6. TEORIJA IGARA

6.1. OPŠTI POJMOVI I DEFINICIJE IZ DOMENA MATRIČNIH IGARA

U oblasti operacionih istraživanja postoji značajna klasa upravljačkih zadataka koji su vezani za rešavanje problema donošenja odluka u uslovima nedovoljne definisanosti. Ako je reč o upravljanju nekom operacijom, nedefinisanost se može ogledati kako u uslovima izvođenja operacije tako i u svesnim akcijama protivnika ili drugih učesnika od kojih zavisi ishod operacije. Osim toga, nedefinisanost se može takođe, u manjoj ili većoj meri, odnositi i na ciljeve operacije, čiji se ishod samo ponekad može u potpunosti okarakterisati jednim jedinim parametrom, koji tada nazivamo pokazateljem efikasnosti.

Pri rešavanju upravljačkih zadataka, u uslovima odsustva potrebnih informacija, neophodno je imati u vidu da će uvek biti prisutan elemenat neizvesnosti u pogledu ishoda upravljačke akcije. Drugim rečima, biće prisutan određeni rizik, koji možemo izraziti kvantitativno kao neki gubitak.

Matematičke metode kojima se rešavaju ovakvi upravljački zadaci poznate su kao posebne discipline: **teorija igara i statističke metode odlučivanja.**

U rešavanju niza praktičnih zadataka operacionih istraživanja (u oblasti ekonomije, ratne veštine itd.), susrećemo se sa potrebom analize sitaucije, u kojoj dejstvuju dve (ili više) protivničke strane koje imaju različite ciljeve, pri čemu rezultat bilo kakve akcije nekog od učesnika zavisi od toga kakav će vid dejstva odabrati protivnik. Ovakve situacije u kojima treba donositi upravljačke odluke, nazivaju se konfliktnim situacijama.

Polazeći od definicije konfliktne situacije možemo reći da je teorija igara matematička teorija konfliktnih situacija.

Problemi konflikata su stari toliko koliko je staro i ljudsko društvo. Međutim, teorija igara je mlada matematička disciplina. Njen nastanak je vezan za ime američkog matematičara John von Neumann-a (1903–1957), koji je 1928. godine objavio svoj prvi rad iz teorije igara. Za prvo fundamentalno delo iz teorije igara smatra se knjiga: John von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, New York, 1944.

U ovom poglavlju Zbirke zadataka biće razmatrani oni problemi iz teorije konfliktnih situacija gde u konfliktu učestvuju samo dve protivničke strane.

Ako samo jedan protivnik može uticati na ishod događaja, igra se svodi na takozvanu igru jednog lica. Na primer, ako igrač A ima niz alternativa (strategija) $a_1, a_2, \ldots, a_m$, tj.

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

sa ishodom (cenom) koji se može proceniti kao dobit koja će zavisiti od odabrane alternative,

$$C(a_1), C(a_2), ..., C(a_m),$$

tada se za igrača A može tražiti optimalna alternativa a^* u skupu mogućih alternativa A, tako da bude ispunjen uslov

$$C(a^*) \geqslant C(a_i),$$

za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Situacija postaje znatno složenija ako imamo dva igrača koji mogu da utuču na ishod igre.

Skup mogućih alternativa za igrača A je

$$A = (a_1, a_2, ..., a_m),$$

dok je skup mogućih alternativa za igrača B,

$$B = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Tada je ishod igre (dobit) funkcija dve promenljive,

$$C = C(a_i, b_j).$$

Igra odražava sukob interesa i oba protivnika žele da izaberu optimalne strategije s obzirom na cenu igre.

U slučaju kada odluke donosi samo jedno lice, a ishod igre se ne određuje samo izborom jedne alternative od strane donosioca odluke, tada na ishod igre utiče slučajna promenljiva θ, tako da je

$$C = C(a, \theta).$$

Na osnovu izloženog mogu se definisati neki osnovni pojmovi iz teorije igara.

Pojam igre. Pod pojmom igre podrazumevaćemo model realne konfliktne situacije. Pored toga, igri se mogu korespondirati pravila čime se definiše ponašanje učesnika u igri.

