6.3. REŠAVANJE MEŠOVITIH MATRIČNIH IGARA

Rešiti matričnu igru znači odrediti optimalne strategije koje obezbeđuju najbolji očekivani ishod igre, pod uslovom da se te strategije sistematski primenjuju u toku igre.

Optimalna strategija može biti čista strategija (matrične igre sa sedlom) ili mešovita strategija. Čistih strategija ima onoliko koliko igrač ima alternativa ponašanja u igri.

Mogućnosti izbora mešovitih strategija su daleko veće. Ukoliko je veći broj čistih strategija to su i ove mogućnosti veće. Za dve čiste strategije u igri, ako igrač želi da primenjuje mešovite strategije, on će se nekom verovatnoćom p_1 koristiti jednu čistu strategiju ili sa verovatnoćom $1 - p_1$ drugu čistu strategiju. Njegove mogućnosti, u ovom slučaju, su ograničene na vrednosti verovatnoće p_1 u intervalu od 0 do 1.

U opštem slučaju, rešiti matričnu igru znači odrediti:

a) vektor mešovite strategije za igrača I,

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n), \text{ gde je}$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_j + \ldots + p_n = 1;$$

b) vektor mešovite strategije za igrača II,

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots q_m), \text{ gde je}$$
$$q_1 + q_2 + \ldots + q_j + \ldots + q_m = 1; \text{ i}$$

c) vrednost matrične igre koja je definisana sledećim izrazom

$$C(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_i\, q_j \,, \text{ gde su}$$

p_i — verovatnoća izbora i-te čiste strategije igrača I;
q_j — verovatnoća izbora j-te čiste strategije igrača II;
a_{ij} — dobit u igri igrača I u odnosu na igrača II za strategijski par (i, j).

6.3.1. Rešavanje matričnih igara 2 x 2

Za matrične igre kod kojih svakom od igrača stoje na raspolaganju samo po dve čiste strategije kažemo da spadaju u grupu matričnih igara čija je matrica cene dimenzija 2 x 2. Ako ovakva matrična igra nema sedlo tada je rešenje matrične igre u domenu mešovitih strategija, tj. verovatnoće p_1, p_2, q_1 i q_2 su veće od nule. Postupak rešavanja ovih matričnih igara ilustrovan je sledećim primerima:

dvije vrst formacija odbran

6. Zadatak

U nekoj sportskoj igri

Definicija zadatka. U konfliktnoj situaciji učestvuju dve protivničke strane. Prvoj strani na raspolaganju stoje dve vrste oružja: A_1 i A_2, za odbranu, a drugoj strani dva tipa aviona za napad B_1 i B_2. Cilj protivničke strane A je da odabere takvo oružje koje je efikasnije u odnosu na upotrebljeni avion. Međutim, protivnik nastoji da smanji verovatnoću pogađanja izborom pogodnijeg aviona.

Verovatnoće za sve kombinacije strategija protivničkih strana date su u tabeli 1, koja predstavlja matricu cene igre, tako da je konfliktna situacija definisana kao antagonistička igra.

Tabela 1

A \ B	B_1	B_2
A_1	0,4	0,2
A_2	0,2	0,6

a) Naći gornju i donju vrednost matrične igre.
b) Odrediti optimalne strategije i vrednost igre.

Rešenje

a) Donja vrednost igre definisana je izrazom

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij},$$

gde su a_{ij} elementi matrice cene, koji su dati u tabeli 1.

Prema tome, imamo da je

$$\alpha_1 = \min(0{,}4; 0{,}2) = 0{,}2,$$
$$\alpha_2 = \min(0{,}2; 0{,}6) = 0{,}2.$$

Otuda je

$$\alpha = \max(\alpha_1; \alpha_2) = \max(0{,}2; 0{,}2) = 0{,}2$$
$$\alpha = 0{,}2.$$

Gornja vrednost igre definisana je izrazom

$$\beta = \min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

Prema tome, za date brojne vrednosti imamo da je:

$$\beta_1 = \max(0{,}4; 0{,}2) = 0{,}4$$
$$\beta_2 = \max(0{,}2; 0{,}6) = 0{,}6,$$

i $\quad \beta = \min(\beta_1; \beta_2) = \min(0{,}4; 0{,}6) = 0{,}4$

$$\beta = 0{,}4.$$

Kako je $\alpha \neq \beta$ matrična igra nema sedlo i optimalne strategije igrača nalaze se u domenu mešovitih strategija.

b) Vektor mešovite strategije protivničke strane A je

$$P = (p_1, p_2), \text{ gde je } p_1 + p_2 = 1,$$

što znači da će protivnička strana A odabirati strategijsku mogućnost A_1 sa verovatnoćom p_1 a strategijski izbor A_2 sa verovatnoćom p_2.

