1.4.5. Metoda raspoređivanja

Problem raspoređivanja spada u problem linearnog programiranja, odnosno u probleme transporta. Sastoji se u raspoređivanju n aktivnosti ili resursa na m izvršilaca ili mesta, pri čemu se želi postići najbolja efikasnost. Polazi se od toga da se jedna aktivnost može dodeliti samo jednom izvršiocu, kao i da je poznata efikasnost i-tog izvršioca na j-toj aktivnosti (c_{ij}). Cilj koji se želi postići može biti: najkraće vreme za izvršenje projekta, najniži ukupni troškovi, najkraći ukupni putevi, najveća dobit, i slično.

Raspored n aktivnosti na m izvršilaca moguće je obaviti na n! načina (broj permutacija od n elemenata). Ako se raspoređuje 5 aktivnosti na 5 izvršilaca, onda za to postoji 5! = 120 rešenja, dok za raspored 10 aktivnosti na 10 izvršilaca ima 10! = 3628800 rešenja. Uočljivo je, da razmatranje svih rešenja i iznalaženje najpovoljnijeg, zahteva mnogo vremena. Potrebno vreme se naglo povećava sa porastom broja aktivnosti i izvršilaca. Ovo ukazuje na prednost iznalaženja metode koja će dovesti do optimalnog rešenja bez razmatranja svih mogućnosti. Ako je i-tom izvršiocu dodeljena j-ta aktivnost, onda se uzima da je $x_{ij} = 1$, dok je u suprotnom $x_{ij} = 0$.

Matematička formulacija problema raspoređivanja može se iskazati na sledeći način. Potrebno je odrediti nenegativne vrednosti promenljivih x_{ij}, i = 1,2, ..., m, j = 1, 2, ..., n, koje daju optimalnu vrednost funkciji

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij},$$

pri zadovoljenju ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Prvo ograničenje ukazuje da jednom izvršiocu može biti dodeljena jedna i samo jedna aktivnost, a drugo da na jednoj aktivnosti može biti angažovan jedan i samo jedan izvršilac. Otuda, ako je r-tom izvršiocu poverena s-ta aktivnost, onda je $x_{rs}=1$, $x_{rj} = 0$ za $j = 1, 2, ..., n$, $j \neq s$, i $x_{is} = 0$ za $i = 1, 2, ..., m$ $i, i \neq r$. Gornja ograničenja su data pod pretpostavkom da je jednak broj aktivnosti i izvršilaca ($n=m$).

Pri nepostojanju ravnoteže između izvršilaca i aktivnosti ($m \neq n$) pojavljuje se otvoreni problem raspoređivanja. Za veći broj izvršilaca od broja aktivnosti ($m < n$), druga grupa ograničenja postaje

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

dok za veći broj aktivnosti od broja izvršilaca, prva grupa ograničenja postaje

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Da bi se ovi matematički modeli sveli na matematički model uravnoteženja izvršilaca i aktivnosti, uvodi se fiktivna aktivnost, odnosto fiktivni izvršilac. Pri čemu su efikasnosti fiktivne aktivnosti $c_{if} = 0$ ($i = 1, 2, ..., m$), odnosno fiktivnog izvršioca $c_{fj} = 0$ ($j = 1, 2, ..., n$). Ovde indeks f označava da se radi o fiktivnoj aktivnosti, odnosno fiktivnom izvršiocu.

50. Zadatak

Pet radnika treba da obave pet poslova. Svaki radnik je osposobljen za izvršenje svih poslova, ali u razmatranom periodu jedan radnik može biti angažovan samo na jednom poslu. Vremena obavljanja poslova od strane radnika u norma časovima data su u tabeli 1.

Izvršiti raspodelu poslova na radnike da bi ukupno vreme izvršenja poslova bilo minimalno.

Rešenje. Matematički model ovoga problema se sastoji u određivanju

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,4,5,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je i-tom radniku dodeljen j-ti posao} \\ 0, & \text{ako i-tom radniku nije dodeljen j-ti posao.} \end{cases}$$

Tabela 1.

POSLOVI / RADNICI	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	3	21	12	6	10
R_2	8	23	2	5	5
R_3	33	14	13	10	7
R_4	14	21	19	11	11
R_5	9	16	10	15	13

Za probleme kao što je ovaj (jednak broj radnika i poslova) kaže se da imaju kvadratnu matricu efikasnosti C.

Algoritam iznalaženja optimalnog rešenja bazira na matrici efikasnosti C, jer promenljive mogu imati vrednost 1 ili 0. Algoritam se sastoji iz više koraka.

