6.3.4. Rešavanje matričnih igara redukcijom matrice cene

Svođenjem konačne antagonističke igre na matričnu formu ne mora biti uvek jednoznačno, što može biti od interesa pri iznalaženju rešenja matrične igre. Drugim rečima, matrica cene polazne matrične igre može se često transformisati čime se olakšava postupak određivanja optimalnih strategija igrača i vrednosti matrične igre. Ove transformacije baziraju na pojmovima duple strategije i dominacije među strategijama.

Naime, polazeći od opšte definicije matrične igre, na skupu mogućnosti, tj. čistih strategija igrača mogu se definisati:

- duple strategije, i
- dominacija među strategijama.

Za dve čiste strategije igrača A,

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}), \quad i$$

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{kn}),$$

kome stoji na raspolaganju n strategijskih mogućnosti na suprot igraču B sa m strategijskih mogućnosti, kažemo da su duple ako je ispunjen uslov

$$a_{ij} = a_{kj}, \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

U ovom slučaju jedna od čistih strategija može da se zanemari što za rešavanje matrične igre može biti od interesa.

Ako među čistim strategijama a_i i a_k postoji takav odnos da je

$$a_{ij} \geqslant a_{kj}, \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

i postoji bar jedno j za koje je elemenat a_{ij} veći od a_{kj}, tada je čista strategija a_k nepovoljna za igrača A i on je neće birati. Drugim rečima kažemo da je strategija a_i dominantna u odnosu na strategiju a_k, što nam pruža mogućnost da u matrici cene zanemarimo red a_k pri rešavanju matrične igre.

Na sličan način na skupu mogućih strategija igrača B možemo definisati uslove za postojanje duplih i dominantnih strategija.

U sledećim primerima ilustrovan je ovaj prilaz u rešavanju matričnih igara.

16. Zadatak

Definicija zadatka. Dve protivničke strane učestvujući u duelu mogu da biraju, nezavisno jedna od druge, jednu od četiri moguće alternative koje su naznačene u tabeli 1.

Tabela 1.

Igrač	Alternative			
I	x_1	x_2	x_3	x_4
II	y_1	y_2	y_3	y_4

Funkcija cene igre za igrača I koja zavisi od strategijskog izbora, tj. od para alternativa (x_i, y_j), definisana je sledećim podacima:

$$C(x_1, y_1) = 2;\ C(x_1, y_2) = 0;\ C(x_1, y_3) = 1;\ C(x_1, y_4) = 4;$$
$$C(x_2, y_1) = 1;\ C(x_2, y_2) = 2;\ C(x_2, y_3) = 5;\ C(x_2, y_4) = 3;$$
$$C(x_3, y_1) = 4;\ C(x_3, y_2) = 1;\ C(x_3, y_3) = 3;\ C(x_3, y_4) = 2;$$
$$C(x_4, y_1) = 1;\ C(x_4, y_2) = 2;\ C(x_4, y_3) = 5;\ C(x_4, y_4) = 3;$$

a) Formirati matricu cene igre.
b) Pronaći dominantne i duple strategije matrične ige.
c) Izračunavati optimalne strategije igrača i naći vrednost matrične igre.

Rešenje: a) Matrica cene igre ima oblik

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{matrix} \right\|$$

ili ako to tablično predstavimo imaćemo da određenom redu odgovara određena alternativa igrača I, a određenoj koloni odgovara određena alternativa igrača II, kako je to prikazano u tabeli 2.

Tabela 2

I \ II	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	2	0	1	4
x_2	1	2	5	3
x_3	4	1	3	2
x_4	1	2	5	3

b) Dominantne i duple strategije. Za igrača I strategije x_2 i x_4 su duple. Prema tome, od te dve alternative on će uvek birati samo jendu. Otuda se matrica cene svodi na oblik koji je prikazan u tabeli 3.

Tabela 3

I \ II	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	2	0	1	4
x_2	1	2	5	3
x_3	4	1	3	2

Za igrača II alternativa y_2 je dominantna u odnosu na y_3 i y_4.

Prema tome, igrač II će uvek birati alternativu y_2. Otuda će matrica cene biti svedena na oblik dat u tabeli 4.

Tabela 4

I \ II	y_1	y_2
x_1	2	0
x_2	1	2
x_3	4	1

Za igrača I alternativa x_3 je dominantna u odnosu na alternativu x_1, jer mu ona uvek obezbeđuje veću dobit bez obzira šta će izabrati igrač II. Prema tome, matrica cene igre redukuje se na dimenzije 2 x 2, tj. kao što je to prikazano u tabeli 5.

Tabela 5

I \ II	y_1	y_2
x_2	1	2
x_3	4	1

c) **Optimalne strategije igrača i vrednost igre**. Kako ova matrična igra nema sedlo (sedlastu tačku) to će se njeno rešenje nalaziti u domenu mešovitih strategija.

Vektor mešovitih strategija za igrača I je

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

gde smo već utvrdili da je $p_1 = 0$ i $p_4 = 0$.

Vektor mešovitih strategija za igrača II je

$$Q = (q_1, q_2, q_3, q_4),$$

gde smo takođe utvrdili da su strategije $q_3 = 0$ i $q_4 = 0$.