Vektor mešovite strategije protivničke strane B je

$$Q = (q_1, q_2), \text{ gde je } q_1 + q_2 = 1$$

Vrednost matrične igre je definisana sledećim izrazom

$$C(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_i\, q_j.$$

Za dati brojni primer imamo da je

$$C(P, Q) = 0{,}4\, p_1 q_1 + 0{,}2\, p_1 q_2 + 0{,}2\, p_2 q_1 + 0{,}6\, p_2 q_2,$$

ili možemo pisati da je

$$C(P, Q) = p_1 \overbrace{(0{,}4\, q_1 + 0{,}2\, q_2)}^{\overline{A}} + p_2 \overbrace{(0{,}2\, q_1 + 0{,}6\, q_2)}^{\overline{A}}.$$

Ako je rešenje igre za igrača B u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće q_1 i q_2 veće od nule i ispunjavaju uslov mešovitih strategija igrača B, da je $q_1 + q_2 = 1$. tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$C(P, Q) = 0{,}4\, q_1 + 0{,}2\, q_2 ,$$

$$C(P, Q) = 0{,}2\, q_1 + 0{,}6\, q_2 .$$

Ovome se dodaje da je $q_1 + q_2 = 1$, pri čemu se dobijaju tri jednačine sa tri nepoznate, čije je rešenje

$$q_1 = \frac{2}{3}\ ; q_2 = \frac{1}{3}\ \text{ i } C(P, Q) = \frac{1}{3} .$$

Ako izraz za $C(P, Q)$ uradimo po verovatnoćama q_1 i q_2, dobija se

$$C(P, Q) = q_1\ (0{,}4\, p_1 + 0{,}2\, p_2) + q_2\ (0{,}2\, p_1 + 0{,}6\, p_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača A u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće p_1 i p_2 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $p_1 + p_2 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$C(P, Q) = 0{,}4\, p_1 + 0{,}2\, p_2 ,$$
$$C(P, Q) = 0{,}2\, p_1 + 0{,}6\, p_2$$

i kako je $p_1 + p_2 = 1$, dobijaju se sledeća rešenja za p_1, p_2 i $C(P, Q)$.

$$p_1 = \frac{2}{3}\ ; p_2 = \frac{1}{3}\ \text{ i }\ C(P, Q) = \cancel{\frac{1}{6}} . \quad \frac{1}{3}$$

Dakle, optimalne strategije su

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

a vrednost igre je

$$C(P, Q) = \frac{1}{3} .$$

7. Zadatak

Ako je matrična igra definisana matricom 2 x 2, pokazati da se komponente vektora mešovitih strategija mogu sračunati na osnovu sledećih opštih izraza za komponente vektora i vrednost matrične igre.

B / A	B_1 q_1	B_2 q_2
A_1 p_1	a_{11}	a_{12}
A_2 p_2	a_{21}	a_{22}

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}\ ;\ p_2 = 1 - p_1 ;$$

$$C(P, Q) = a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 ;$$

$$q_1 = \frac{C(P, Q) - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2 = 1 - q_1 .$$

8. Zadatak

Definicija zadatka. Dva preduzeća koja dele jedno tržište mogu reklamirati svoje proizvode preko TV i preko novina. Svakog meseca organi upravljanja preduzeća donose odluku o svom budžetu za reklamu. Pretpostavimo da su organi upravljanja preduzeća A preko svojih stručnih službi uspeli da odrede:

1. da, ako u jednom mesecu njihovo preduzeće reklamira posmatrani proizvod samo na TV, oni će imati dodatnu dobit od:

a) 100 novčanih jedinica, ako se konkurentsko preduzeće B odluči na istu strategiju, i

b) 0 novčanih jedinica, ako se preduzeće B odluči na strategiju reklamiranja preko novina.