Pojam hoda. Hod je izbor jedne od mogućih alternativa (strategija) koje stoje na raspoloženju učesnicima u igri. Sam hod može biti lični ili slučajni. Ličnim hodom nazivamo hod kada učesnik u igri sam svesno izabira svoje ponašanje, dok je pri slučajnom hodu ponašanje učesnika u igri vezano za neki slučajni mehanizam.

Pojam strategije. Prema intuitivnom shvatanju igre, strategija je neki plan razvoja igre. Drugim rečima, pod pojmom strategije podrazumevamo skup pravila koja jednoznačno određuju izbor hoda svakog od učesnika u igri.

Pojam igre sa nultom sumom. Igra se naziva "igrom sa nultom sumom" ako jedan od igrača dobija onoliko koliko drugi gubi, tj. zbir dobiti u igri oba igrača jednak je nuli.

Igre dva lica sa nultom sumom nazivaju se antagonističkim igrama. Normalna forma konačne antagonističke igre svodi se na neku matricu A sa brojem redova jednakim broju strategija igrača I i sa brojem kolona jednakim broju strategija, igrača II. Dobit za igrača I, ako odabere i–tu strategiju, a igrač II odabere j–tu strategiju, definisana je elementom a_{ij}, koji se nalazi u i–tom redu i j–toj koloni matrice A. Matrica A se naziva matricom koštanja ili platežna matrica igre.

Cilj teorije igara je da se egzaktnim matematičkim aparatom analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku konflikta, tj. da se odrede optimalne strategije za svakog od učesnika u igri.

Optimalna strategija. Pod pojmom optimalne strategije igrača podrazumeva se takva strategija koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbeđuje tom igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno, minimalno mogući srednji gubitak.

Pri izboru optimalne strategije polazi se od činjenice da je protivnik potpuno razuman i činiće sve da nas spreči u ostvarenju cilja. Polazeći od ovoga u teoriji igara se formuliše sledeći princip: igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz, za njega, najnepovoljnije delovanje protivnika. Ovaj princip, koji diktira svakoj strani izbor svoje najopreznije strategije, računajući na, za sebe, najnepovoljnije ponašanje protivnika, naziva se principom minimaksa i predstavlja osnovni princip u teoriji igara.

Strategije, koje učesnici u igri biraju na osnovu ovog principa, nazivaju se minimaksnim strategijama

(*): Oba igra
imaju uvid
u dobiti pod
polj
Cilj igrača
je da ostva
maksimalnu
dobit dok
cilj igrača
da ga u
tome spriječ

6.2. REŠAVANJE PROSTIH MATRIČNIH IGARA

1. Zadatak

Definicija igre. Posmatramo takvu igru gde svaki igrač, nezavisno od drugog igrača, može da izabere alternative, kako je pokazano u sledećoj tabeli 1.

Igrači	Alternative		
I	x_1	x_2	x_3
II	y_1	y_2	y_3

Dobit ili funkcija cene igre za igrača I, koja zavisi od izbora mogućih strategija, data je sledećim skupom podataka,

$$\begin{array}{lll} C(x_1, y_1) = 4, & C(x_1, y_2) = -1, & C(x_1, y_3) = -4, \\ C(x_2, y_1) = 3, & C(x_2, y_2) = 2, & C(x_2, y_3) = 3, \\ C(x_3, y_1) = -2, & C(x_3, y_2) = 0, & C(x_3, y_3) = 8. \end{array}$$

(*)

Naći rešenje igre, tj. odrediti:

a) optimalni strategijski par (x_i, y_j), (koji se još naziva i Borel – von Neumann-ovim strategijskim parom)

b) naći vrednost matrične igre.

Rešenje. Napred definisanu igru možemo svesti na matričnu formu, kako je to prikazano u tabeli 2, gde redovi odgovaraju mogućim strategijama igrača I a kolone mogućim strategijama igrača II.

Tabela 2.