1. Od svih elemenata kolone oduzima se najmanji elemenat kolone.

2. Ustanovljava se da li postoji u svakom redu bar jedna nula. Ako to nije slučaj, od svih elemenata redova bez nule oduzima se najmanji elemenat toga reda.

3. Razvrstavaju se nule na nezavisne i zavisne. Počinje se od reda koji ima samo jednu nulu. Ta nula se uvrštava u nezavisne. Sve nule koje se nalaze u koloni sa ovom nulom uvrštavaju se u zavisne. Po završetku redova sa jednom nulom prelazi se na redove sa više nula. Pri tome se proizvoljno proglašava neka od nula nezavisnom.

4. Ispituje se optimalnost rešenja. Ako ima nezavisnih nula koliko i aktivnosti, odnosno izvršilaca, onda je iznađeno optimalno rešenje. Ukoliko je manji broj nezavisnih nula postupak se produžava kao što sledi:

a) označiti redove ~~se~~ bez nezavisnim nulama (*);

b) označiti (precrtati) sve kolone koje imaju zavisne nule u označenim redovima;

c) označiti redove (*) koji imaju nezavisnu nula u označenim kolonama;

d) označiti (precrtati) kolone koje imaju zavisnu nulu u novo označenom redu;

– postupci pod c) i d) se uzajamno smenjuju dok se ne dođe do označenih redova bez zavisne nule ili precrtanih kolona bez nezavisne nule;

e) posebno označiti (precrtati) sve redove koji nisu označeni po postupcima pod a) i c);

– ovo omogućuje da se najmanjim brojem linija precrtaju sve nezavisne nule, tj. broj linija je jednak broju nezavisnih nula;

f) pronaći najmanji neprecrtani elemenat;

g) vrednost najmanjeg elementa, utvrđenog pod f), dodati elementima koji se nalaze na preseku precrtanih kolona i redova;

h) vrednost najmanjeg elementa oduzeti od svih neprecrtanih elemenata;

i) svi ostali precrtani elementi se ne menjaju;

j) u novodobijenoj matrici izvršiti razvrstavanje nula na nezavisne i zavisne.

Primenu ovoga algoritma ilustrovaćemo našim primerom.

Tabela 2.

POSLOVI / RADNICI	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	0	7	10	1	5
R_2	5	9	0	0	0
R_3	30	0	11	5	2
R_4	11	7	17	6	6
R_5	6	2	8	10	8

1) Od svih elemenata kolone (tabela 1) oduzet je najmanji elemenat te kolone i dobijena je nova matrica (tabela 2).

2) Kako u četvrtom i petom redu ne postoji nula, to najmanje elemente ovih redova oduzimamo od ostalih. Tako smo dobili matricu datu tabelom 3.

Tabela 3.

POSLOVI / RADNICI	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
~~R_1~~	$\boxed{0}$	~~7~~	~~10~~	~~1~~	~~5~~
~~R_2~~	~~5~~	~~0~~	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
R_3 *	30	$\boxed{0}$	11	5	2
~~R_4~~	~~5~~	~~1~~	~~11~~	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
R_5 *	4	$\cancel{0}$	6	8	6

3) U tabeli 3 razvrstali smo nule na zavisne i nezavisne. Pošli smo od prvog reda i proglasili njegovu nulu u prvoj koloni za nezavisnu (uokvirena), jer je to jedina nula u ovom redu. Treći i peti red imaju po jednu nulu ali u istoj – drugoj koloni, pa smo uzeli da je nula u trećem redu nezavisna. To je uslovilo da nulu u petom redu svrstamo u zavisne (precrtana). Drugi i četvrti red imaju više nula, pa smo odabrali da u drugom redu i trećoj koloni, odnosno u četvrtom redu i četvrtoj koloni bude nezavisna nula.