2. da, ako reklamiraju svoj proizvod samo preko novina:

a) izgubiće 100 novčanih jedinica, ako preduzeće B reklamira svoj proizvod preko TV, a

b) zaradiće 200 novčanih jedinica, ako se preduzeće B odluči na reklamu preko novina.

Potrebno je:

1) Formirati matricu cene igre; i

2) Naći rešenje matrične igre.

Rešenje

Matrica cene može biti prikazana na sledeći način

	I pred. \ II pred.	TV (q_1)	N (q_2)
p_1	TV	100	0
p_2	N	−100	200

I pred. \ II pred.	N	TV
N	200	−100
TV	0	100

Vektor mešovite strategije za preduzeće II dobijamo rešavanjem sledećeg sistema jednačina

$$100\, q_1 + 0\, q_2 = V$$

$$-100\, q_1 + 200\, q_2 = V$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

odakle proizilazi da je

$$q_1 = \frac{1}{2};\ q_2 = \frac{1}{2},\ \text{tj. } Q = (\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}) \quad \text{i}$$

$$C\,(P, Q) = V = 50.$$

Vektor mešovite strategije za igrača I određuje se na sličan način rešavajući sistem jednačina:

$$100\,p_1 - 100\,p_2 = V$$

$$200\,p_2 = V$$

$$p_1 + p_2 = 1,$$

odakle je

$$p_1 = \frac{3}{4};\quad p_2 = \frac{1}{4};\ \text{tj. } P = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

9. Zadatak

Definicija zadatka. Matrična igra 2 x 2 definisana je matricom cene u kojoj elementi predstavljaju dobit igrača I u odnosu na igrača II.

I \ II	B_1	B_2
A_1	-1	2
A_2	3	1

Dati grafičku interpretaciju matrične igre i naći njeno rešenje.

Rešenje. Pošto ovmatrična igra nema sedlo rešenje problema se nalazi u domenu mešovitih strategija.

Vektor mešovite strategije za igrača I, $P = (p_1, p_2)$, određuje se preko očekivanih dobiti

$$C(P, B_1) = -p_1 + 3\,p_2;$$

$$C(P, B_2) = 2\,p_1 + p_2.$$

Kako je $p_1 + p_2 = 1$ to se gornji izrazi mogu pisati u sledećem obliku

$$C(P, B_1) = 4\,p_2 - 1$$

$$C(P, B_2) = 2 - p_2\ .$$

Igrač I biraće vektor mešovite strategije P tako da očekivane dobiti $C(P, B_1)$ i $C(P, B_2)$ budu veće ili najmanje jednake vrednosti matrične igre.

Ako očekivane dobiti predstavimo grafički, dobija se sledeći dijagram (slika 1) promene minimalne očekivane dobiti u zavisnosti od verovatnoće p_2.

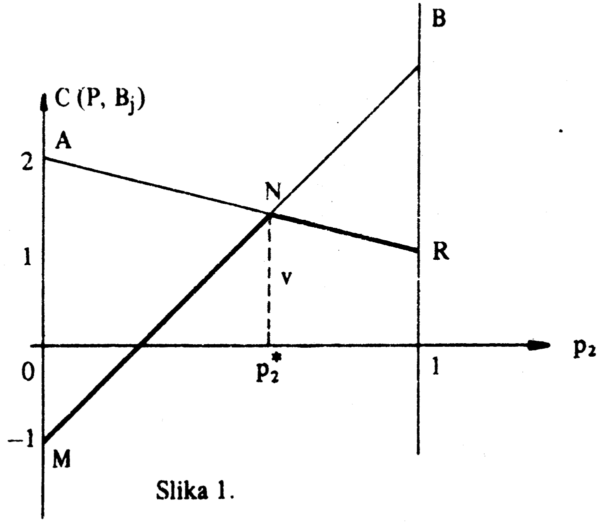
Za igrača I određivanje optimalne mešovite strategije p^* sastoji se u iznalaženju veovatnoće p_2, koja će omogućiti najveću minimalnu dobit. Ako to analitički izrazimo, znači da će igrač I ispitivati funkciju $f(p_2)$ definisanu izrazom

$$f(p_2) = \min\,\{4p_2 - 1;\ \ 2 - p_2\}.$$

Ova funkcija definisana je u intervalu $0 \leq p_2 \leq 1$ i njoj na grafikonu odgovara izlomljena linija MNR.