Preostale komponente vektora mešovitih strategija P i Q odredićemo rešavajući matričnu igru

	I \ II	y_1	y_2
p_2	x_2	1	2
p_3	x_3	4	1

Po definiciji očekivana vrednost igre je

$$C(P, Q) = \sum_i \sum_j a_{ij}\, p_i\, q_j .$$

Polazeći od vrednosti za a_{ij} redukovane matrice možemo pisati da je

$$C(P, Q) = 1 \cdot p_2 q_1 + 2 \cdot p_2 q_2 + 4 \cdot p_3 q_1 + 1 \cdot p_3 q_2,$$

ili ako razdvojimo mešovite strategije možemo pisati da je

$$C(P, Q) = p_2 (q_1 + 2q_2) + p_3 (4q_1 + q_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača I u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće p_2 i p_3 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $p_2 + p_3 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$q_1 + 2q_2 = C(P, Q), \text{ i } 4q_1 + q_2 = C(P, Q).$$

Sa druge strane, ako razdvajanje mešovitih strategija izvedemo na drugi način možemo pisati da je

$$C(P, Q) = q_1 (p_2 + 4p_3) + q_2 (2p_2 + p_3).$$

Ako je rešenje igre za igrača II u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće q_1 i q_2 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $q_1 + q_2 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$p_2 + 4p_3 = C(P, Q)$$
$$2p_2 + p_3 = C(P, Q).$$

Ako poslednjem sistemu jednačina dodamo jednačinu

$$p_2 + p_3 = 1,$$

možemo naći rešenje ovog sistema jednačina koje je u opštem slučaju dato sledećim izrazima:

$$p_2 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$$p_3 = 1 - p_2, \text{ i } C(P, Q) = a_{11} p_2 + a_{21} p_3.$$

Kako je $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 4$ i $a_{22} = 1$, zamenom ovih vrednosti u prethodnim jednačinama dobija se da je

$$p_2 = \frac{3}{4},\ p_3 = \frac{1}{4} \text{ i } C(P, Q) = \frac{7}{4}.$$

Mešovite strategije vektora Q definisane su izrazima

$$q_1 = \frac{C(P, Q) - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = 1 - q_1,$$

odakle proizilazi da je

$$q_1 = \frac{1}{4} \text{ i } q_2 = \frac{3}{4}.$$

Prema tome, rešenje problema je

$$P = (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0),$$

$$Q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0),$$

$$C(P, Q) = \frac{7}{4}.$$

17. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra u kojoj učestvuju dva igrača svodi se na matričnu igru sa matricom cene, koja je data u tabeli 1. Elementi matrice definišu dobit igrača I u odnosu na igrača II.

Tabela 1

Igrač II / Igrač I	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	2
A_2	4	0	5
A_3	0	8	1

Odrediti optimalne strategije igrača i naći vrednost igre.

Rešenje. Prvo, utvrduje se da li matrična igra ima rešenje u domenu čistih strategija.

I \ II	B_1	B_2	B_3	min reda
A_1	2	4	2	2
A_2	4	0	5	0
A_3	0	8	1	0
max kolone	4	8	5	

Kako je

$$\alpha = \max(2; 0; 0) = 2$$
$$\beta = \min(4; 8; 5) = 4,$$

što znaći da su gornja i donja vrednost igre zraličite; igra nema sedlo i njeno rešenje se nalazi u domenu mešovitih strategija.

Kada se uporede strategije B_1 i B_3 drugog igrača, očigledno je da je strategija B_3 za njega uvek nepovoljnija u odnosu na B_1. Prema tome, kolonu B_3 u matrici cene možemo brisati čime se prethodna igra svodi na igru 3 x 2.

Vektor mešovite strategije za igrača II je

$$Q = (q_1, q_2, 0); \; q_1 + q_2 = 1; \; q_j \geq 0, \; (j = 1, 2. 3).$$

Vektor mešovite strategije za igrača I je

$$P = (p_1, p_2, p_3); p_1 + p_2 + p_3 = 1; \; p_i \geq 0. \; (i = 1, 2, 3)$$

Očekivano plaćanje za igrača II, ako igrač I odabere čistu strategiju A_1, je

$$C(A_1, Q) = 2q_1 + 4q_2,$$

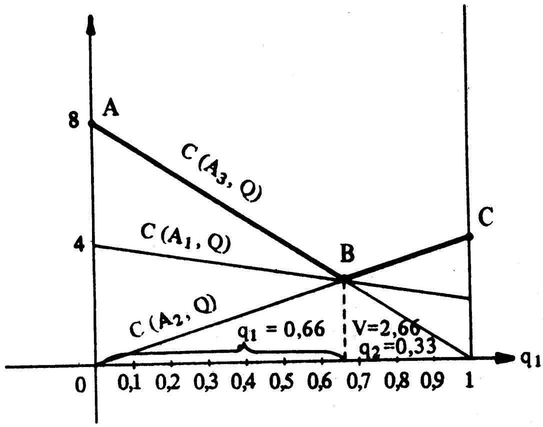
a za ostale čiste strategije igrača I možemo pisati

$$C(A_2, Q) = 4q_1 + 0q_2,$$
$$C(A_3, Q) = 0q_1 + 8q_2.$$

Kako je $q_1 + q_2 = 1$, to se dalje može pisati da je

$$C(A_1, Q) = 4 - 2q_1$$
$$C(A_2, Q) = 4q_1$$
$$C(A_3, Q) = 8 - 8q_1.$$

Poslednji sistem jednačina prikazan je grafički na slici 1, gde su sračunate vrednosti za komponente vektora Q, kao i vrednost igde V.



