = (\max)\ \phi(Y) = \frac{1}{4} = \frac{1}{V},$$

$$y_1 = 0,\ \ y_2 = \frac{1}{12},\ y_3 = \frac{1}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{8}.\ \ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{8},$$

Na osnovu ovih rezultata sračunavamo

1) Vrednost matrične igre

$$V = V' - d = 4 - 3 = 1;$$

2) Komponente vektora mešovite strategije Q, gde je

$$q_1 = V' \cdot y_1 = 4 \cdot 0 = 0, \quad q_2 = V' \cdot y_2 = 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$q_3 = V' \cdot y_3 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

Prema tome, imamo da je vektor mešovite strategije za izgrača II

$$Q = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3},); \text{i}$$

3) Komponente vektora mešovite strategije P, gde je

$$p_1 = V' \cdot x_1 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \qquad p_2 = V' \cdot x_2 = 4 \cdot 0 = 0,$$

$$p_3 = V' \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, imamo da je vektor mešovite strategije za igrača I

$$P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

Zadatak za vežbu. Prethodni zadatak rešiti svođenjem matrice A na dimenzije 3 x 2, a zatim grafičkom metodom odrediti vrednost matrične igre i vektore mešovite strategije za igrača I i igrača II.

23. Zadatak

Primenom bilinearne metode naći optimalne strategije i vrednost matrične igre definisane matricom cene

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$$

Pokazati da će u slučaju promene elemenata matrice A, gde se promena odnosi na elemente a_{22} i a_{24}, tako da je $a_{22} = a_{24} \geqslant 4$, rešenje matrice biti u domenu čistih strategija.

Rešenje. Na osnovu sistema ograničenja u bilinarnom modelu formira se početna tabela T – 0.

Tabela T – 0

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_{m+i}	
x_1	3	6	1	4	1	0
x_2	5	2	4	2	1	1
x_3	1	4	3	5	1	0
$-x_{n+1}$	1	1	1	1	F=0	0
	0	0	–1	0	0	

Računski postupak određivanja optimalnih strategija sadrži sledeće korake:

1. Korak. – Vrši se izbor elemenata transformacije početkog rešenja koje je sadržano u tabeli T – 0. Kriterijum za izbor ovog elementa (pivot elemenat) je maksimalni priraštaj funkcije F (X, Y) po promenljivim Y, pri čemu odgovarajuća ograničenja moraju biti zadovoljena. Ovaj priraštaj sračunava se na osnovu izraza

$$\Delta F\,(X, Y) = \max_{j} \; \min_{i} \; \frac{c_j\, b_i}{a_{ij}}\,, \tag{1}$$

gde je $c_j = b_i = 1$ kako se to vidi iz tabele T – 0. Na osnovu ovoga utvrđuje se da je elemenat transformacije rešenja a_{23}.

2. Korak. – Početnoj tabeli T – 0 dopisuju se jedinični vektori, kao što je to napred učinjeno. Na osnovu ovoga vrši se izračunavanje vrednosti elemenata tabele T–1, koja sadrži novo rešenje, tako da je

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{uj}\, a_{iv}}{a_{uv}}\,, \tag{2}$$

gde je $a_{uv} = a_{23}$. Izraz (2) primenjuje se na sve elemente tabele T – 0. Njegovom primenom na elemente drugog reda i treće kolone ovi elementi postaju jednaki nuli pa se ovaj red i ova kolona izbacuju iz tabele. Dopisana kolona sadržavaće rešenje za promenljivu x_2, a dopisani red sadržaće rešenje za promenljivu y_3.

Tabela T – 1

	y_1	y_2	y_4	y_{m+i}	x_2	
x_1	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$-\frac{11}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1
$-x_{n+j}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
y_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
	0	–1	0	0		

3. Korak. – U ovom koraku utvrđuje se da li je dobijeno rešenje optimalno. Rešenje će biti optimalno ukoliko su svi elementi u redu $-x_{n+j}$ manji od nule. Kako to u tabeli T – 1 nije slučaj, dalji postupak određivanja optimalnog rešenja nastavlja se povratkom na korak 1. Naime, određuje se novi elemenat transformacije mogućeg rešenja dobijenog u tabeli T – 1.

Novo moguće rešenje dato je u tabeli T – 2.

Tabela T – 2

	y_1	y_4	y_{m+1}	x_2	x_3	
x_1	$\boxed{\frac{39}{5}}$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	1
$-x_{n+j}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0
y_3	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$			
y_2	$-\frac{11}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{10}$			
	-1	0	0			

Dobijeno rešenje u tabeli T – 2 nije optimalno jer je u redu $-x_{n+j}$ i koloni y_1 elemenat veći od nule. Novo moguće rešenje dato je u tabeli T – 3.

Tabela T – 3

	y_4	y_{m+i}	x_2	x_3	x_1
$-x_{n+j}$	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{26}$	$-\frac{1}{26}$
y_3	$\frac{7}{13}$	$\frac{2}{13}$			
y_2	$\frac{37}{39}$	$\frac{5}{39}$			
y_1	$-\frac{16}{39}$	$\frac{1}{39}$			

Dobijeno rešenje u tabeli T – 3 je optimalno pošto su sve vrednosti u redu $-x_{n+j}$ manje od nule.

Kako je $F(X, Y) = 4/13 = 1/V$, proizilazi da je vrednost igre $V = 13/4$. U redu $-x_{n+j}$ nalaze se vrednosti za promenljive x_i, gde je

$$x_1 = \frac{1}{20}, \quad x_2 = \frac{2}{13} \quad i \quad x_3 = \frac{3}{26}.$$

Na osnovu ovih vrednosti proizilazi da je

$$p_1 = Vx_1 = \frac{13}{4}\,\frac{1}{26} = \frac{1}{8}, \quad p_2 = Vx_2 = \frac{13}{4}\,\frac{2}{13} = \frac{1}{2},$$

$$\text{i } p_3 = Vx_3 = \frac{13}{4}\,\frac{3}{26} = \frac{3}{8}.$$

Prema tome, vektor mešovite strategije za igrača I je

$$P = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}).$$

U koloni y_{m+i} nalaze se vrednosti promenljivih y_j, gde je

$$y_1 = \frac{1}{39}, \quad y_2 = \frac{5}{39}, \quad y_3 = \frac{2}{13} \quad \text{i} \quad y_4 = 0.$$

Na osnovu ovih vrednosti proizilazi da je

$$q_1 = Vy_1 = \frac{13}{4}\,\frac{1}{39} = \frac{1}{12}, \quad q_2 = Vy_2 = \frac{13}{4}\,\frac{5}{39} = \frac{5}{12},$$

$$\text{i} \quad q_3 = \frac{13}{4}\,\frac{2}{13} = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je

$$Q = (\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}).$$