		Strategija igrača II			minimum po redu
		y_1	y_2	y_3	
Strategija igrača I	x_1	4 4	−5 −1	−3 −4	−4
	x_2	2 3	0 2	6 3	2
	x_3	−2 −2	−3 0	7 8	−2
maximum po koloni		4	2	8	

Analizom matrice cene igre, igrač I utvrđuje da ako odabere strategiju x_1 minimalno što će dobiti je −4, za strategiju x_2 je 2, a ako odabere strategiju x_3 minimalna dobit je −2. Igrač I će nastojati da odabere takvu strategiju kojoj odgovara maksimum među utvrđenim minimalnim dobitima. U našem slučaju je to strategija x_2. Vrednost dobiti, koja odgovara strategiji x_2, naziva se **donjom vrednošću igre** i obeležava se sa α. Prema tome, imamo da je

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} (a_{ij}) = 2.$$

Analizom matrice cene igre, igrač II utvrđuje da ako odabere strategiju y_1 maksimalno što može da izgubi je 4, za strategiju y_2 je 2, a ako odabere strategiju y_3 maksimalno što može da izgubi je 8. Igrač II će nastojati da odabere takvu strategiju koja odgovara minimumu među utvrđenim maksimalnim gubicima po svakoj koloni. U našem slučaju to je strategija y_2. Ovako dobijena vrednost se naziva **gornjom vrednošću igre** i obeležava se sa β. Prema tome, imamo da je

$$\beta = \min_{j} \max_{i} (a_{ij}) = 2.$$

Ako je gornja vrednost igre jednaka donjoj vrednosti igre za takvu matričnu igru se kaže da ima **sedlo**, a rešenje igre je u domenu **čistih strategija**. Drugim rečima, ako oba igrača pronađu bar po jednu strategiju, koja je prema predviđanjima najbolja u odnosu na sve strategije njegovog protivnika kaže se da igra za rešenje ima čiste strategije kao optimalne. Ovo je moguće samo onda ako matrična igra ima sedlo. U tom slučaju vrednost igre je

$$v = \alpha = \beta .$$

U našem slučaju, matrična igra ima sedlo i optimalne strategije su u domenu čistih strategija, to su:

I igrač – strategija x_2,
II igrač – strategija y_2,

a donja vrednost igre je jednaka gornjoj vrednosti igre, tj.

$$v = \alpha = \beta = 2.$$

Elemenat $a_{22} = 2$ naziva se sedlom matrične igre.

Ako igrač I primeni bilo koju drugi strategiju, a ne strategiju x_2, a igrač II ostane pri optimalnoj strategiji, dobit igrača I će biti umanjena. Takođe, ako igrač II primeni bilo koju drugu strategiju a ne y_2, a igrač I ostane pri svojoj optimalnoj strategiji, gubitak igrača II će biti uvećan.

sport
broj poena

kompa.
trgov.

2. Zadatak

Definicija zadatka. U oružanom sukobu lovačke avijacije i bombardera mogućnosti protivničkih strana definisane su na sledeći način: neka su avioni lovačke avijacije, koji pripadaju strani A (odbrana), prema svom naoružanju podeljeni u četiri grupe a_1, a_2, a_3 i a_4. Ovi avioni mogu da se upotrebe kao odbrana protiv bombardera koji pripadaju protivničkoj strani B (napadač). Bombarderi mogu odabrati jednu od sledećih varijanti napada: da lete malim brzinama i da vrše neprekidnu paljbu, da lete srednjim brzinama i da vrše povremenu paljbu ili da lete velikim brzinama bez paljbe.

Odbrana želi da odabere lovačke avione sa najefikasnijim naoružanjem, pri čemu joj na raspolaganju stoje četiri strategije, a napadač želi da odabere najpogodniju varijantu napada, pri čemu mu na raspolaganju stoje tri strategije. Pretpostavimo da je cena igre definisana preko dobiti koju ostvaruje odbrana, a koja se izražava verovatnoćama gubitaka jednog bombardera koji koristi određenu varijantu napada i za neki određeni strategijski izbor odbrane. Ove verovatnoće su poznate za sve kombinacije strategija odbrane (A) i napadača (B). Prema tome, igra je u potpunosti definisana matricom igre C, čije ćemo vrste označiti sa a_i ($i = 1, 2, 3, 4$), kolone sa b_j ($j = 1, 2, 3$), a elemente matrice C sa c_{ij}. Vrednosti elemenata c_{ij} date su u tabeli 1.

a) Rešiti matričnu igru, tj. odrediti optimalne strategije učesnika u oružanom sukobu i naći vrednost igre.

b) Kako će uticati na rešenje problema promena verovatnoće c_{33} od vrednosti 0,12 na vrednost 0,09? U kom opsegu se može menjati ova verovatnoća a da to ne utiče na prvobitno rešenje problema.