Optimalna verovatnoća p_2^* određuje se na osnovu izraza

$$f(p_2^*) = \max_{p_2} f(p_2) = v,$$



Slika 1.

gde je v vrednost matrične igre. Vrednosti za v i p_2^* određujemo iznalaženjem koordinata tačke preseka N duži AR i BM, tj.

$$4\, p_2^* - 1 = 2 - p_2^*$$

$$p_2^* = \frac{3}{5}\,;\ p_1^* = 1 - p_2^* = \frac{2}{5}\,.$$

Ovim je određen vektor mešovite strategije igrača I

$$P^* = (\frac{2}{5}\,;\ \frac{3}{5})$$

i vrednost matrične igre

$$C(P^*, Q^*) = v = \frac{7}{5}\,.$$

Vektor mešovite strategije za igrača II, Q^*, može se odrediti na sličan način – grafički ili pak rešavajući sistem jednačina

$$\begin{aligned} -q_1 + 2\,q_2 &= v \\ 3q_1 + q_2 &= v \\ q_1 + q_2 &= 1. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je

$$q_1 = \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{4}{5}\,.$$

Prema tome rešenje ove matrične igre je:

$$P = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right); \ Q = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right) \ \text{i}$$

$$C(P, Q) = \frac{7}{5}.$$

10 Zadatak

Definicija zadatka. Dati grafičku ilustraciju matričnih igara i naći njihova rešenja.

B \ A	B_1	B_2
A_1	0	5
A_2	1	8

B \ A	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	7	1

B \ A	B_1	B_2
A_1	4	2
A_2	1	3

Rešenje:

a) $P = \left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14}\right)$ b) $P = (0{,}85; 0{,}15)$ c) $P = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$Q = \left(\frac{13}{14}; \frac{1}{14}\right)$ $Q = (0{,}3; 0{,}7)$ $Q = \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$

$C(P, Q) = -\frac{5}{14}$ $C(P, Q) = 2{,}7$ $C(P, Q) = \frac{7}{4}.$

6.3.2. Rešavanje matričnih igara n x 2

Matrične igre kod kojih igraču I stoji na raspolaganju n čistih strategija a igraču II samo dve mogu se rešavati grafički svođenjem na matricu dimenzija 2 x 2.

Postupak rešavanja ovih matričnih igara ilustrovan je sledećim primerima.

11. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra definisana je matricom cene

B / A	B_1	B_2
A_1	10	−4
A_2	5	7
A_3	−5	13

gde elementi matrice cene definišu dobit učesnika u igri A u odnosu na učesnika B.

Odrediti optimalne strategije igrača i vrednost matrične igre.

Rešenje. Rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija, a vrednost igre u granicama

$$\alpha = 5 \leqslant v \leqslant \beta = 10.$$

U ovakvim slučajevima neophodno je prvo odrediti vektor optimalne strategije za igrača B. U tom cilju definišu se očekivani gubici za igrača B za svaki mogući izbor čiste strategije igrača A. Tako imamo da je

$$C(A_1, Q) = 10\,q_1 - 4\,q_2$$
$$C(A_2, Q) = 5\,q_1 + 7\,q_2$$
$$C(A_3, Q) = -5\,q_1 + 13\,q_2\,.$$

Imajući u vidu da je $q_1 + q_2 = 1$, ovaj sistem jednačina se svodi na sledeće

$$C(A_1, Q) = 14\,q_1 - 4$$
$$C(A_2, Q) = 7 - 2\,q_1$$
$$C(A_3, Q) = 13 - 18\,q_1\,.$$

Grafički prikaz ovog sistema jednačina dat je na slici 1.