Slika 1.

Iz slike se vidi da je za igrača I aktivan par strategija bilo koji par: $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$.

Imajući u vidu prethodno dobijene rezultate prvobitnu matričnu igru možemo svesti na matricu 2 x 2. Ako prvi igrač uzme za aktivne strategije A_1 i A_2 matrica cene će biti:

	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	4	0

Prema tome, komponente vektora mešovite strategije P pronalazimo rešavajući ovu matricu, tj. rešavajući sledeći sistem jednačina

$$2p_1 + 4p_2 = V$$
$$4p_1 + 0p_2 = V$$
$$p_1 + p_2 = 1,$$

odakle sledi da je $\quad p_1 = \frac{2}{3}, \; p_2 = \frac{1}{3} \;\text{ i }\; V = \frac{8}{3}.$

Vektor mešovite strategije za početnu matričnu igru je, za igrača I

$$P = (2/3, 1/3, 0),$$

a za igrača II $\quad Q = (2/3, 1/3, 0).$

Vrednost igre je $\quad C(P, Q) = V = \frac{8}{3}$

18. Zadatak

Definicija zadatka. Proveriti da li će rešenje matrične igre u prethodnom zadatku biti isto ako igrač I izabere za aktivne strategije:

a) strategijski par $A_1 \, A_3$, ili

b) strategijski par $A_2 \, A_3$.

Rešenje. a) Za strategijski par $A_1 A_3$ matrična igra se svodi na matricu cene

I \ II	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	2
A_3	0	8	1

čija je rešenje u domenu čistih strategija, i to parovi (A_1, B_1) i (A_1, B_3).

b) Za strategijski par $A_1 A_3$ matrična igra se svodi na matricu cene

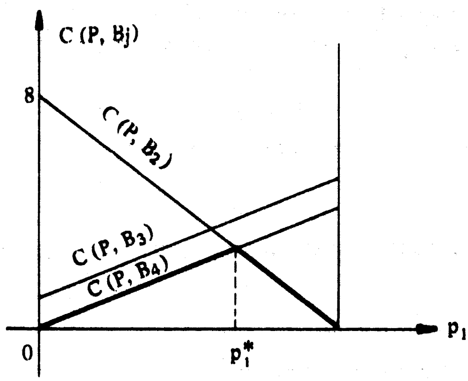
I \ II	B_1	B_2	B_3
A_2	4	0	5
A_3	0	8	1

Rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija.

Očekivane dobiti igrača I mogu se prikazati sledećim sistemom jednačina

$$C(P, B_1) = 4p_1$$
$$C(P, B_2) = 8 - 8p_1$$
$$C(P, B_3) = 4p_1 + 1.$$

Ako promene ovih očekivanih dobiti u zavisnosti od promene veličine p_1 prikažemo grafički dobija se sledeći dijagram (slika 1).



Slika 1.

Prema tome,

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ a } v = 8/3.$$

Ovome odgovara vektor mešovite strategije za igrača II,

$$Q = (2/3, 1/3, 0).$$

Prema tome, strategijski par $(A_2\ A_3)$ je jednako pogodan za igrača I kao i strategijski par (A_1, A_2), dok je strategijski par (A_1, A_3) nepovoljan.

19. Zadatak

Definicija zadatka. Koristeći se osobinama duplih strategija i dominacijom među strategijama, naći rešenja matričnih igara definisanih matricama cena:

A)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	2	−1	−3	−2
A_2	0	7	2	−5	−1
A_3	2	3	0	−2	−1
A_4	4	4	1	3	−3
A_5	−1	1	5	4	3

B)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	10	2	2
A_2	2	2	9	9
A_3	5	10	5	10
A_4	4	2	4	2

C)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,3	0,4	0,5	1	0
A_2	0,2	0,3	0,6	0	1
A_3	0,1	0,5	0,3	0,1	0

D)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	4
A_2	1	3	4	3
A_3	2	3	5	4
A_4	5	4	2	1

Rešenje:

A) $P = (0, 0, \frac{7}{8}, 0, \frac{1}{8})$

$Q = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$C(P, Q) = -\frac{5}{4}$

B) $P = (\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, 0, 0)$

$Q = (\frac{11}{15}, 0, \frac{4}{15}, 0)$

$C(P, Q) = \frac{86}{15}$

C) $P = (\frac{8}{11}, \frac{3}{11}, 0)$

$Q = (\frac{10}{11}, 0, 0, 0, \frac{1}{11})$

$C(P, Q) = \frac{3}{11}$

D) $P = (\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$ $Q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$

$C(P, Q) = 3.$