Tabela 1.

B	b_1 neprekidna paljba, male brzine	b_2 povremena paljba, sr. brzine	b_3 bez paljbe velike brzine	$\alpha_i = \min_j c_{ij}$
a_1	0.25	0.20	0.10	0.10
a_2	0.13	0.09	0.11	0.09
a_3	0.30	0.17	0.12	0.12
a_4	0.16	0.11	0.05	0.05
$\beta_j = \max_i c_{ij}$	0.30	0.20	0.12	

Rešenje. Polazi se od analize igre sa stanovišta odbrane. Ako odbrana odabere prvu strategiju, naoružanje a_1, cena igre vezana je za prvi red matrice (a_1). Pod pretpostavkom da napadač zna za odluku odbrane, on će izabrati varijantu napada koja mu obezbeđuje minimalan gubitak, tj. minimalnu verovatnoću uništenja aviona-bombardera, a to je let bombardera velikom brzinom bez paljbe (varijanta napada b_3). Ova vrednost za odbranu je minimum onoga što može dobiti ako primeni strategiju a_1. Ovom paru strategija (a_1 b_3) odgovara verovatnoća uništenja bombardera, tj. vrednost igre

$$\alpha_1 = c_{13} = \min_j c_{ij} = 0.10 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Ako odbrana odabere lovce sa naoružanjem a_2, napadač će se odlučiti za srednje brzine i povremenu paljbu, što odgovara minimumu dobiti za protivničku stranu A (odbrana). Prema tome, imamo da je

$$\alpha_2 = \min_j c_{2j} = c_{22} = 0.09 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Na isti način se može rezonovati i dalje, pri čemu se određuju minimalne dobiti za odbranu i to za svaki red, tj.

$$\alpha_i = \min_j c_{ij}$$

za svako fiksirano $i = 1, 2, 3, 4$ i promenljivo $j = 1, 2, 3$.

Ovako dobijene vrednosti igre upisane su u tabeli 1, kao vektor-kolona. Prema tome, transponovani vektor ovih vrednosti je

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T = (0.10; 0.09; 0.12; 0.05)^T.$$

Imajući u vidu da napadač postupa prema principu opreznosti, tj. garantovanih "dobitaka", odbrana će sa svoje strane nastojati da odabere onu strategiju kojoj odgovara maksimalna verovatnoća uništenja protivnika. Drugim rečima, odbrana nastoji da vrednost igre bude

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 0.12 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dakle, ovu maksimalnu garantovanu dobit odbrana će ostvariti primenom strategije a_3, što odgovara upotrebi lovačke avijacije naoružane vrstom naoružanja a_3.

Na sličan način ovu matričnu igru možemo analizirati sa stanovišta napadača. Naime, ako napadač odabere varijantu b_1 (neprekidna paljba pri malim brzinama), odbrana će tada odabrati strategiju koja joj obezbeđuje maksimalnu dobit. Drugim rečima, odbrana se suprotstavlja lovačkom avijacijom naoružanom vrstom naoružanja a_3, pri čemu će verovatnoća uništenja protivnika biti najveća. Pri tome, vrednost igre za ove strategijske izbore je

$$\beta_1 = \max_i c_{i1} = c_{31} = 0.30 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Rezonujući na isti način, mogu se dobiti i ostali parovi strategija, koji odgovaraju maksimumima kolona. Ovi maksimumi se sračunavaju prema izrazu

$$\beta_j = \max_i \; c_{ij},$$

za svako fiksirano $j = 1, 2, 3, 4$ i promenljivo $i = 1, 2, 3, 4$.

Ovako dobijene vrednosti igre upisane su u tabeli 1 kao vektor red

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0.30; 0.20; 0.12).$$

Imajući u vidu da odbrana postupa prema principu opreznosti, tj. garantovanih dobitaka, napadač će sa svoje strane nastojati da odabere onu varijantu napada kojoj odgovara minimalna verovatnoća gubitaka. Drugim rečiam, napadač nastoji da vrednost igre bude

$$\beta = \min_j \beta_j = 0.12.$$

Vrednost za β naziva se gornjom vrednošću igre. a vrednost za α naziva se donjom vrednošću igre.