Igrač B nastojaće da odabere verovatnoću q_1 tako da minimizira maksimalne moguće gubitke, tj. da ne dozvoli da njegovi gubici budu veći od vrednosti igre. Otuda igrač B ispituje funkciju $f(q_1)$, koja je definisana izrazom

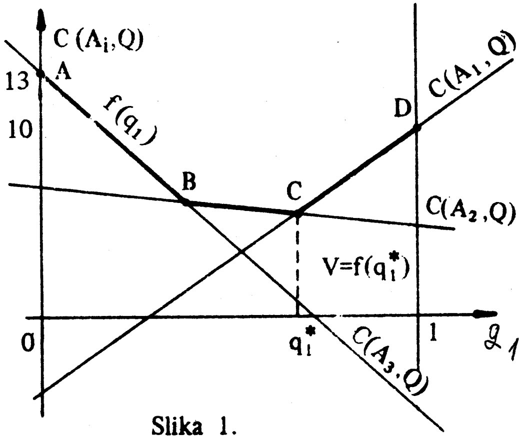
$$f(q_1) = \max\ \{\, 14\,q_1 - 4;\ 7 - 2\,q_1;\ 13 - 18\,q_1 \,\}\,.$$

Prema tome, optimalna vrednost q_1^* određuje se na osnovu izraza

$$f(q_1^*) = \min_{q_1}\ \{ f(q_1) \}$$

Iz grafičkog prikaza se vidi da su $q_1{}^*$ i $f(q_1{}^*)$ koordinate tačke preseka pravih

$$C(A_1, Q) = 14 q_1 - 4$$
$$C(A_2, Q) = 7 - 2 q_1 \ .$$



Slika 1.

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se da je

$$q_1^* = \frac{11}{16} \quad i \quad q_2^* = \frac{5}{16}\ , \quad a$$

$$f(q_1^*) = \frac{45}{8} = v\ .$$

Polazeći od ovoga mogu se sračunati očekivani gubici

$$C(A_1, Q) = \frac{45}{8}$$

$$C(A_2, Q) = \frac{45}{8}$$

$$C(A_3, Q) = \frac{5}{8}\ .$$

Imajući u vidu opšti izraz za vrednost matrične igre može se pisati da je

$$v = C(P, Q) = \sum_{i=1}^{3} C(A_i, Q)\, p_i\ ,$$
$$C(P, Q) = \frac{45}{8} \cdot p_1 + \frac{45}{8} \cdot p_2 + \frac{5}{8} \cdot p_3\ ,$$

a kako je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, to se može pisati da je

$$C(P, Q) = \frac{45}{8} p_1 + \frac{45}{8}(1 - p_1 - p_3) + \frac{5}{8} p_3 = \frac{45}{8} - \frac{40}{8} p_3\ .$$

Igrač A će nastojati da odabere vektor mešovite strategije tako da njegov dobitak u igri ne bude manji od vrednosti igre, tj. sledi da je $p_3 = 0$. Za igrača I igra se svodi na matricu cene

A \ B	B_1	B_2
A_1	10	−4
A_2	5	7

čije je rešenje $p_1 = \frac{1}{8}$ a $p_2 = \frac{7}{8}$. Prema tome, možemo pisati da je rešenje matrične igre

$$P^* = \left(\frac{1}{8}\,;\ \frac{7}{8}\,;0\right)$$

$$Q^* = \left(\frac{11}{16}\,;\ \frac{5}{16}\right)$$

$$C(P^*, Q^*) = \frac{45}{8}.$$

12. Zadatak

Definicija zadatka. Za matrične igre definisane matricama cene odrediti optimalne strategije igrača i vrednost igre,

A \ B	B_1	B_2
A_1	3	0
A_2	2	3
A_3	0	4
A_4	4	−1

A \ B	B_1	B_2
A_1	7	−1
A_2	5	4
A_3	1	5
A_4	3	−2
A_5	2	1

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	0	1
A_3	−1	0
A_4	2	−3
A_5	1	2

ako elementi matrica određuju dobit igrača A u odnosu na igrača B za različite parove čistih strategija.

Rešenje

a) $P = (0; 5/6; 0; \frac{1}{6})$

$Q = (2/3; 1/3)$

$C(P, Q) = 7/3$

b) $P = (0; 4/5; 1/5; 0; 0)$

$Q = (1/5; 4/5)$

$C(P, Q) = \frac{21}{5}$.

c) $P = (0; 0; 0; 1/6; 5/6)$

$Q = (5/6; 1/6)$

$C(P, Q) = 7/6.$

13. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra svodi se na matricu cene oblika

A \ B	B_1	B_2
A_1	2	2
A_2	4	−2
A_3	0	4

Pokazati da rešenje matrične igre nije jednoznačno u pogledu optimalnih mešovitih strategija.