4) Ustanovili smo da rešenje nije optimalno, jer ima 4 nezavisne nule, a matrica je dimenzije 5 x 5.

a) Označili smo red bez nezavisne nule (R_5).

b) Precrtali smo kolonu sa zavisnom nulom u označenom redu (P_2).

c) Označili smo red (R_3) sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni.

d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u trećem redu, te je završeno obeležavanje redova i precrtavanje kolona.

e) Precrtali smo neobeležene redove (R_1, R_2 i R_4). Broj linija je jednak broju nezavisnih nula – četiri.

f) Najmanji neprecrtani elemenat je 2 u polju (3; 5).

g) Dodali smo vrednost ovog elementa vrednostima svih dvostruko precrtanih elemenata.

h) Oduzeli smo vrednost ovog elementa od svih neprecrtanih elemenata. Tako smo dobili matricu datu tabelom 4.

j) Pošto u prvom redu postoji jedna nula, uzeli smo je za nezavisnu. Takođe u petom redu postoji jedna nula i svrstali smo je u nezavisne. To je uslovilo da se nula u polju (3; 2) proglasi zavisnom. Potom smo morali nulu u polju (3; 5) uzeti za nezavisnu, a nule u istoj koloni za zavisne. Dalje je bilo uslovljeno da uzmeno nulu u polju (4; 4) za nezavisnu, odnosno u polju (2; 1) za zavisnu i u polju (2; 3) za nezavisnu.

Tabela 4.

POSLOVI / RADNICI	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	$\boxed{0}$	9	10	1	5
R_2	5	11	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
R_3	28	$\cancel{0}$	9	3	$\boxed{0}$
R_4	5	3	11	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
R_5	2	$\boxed{0}$	4	6	4

Pošto smo dobili pet nezavisnih nula, dobijeno rešenje je optimalno. Znači, u optimalnom rešenju su:

$$x_{11} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{35} = 1, \quad x_{44} = 1 \quad \text{i} \quad x_{52} = 1,$$

a sve ostale promenljive imaju vrednost nula. Optimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi

$$\begin{aligned} \min F(X) &= c_{11}x_{11} + c_{23}x_{23} + c_{35}x_{35} + c_{44}x_{44} + c_{52}x_{52} = \\ &= c_{11} + c_{23} + c_{35} + c_{44} + c_{52} = 3 + 2 + 7 + 11 + 16 \\ &= 39 \text{ norma časova.} \end{aligned}$$

Konstatujemo, najbolja efikasnost se postiže (najkraće ukupno vreme izvršenja zadatka) ako se prvom radniku poveri prvi posao, drugom radniku treći posao, trećem radniku peti posao, četvrtom radniku četvrti posao i petom radniku drugi posao. Najkraće vreme za koje ovi radnici mogu obaviti ove poslove je 39 norma časova.

51. Zadatak

Radna organizacija je nabavila 4 mašine, specijalizovane za proizvodnju pojedinog sastavnog dela složenog proizvoda. Potrebno je zaposliti 4 radnika na ove mašine, s obzirom da jedan radnik može raditi istovremeno samo na jednoj mašini. Konkursna komisija radne organizacije je odlučila da osnovni kriterijum za izbor radnika bude škart na proizvodima. Svaki radnik je proizveo isti broj proizvoda na svakoj mašini. Pri tome je bio procenat škarta na proizvodima kao što je dato u tabeli 1. Kako rasporediti radnike na mašine da bi ukupni procenat škarta na proizvodima bio najmanji?

Tabela 1.

MAŠINE / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	3	6	7	8
R_2	2	3	1	4
R_3	4	10	6	9
R_4	1	9	4	8

Rešenje. Matematički model ovoga problema se sastoji u određivanju

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij},$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako i-ti radnik radi na j-toj mašini} \\ 0, & \text{ako i-ti radnik ne radi na j-toj mašini.} \end{cases}$$

Primena algoritma metode raspoređivanja.

c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R_1).

d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, te je završeno

Tabela 2.

MAŠINE / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	2	3	6	4
R_2	1	0	0	0
R_3	3	7	5	5
R_4	0	6	3	4

2. U prvom i trećem redu nema nule, pa se najmanji elemenat ovih redova oduzima od ostalih elemenata. Tako se dobija tabela 3.

3. U tabeli 3 razvrstane su nule na nezavisne i zavisne.

Tabela 3.

MAŠINE / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1 *	$\boxed{0}$	1	4	2
R_2	1	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
R_3 *	$\cancel{0}$	4	2	2
R_4 *	$\cancel{0}$	6	3	4

4. Rešenje nije optimalno, jer postoje samo dve nezavisne nule.

a) Označeni su redovi bez nezavisnih nula (R_3 i R_4).

b) Precrtana je kolona sa zavisnom nulom u označenom redu (M_1).

c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R_1).

d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, te je završeno obeležavanje redova i precrtavanje kolona.

e) Precrtani su neobeleženi redovi (R_2).

f) Najmanji neprecrtani elemenat je 1 u polju (1; 2).

g) Dodat je najmanji elemenat dvostruko precrtanom elementu.

h) Oduzet je ovaj elemenat od svih neprecrtanih elemenata

i) Prepisivanjem jednostruko precrtanih elemenata dolazi se do tabele 4.