Kako je u ovom slučaju

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \beta = \min_j \beta_j = 0.12,$$

to znači da su gornja i donja vrednost igre jednake i prema Borel-von–Nojmanovom kriterijumu igra ima sedlastu tačku $c_{33} = 0.12$, kojoj odgovara par čistih optimalnih strategija (a_3^*, b_3^*). Na osnovu ovoga proizilazi da odbrana treba upotrebiti lovce sa naoružanjem a_3, a bombarderi napadača treba da lete velikim brzinama bez paljbe. Vrednost igre je

$$\alpha = \beta = V = 0.12.$$

Rešenje zadatka pod b) Promena elementa matrice c_{33} može uticati i na rešenje matrične igre. Ako elemenat c_{33} ima vrednost 0.09, u ovom slučaju donja vrednost igre je

$$\alpha = \max_i \; \min_j \; c_{ij} = 0.10,$$

a gornja vrednost igre je

$$\beta = \min_j \; \max_i \; c_{ij} = 0.11.$$

Prema tome, imamo da su gornja i donja vrednost igre različite, što znači da će vrednost igre ležati u granicama

$$\alpha < V < \beta,$$

U ovom slučaju rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija, tj. optimalne strategije biće takve da će igrači (protivničke strane) morati da biraju svoje čiste strategije sa određenim verovatnoćama.

Stabilnost prvobitnog optimalnog rešenja u kome igrači imaju čiste optimalne strategije zavisi od elemenata matrice cene igre i to u koloni i redu koji odgovaraju optimalnim strategijama. U našem slučaju rešenje igre će ostati nepromenjeno ako vrednost elemenata c_{33} leži u granicama

$$0.11 \leqslant c_{33} \leqslant 0.17,$$

tj. mora biti veći ili najmanje jednak najvećem elementu u koloni, a manji ili najviše jednak najmanjem elementu ú svome redu.

3. Zadatak

Definicija zadatka. Brigada radnika koja radi na elektrocentrali, koja će biti završena sledećeg proleća, stanuje u radničkom naselju nedaleko od gradilišta. Sredinom jeseni razmatra se problem nabavke uglja za zagrevanje naselja. Zavisno od toga kakva će biti nastupajuća zima, potrebe za ugljem biće različite. Ukoliko zima bude normalna trebaće 150 tona uglja, za blagu zimu – 120 tona, a za oštru zimu trebaće 180 tona uglja. Pošto se radnici sledećeg proleća sele na novo gradilište, višak uglja, koji ostane posle zime, neće biti moguće iskoristiti. Ako se ugalj nabavlja sredinom jeseni njegova cena će biti 100 novčanih jedinica po toni. Zavisno od toga da li će zima biti blaga, normalna ili oštra, tona uglja koja se bude nabavljala po zimi koštaće 100, 120 ili 140 novčanih jedinica po toni.

Sredinom jeseni, u vezi nabavke uglja za predstoječu zimu, pred upravom naselja stoje tri moguće strategije, tj. mogu nabaviti 120 t, 150 t, ili 180 t a preostalu količinu nabaviće u toku zime ukoliko bude potrebno.

a) Problem izbora optimalne strategije formulisati kao matričnu igru i formirati matricu cene igre.

b) Naći rešenje matrične igre, tj. odrediti optimalne strategije i vrednost matrične igre.

c) Ispitati stabilnost optimalnog rešenja igre.

Rešenje. Izbor strategije obezbeđenja ogreva posmatramo kao problem konflikta, pri čemu se rešavanje poblema izbora strategije obezbeđenja ogreva svodi na rešavanje matrične igre. Učesnici u igri su, sa jedne strane – uprava naselja, a sa druge strane priroda. Ovakve matrične igre nazivaju se i igrama protiv prirode.

a) Matrica cene igre može se formirati tako što će se izračunati troškovi uprave gradilišta u zavisnosti od "strategije" prirode i odabrane strategije obezbeđenja ogreva. Iz postavke zadatka proizilazi da prirode može odabrati sledeće "strategije":

1) blaga zima sa cenom uglja u toku zime od 100 novčani jedinica po toni

2) normalna zima sa cenom uglja u toku zime od 120 novčanih jedinica po toni i

3) Oštra zima sa cenom uglja u toku zime od 140 novčanih jedinica po toni.