Odrediti vrednost matrične igre i optimalne strategije za igrača A i B.

Rešenje: Vrednost matrične igre nalazi se u granicama $2 < V < 4$. Očekivani gubici igrača B definisani su sistemom jednačina

$$C(A_1, Q) = 2q_1 + 2q_2$$

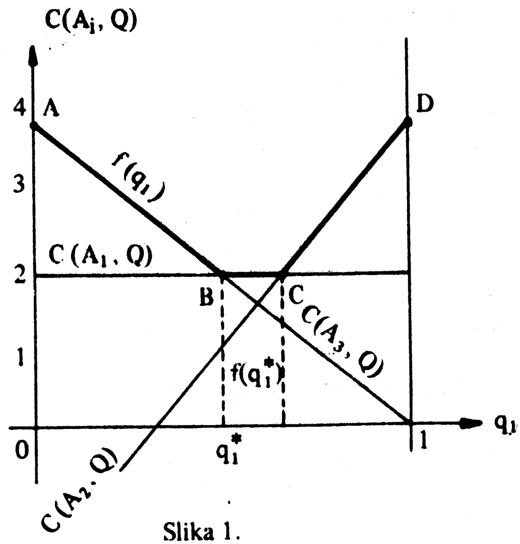
$$C(A_2, Q) = 4q_1 - 2q_2$$

$$C(A_3, Q) = 4q_2 \ .$$

Kako je $q_1 + q_2 = 1$ to se ovaj sistem svodi na sledeće jednačine

$$C(A_1, Q) = 2$$
$$C(A_2, Q) = 6q_1 - 2$$
$$C(A_3, Q) = 4 - 4q_1 .$$

Ove jednačine koje definišu promenu očekivanog gubitka igrača B, koji primenjuje mešovitu strategiju, u zavisnosti od strategijskog izbora igrača A grafički su prikazane na sledećem dijagramu (slika 1).



Slika 1.

Funkcija najvećih gubitaka za igrača B definisana je izrazom

$$f(q_1) = \max_{0 \leq q_1 \leq 1} \{ 2; 6q_1 - 2; 4 - 4q_1 \} .$$

Vrednost matrične igre je

$$C(P, Q) = v = f(q_1^*) = \min_{q_1} \{ f(q_1) \} = 2$$

koja se sračunava određivanjem ordinata tačke B ili C.

Iz ovog proizilazi da rešenje za optimalnu strategiju igrača B nije jednoznačno. Sve optimalne strategije mogu se odrediti analizom dveju pomoćnih matričnih igara:

A \ B	B_1	B_2
A_1	2	2
A_3	0	4

A \ B	B_1	B_2
A_1	2	2
A_2	4	2

Rešenje ovih matričnih igara su

I) $P = (1, 0)$ i II) $P = (1, 0)$

$Q = (1/2, 1/2)$ $\quad Q = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$C(P, Q) = 2$ $\quad C(P, Q) = 2.$

Vrednost $q_1 = \frac{1}{2}$ je apscisa tačke B, a vrednost $q_1 = \frac{2}{3}$ je apscisa tačke C.

Optimalne strategije za igrača B su strategije

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ i } (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

kao i sve strategije dobijene konveksnom kombinacijom ovih, tj.

$$\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (1-\lambda)(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6})$$

za $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Prema tome, rešenje prvotibne matrice igre je

$$P = (1, 0, 0)$$

$$Q = (\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}) \quad \text{za} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

$$C(P, Q) = 2.$$

Rešenje igre za igrača A je u domenu čiste strategije,

dok je za igrača B to rešenje u domenu mešovite strategije. Međutim, ako se matrice I i II posmatraju izolovano tada je očigledno da postoji dominacija među čistim strategijama B_1 i B_2, i jedna i druga matrična igra imaju sedlo, ali to ne utiče na rešenje prvobitne matrične igre.