Ovi troškovi sračunati su za sve kombinacije strategija, a rezultati su prikazani u tabeli 1.

Vrednosti cena plaćanja u prvom redu tabele 1 sračunate su na sledeći način. Polazi se od toga da je uprava gradilišta sredinom jeseni nabavila 120 tona uglja kada je cena uglja po toni 100 novčanih jedinica. Ako zima bude blaga uprava gradilišta imaće ukupne troškove ogreva 120 t x 100 n.j./t = 12.000 n.j. Ovako sračunata vrednost sa promenjenim znakom uzima se da je jednaka koeficijentu c_{11}. Prema tome, imamo da je

$$c_{11} = -12.000,$$

a ostali elementi su,

$$c_{12} = -120\text{ t} \times 100\text{ n.j./t} - 30\text{t} \times 120\text{ n.j./t} = -15.600,$$

$$c_{13} = -120\text{ t} \times 100\text{ n.j./t} - 60\text{t} \times 140\text{ n.j./t} = -20.400.$$

Tabela 1.

Priroda / Uprava gradilišta	Blaga zima cena uglja 100 din./t	Normalna zima, cena uglja 120 din./t.	Jaka zima, cene uglja 140 din./t	Minimum po redu
120 tona	– 12.000	– 15.600	–20.400	20.400
150 tona	–15.000	–15.000	–19.200	–19.200
180 tona	–18.000	–18.000	–18.000	–18.000
Maximum po koloni	–12.000	–15.000	–18.000	

Vrednosti elemenata matrice plaćanja u drugom redu tabele 1 sračunati su na sledeći način,

$$c_{21} = -150\text{t} \times 100\text{ n.j./t} = -15.000,$$
$$c_{22} = -150\text{t} \times 100\text{ n.j./t} = -15.000,$$
$$c_{23} = -150\text{t} \times 100\text{ n.j./t} - 30\text{t} \times 140\text{ n.j./t} = -19.200$$

Elementi u trećem redu tabele 1 imaju svi iste vrednosti, tj.

$$c_{31} = c_{32} = c_{33} = -180\text{ t} \times 100\text{ n.j./t} = -18.000.$$

b) Rešenje matrične igre treba tražiti pre svega u domenu čistih strategija. Prema tome, treba izračunati donju vrednost igre, za koju imamo da je

$$\alpha = \max_{i} \alpha_i = \max_{i} (-20.400; -19.200; -18.000) = -18.000$$

dok je gornja vrednost igre

$$\beta = \min_{j} \beta_j = \min_{j} (-12.000; -15.000; -18.000) = -18.000.$$

Kako je $\alpha = \beta$ matrična igra ima sedlo, a vrednost matrične igre (V) je

$$V = \alpha = \beta.$$

Rešenje igre se nalazi u domenu čistih strategija. Čiste optimalne strategije odgovaraju elementu c_{33} koji predstavlja sedlo ove matrične igre. Prema tome, za upravu gradilišta optimalna strategija je da sredinom jeseni obezbedi 180 tona uglja.

c) Stabilnost optimalnog rešenja merena promenom elemenata c_{33}, pri nepromenljivosti ostalih elemenata matrice cene igre, može se izraziti opsegom promena elementa c_{33} za koje optimalno rešenje ostaje nepromenjeno. U ovom slučaju taj opseg je

$$-19.200 \leq c_{33} \leq -15.000.$$

4. Zadatak

Definicija zadatka. Konfliktna situacija predstavlja oružani sukob dveju protivničkih strana "Crvenih" i "Plavih". Za nanošenje udara po protivniku "Crveni" raspolaže sa četiri tipa oružja: K_1, K_2, K_3 i K_4. U cilju smanjenja efikasnosti primene oružja od strane "Crvenih", "Plavi" mogu da primene četiri tipa sredstava za elektronsko ometanje: E_1, E_2, E_3 i E_4. Efikasnost oružja "Crvenih" izražava se kao procenat uništenja tučenog cilja. Kako preciznost gađanja zavisi od efikasnosti elektronskih sredstava ometanja, to će ovi procenti biti različiti za različite strategijske izbore protivničkih strana.

Matrica cene igre data je u Tabeli 1. Potrebno je:

a) naći optimalne strategije protivničkih strana;

b) izračunati vrednost igre i objasniti značenje te vrednosti

„Plavi" / „Crveni"	E_1	E_2	E_3	E_4
K_1	60	60	60	70
K_2	90	50	40	80
K_3	80	70	60	90
K_4	70	30	50	70

Rešenje. Da bi odredili domen u kome se nalazi rešenje matrične igre, pri čemu se misli na domen čistih strategija i domen mešovitih strategija, potrebno je pronaći donju i gornju vrednost igre.

Ako sa α označimo donju vrednost igre, tada je

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m),$$

gde je

$$\alpha_i = \min_j c_{ij},$$

a c_{ij} odgovarajući elemenat iz tabele 1.

Prema tome, iz tabele 1 imamo da je:

$$\alpha_1 = \min(60, 60, 60, 70) = 60,$$
$$\alpha_2 = \min(90, 50, 40, 80) = 40,$$

$$\alpha_3 = \min(80, 70, 60, 90) = 60,$$
$$\alpha_4 = \min(70, 30, 50, 70) = 30.$$

Otuda, za donju vrednost matrične igre, dobija se da je

$$\alpha = \max(60, 40, 60, 30) = 60.$$

Ako sa β označimo gornju vrednost matrične igre, tada je

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_n),$$

gde je

$$\beta_j = \max_i c_{ij}.$$

Prema tome, iz tabele 1 imamo da je:

$$\beta_1 = \max(60, 90, 80, 70) = 90,$$
$$\beta_2 = \max(60, 50, 70, 30) = 70,$$
$$\beta_3 = \max(60, 40, 60, 50) = 60,$$
$$\beta_4 = \max(70, 80, 90, 70) = 90,$$

na osnovu čega, za gornju vrednost matrične igre, dobijamo da je

$$\beta = \min(90, 70, 60, 70) = 60.$$

Kako je $\alpha = \beta = 60$, to znači da igra ima sedlo i da se rešenje igre nalazi u domenu čistih strategija.

U ovom slučaju igra ima dva sedla. Tačke sedla su c_{13} i c_{33}. Prema tome, "Crveni" ima dve optimalne čiste strategije K_1 i K_3, dok "Plavi" ima optimalnu čistu strategiju E_3.

Tačke sedla nalaze se na preseku ovih optimalnih strategija.

Vrednost igre je

$$V = \alpha = \beta = 60,$$

što znači, da bez obzira na strategijski izbor "Plavog", ako "Crveni" primeni optimalne strategije K_1 ili K_3 postići će uništenje cilja sa 60 procenata. Međutim, ako protivnik ne primeni svoju optimalnu strategiju taj procenat će biti još veći.

5. Zadaci za vežbu

1. Naći rešenje matričnih igara ako je dobit igrača I u odnosu na igrača II definisana matricom cene.

a)

Igrač I / Igrač II	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	5	6
A_2	0	−1	1	3
A_3	−3	−5	1	0

b)

Igrač II \ Igrač I	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	9	3	5
A_2	7	6	5	8
A_3	2	3	4	7
A_4	5	6	5	6

c)

Igrač II \ Igrač I	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	−1	3	−1
A_2	2	−2	−1	−1
A_3	−1	−1	2	5

Rešenja problema nalaze se u domenu čistih strategija. Optimalne strategije su: a) $S_{op} = \{(A_1, B_2)$; b) $S_{op} = \{(A_2, B_3)$ ili $(A_4, B_3)\}$; c) $S_{op} = \{(A_1, B_2)$ ili $(A_3, B_2)\}$.

2. Pokazati da matrična igra definisana matricom $A = \| a_{ij} \|$, čije su dimenzije nxm, ima rešenje u domenu čistih strategija ako je $a_{ij} = i - j$. Pokazati da će vrednost igre biti $V = a_{nm}$.