6.3.3. Rešavanje matričnih igara 2 x m

Matrične igre kod kojih igraču I stoji na raspolaganju 2 čiste strategije, a igraču II m različitih čistih strategija, mogu se takođe rešavati grafički svođenjem na matricu dimenzije 2 X 2.

Postupak rešavanja ovih matričnih igara ilustrovan je sledećim primerima.

14. Zadatak

Definicija zadatka. U matričnoj igri igraču I stoje na raspolaganju strategije P_1 i P_2, a igraču II strategije Q_1, Q_2 i Q_3. Elemenat a_{ij} u matrici cene predstavlja dobit za igrača I ako odabere i-tu strategiju a njegov protivnik istovremeno odabere j-tu strategiju. Za igrača II ovaj isti elemenat predstavlja gubitak u igri za odgovarajući par strategija. Matrica cene igre data je u tabeli 1.

Tabela 1

Igrač II / Igrač I	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	6	5	10
P_2	10	20	3

Potrebno je:

a) Odrediti optimalne mešovite strategije oba igrača i vrednost igre;

b) Kakve će biti optimalne mešovite strategije igrača ako elemenat a_{13} u matrici cene promeni vrednost, tako da je nova vrednost ovog elementa jednaka 5?

Rešenje. Matrična igra nema sedlo i rešenje igre se nalazi u domenu mešovitih strategija. Matrična igra ima oblik (2xm), što znači da ćemo prvo tražiti vektor mešovite strategije za igrača I, tj. traži se

$$P = (p_1, p_2),$$

gde je

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ i } p_i > 0 \text{ za } i = 1, 2.$$

Pre svega, biće potrebno napisati izraze za očekivana plaćanja kada igrač I koristi mešovitu strategiju, a igrač II neki od strategijskih izbora: Q_1, Q_2 ili Q_3. U ovom slučaju dobija se, da je

$$C(P, Q_1) = 6\,p_1 + 10\,p_2$$
$$C(P, Q_2) = 5\,p_1 + 20\,p_2$$
$$C(P, Q_3) = 10p_1 + 3\,p_2$$

pri čemu je

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Kada se u navedenom sistemu jednačina smeni vrednost za $p_2 = 1 - p_1$

dobija se novi sistem jednačina

$$C(P, Q_1) = 10 - 4\,p_1$$
$$C(P, Q_2) = 20 - 15\,p_1$$
$$C(P, Q_3) = 3 + 7\,p_1\,.$$

Za igrača I, određivanje optimalne mešovite strategije znači da on treba da odredi takvu vrednost p_1, koja će omogućiti što je moguće veću minimalnu dobit.

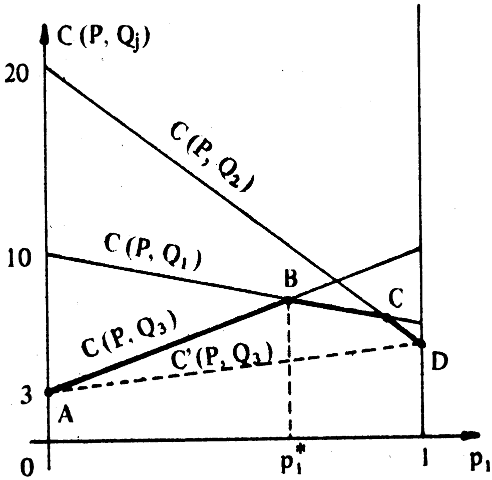
Ako to analitički izrazimo, znači da će igrač I ispitivati funkciju $f(p_1)$ definisanu izrazom

$$f(p_1) = \min \{ 10 - 4p_1;\ 20 - 15p_1;\ 3 + 7p_1 \}$$

u intervalu $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, pri čemu se traži takvo p_1^* za koje važi relacija

$$f(p_1^*) = \max_{p_1} f(p_1)$$

Da bi odredili funkciju $f(p_1)$, moramo grafički prikazati očekivana plaćanja igrača II u funkciji verovatnoće p_1 koja su definisana prethodnim sistemom jednačina. Ovaj grafički prikaz dat je na slici 1.



Slika 1.

Izlomljena linija ABCD predstavlja funkciju $f(p_1)$ sa maksimumom u tački B. Prema tome, tačka B odgovara optimalnoj mešovitoj strategiji igrača I, obezbeđujući mu najveću minimalnu dobit, a p_1^* sračunavamo tražeći presek pravih $C(P, Q_3)$ i $C(P, Q_1)$, tj. imamo da je

$$10 - 4p_1^* = 3 + 7p_1^*,$$

odakle proizilazi da je

$$p_1^* = \frac{7}{11},\quad p_2^* = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}.$$

$$C(P, Q_1) = \frac{82}{11}.$$

Igrač II mora nastojati da odabere svoju mešovitu strategiju tako da ne dozvoli igraču I da ostvari veću dobit nego što je dobit

$$C(P^*, Q_1) = \frac{82}{11}.$$

Naime, na osnovu jednačina za $C(P, Q_1)$, $C(P, Q_2)$ i $C(P, Q_3)$ sračunavaju se prosečna plaćanja, pri čemu se dobija

$$C(P^*, Q_1) = \frac{82}{11} ,$$

$$C(P^*, Q_2) = \frac{115}{11} ,$$

$$C(P^*, Q_3) = \frac{82}{11} .$$

Polazeći od opšteg izraza za vrednost matrične igre možemo pisati da je

$$C(P^*, Q) = \sum_{j=1}^{3} C(P^*, Q_j) \cdot q_j ,$$

te prema tome, imamo da je

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} q_1 + \frac{115}{11} q_2 + \frac{82}{11} q_3 ,$$

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} q_1 + \frac{115}{11} q_2 + \frac{82}{11} (1 - q_1 - q_2) ,$$

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} + \frac{33}{11} q_2 .$$

Iz poslednje jednačine očigledno je da igrač II treba da odabere strategiju $q_2 = 0$. Prema tome, optimalna mešovita strategija igrača II je

$$Q^* = (q_1^*, 0, q_3^*),$$

što je ekvivalentno matričnoj igri 2 x 2 sa matricom cene datom u tabeli 2.

Tabela 2

I \ II	Q_1	Q_3
P_1	6	10
P_2	10	3

Rešavajući ovu matričnu igru dobijamo rešenje za q_1^* i q_3^*

$$q_1^* = \frac{\frac{82}{11} - 10}{6 - 10} = \frac{7}{11},$$

$$q_3^* = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}.$$

Vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je

$$Q^* = (\frac{7}{11};0;\frac{4}{11}),$$

a vrednost matrične igre je

$$C(P^*, Q^*) = \frac{82}{11}.$$

Ako je vrednost elementa $a_{13} = 5$, problem se svodi na rešavanje nove matrične igre. Međutim, ako na grafikonu (slika 1) ucrtamo novo očekivano plaćanje

$$C(P, Q_3) = 5\,p_1 + 3\,p_2 = 2\,p_1 + 3,$$

s obzirom da je $p_1 + p_2 = 1$, te možemo zaključiti da se u ovom slučaju funkcija $f(p_1)$ svodi na duž AD a p_1^* je jednako jedinici, što znači da se rešenje igre nalazi u domenu čisith strategija, tj. matrična igra ima sedlo i rešenje je

$$P = (1;\ 0),\ Q = (0; 0; 1)\ \text{ i }\ C(P, Q) = 5.$$

15. Zadatak

Definicija zadatka. Matrične igre definisane su matricama cena, čiji elementi pokazuju dobit igrača I u zavisnosti od svog strategijskog izbora i strategijskog izbora igrača II.

A)

I \ II	B_1	B_2	B_3
A_1	0,4	0,5	0,8
A_2	0,7	0,2	0,1

B)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	1	−2
A_2	0	−3	4	2

C)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2

D)

I \ II	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	3	6	4	5
A_2	4	1	8	4	2

Odrediti rešenje matričnih igara.

Rešenje

A) $P = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$

$Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$C(P, Q) = 0{,}45$

B) $P = (\frac{5}{14}, \frac{9}{14})$

$Q = (0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7})$

$C(P, Q) = \frac{4}{7}$

C) $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$Q = (0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

$C(P, Q) = \frac{7}{2}$

D) $P = (1, 0)$

$Q = (0, 1, 0, 0, 0)$

$C(P, Q) = 3.$