Tabela 4.

MAŠINE / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	3	1
R_2	2	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
R_3 *	$\boxed{0}$	5	3	3
R_4 *	$\cancel{0}$	7	4	5

j) Izvršeno je razvrstavanje nula u tabeli 4.

Dobijeno rešenje nije optimalno, jer postoje samo tri nezavisne nule, pa se postupak ponavlja od a) do j).

Tabela 5.

MAŠINE / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	3	$\boxed{0}$	3	1
R_2	5	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
R_3	$\cancel{0}$	2	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
R_4	$\boxed{0}$	4	1	2

Rešenje dato tabelom 5 je optimalno rešenje. Pri razvrstavanju nula proizvoljno smo uzeli da su nezavisne nule u drugom redu i trećoj koloni i u trećem redu i četvrtoj koloni. Mogli smo uzeti za nezavisne nule u drugom redu i četvrtoj koloni i trećem redu i trećoj koloni.

Ovo ukazuje da su optimalna rešenja:

prvo

$$x_{12} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{34} = 1, \quad x_{41} = 1, \text{ i}$$

drugo

$$x_{12} = 1, \quad x_{24} = 1, \quad x_{33} = 1, \quad x_{41} = 1.$$

Minimalna vrednost funkcije kriterijuma je

$$\min F(X) = c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{41} = 6 + 1 + 9 + 1 = 17,$$

odnosno

$$\min F(X) = c_{12} + c_{24} + c_{33} + c_{41} = 6 + 4 + 6 + 1 = 17.$$

Najbolje je rasporediti prvog radnika na drugu mašinu, drugog radnika na treću (ili četvrtu), trećeg radnika na četvrtu (ili treću) i četvrtog na prvu. Tada će škart na drugom proizvodu iznositi 6 procenata, na trećem 1 (ili 6) procenat, na četvrtom 9 (ili 4) procenata i na četvrtom 1 procenat. Prosečan škart na svim delovima će iznositi 17 : 4 = 4,25 procenata.

52. Zadatak

U mašinskom odeljenju radne organizacije potrebno je obaviti četiri posla. Ovi poslovi se mogu obavljati na šest mašina. Na svakoj mašini može se raditi svaki posao, ali istovremeno samo jedan. Na ovim poslovima treba angažovati četiri mašine a dve izdvojiti za druge poslove. Vreme za obradu poslova na mašinama (u norma časovima) dato je u tabeli 1.

Kako rasporediti poslove na mašine, pa da utrošeno vreme za obavljanje svih poslova bude što manje?

Rešenje. Matematički model ovoga problema ima sledeći oblik

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

uz zadovoljenje ograničenja

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \text{ i}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je j-ti posao dodeljen i-toj mašini} \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Tabela 1.

POSLOVI / MAŠINE	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	9	12	7	12
M_2	14	10	9	11
M_3	8	15	11	15
M_4	12	13	8	14
M_5	10	11	10	10
M_6	11	14	12	9

Ovo je otvoreni problem raspoređivanja, te da bi se njegov matematički model sveo na matematički model zatvorenog problema raspoređivanja potrebno je dodati dva fiktivna posla P_5 i P_6, sa vremenom obrade $c_{i5} = c_{i6} = 0$ $i = 1, 2, \ldots, 6$. Za ovakve se probleme kaže da su problemi sa *nekvadratnom matricom* efikasnosti.

Posle dodavanja dva fiktivna posla dobija se sledeća kvadratna matrica (tabela 2).

Tabela 2.

POSLOVI / MAŠINE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
M_1	9	12	7	12	0	0
M_2	14	10	9	11	0	0
M_3	8	15	11	15	0	0
M_4	12	13	8	14	0	0
M_5	10	11	10	10	0	0
M_6	11	14	12	9	0	0

1. Najmanji elemenat svake kolone oduzet je od svih ostalih elemenata te kolone i dobijena je tabela 3.

Tabela 3.

POSLOVI / MAŠINE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
M_1	1	2	$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
M_2	6	$\boxed{0}$	2	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
M_3	$\boxed{0}$	5	4	6	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
M_4	4	3	1	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
M_5	2	1	3	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
M_6	3	4	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$

2. U svakom redu postoji bar jedna nula, pa nema potrebe za oduzimanje najmanjeg od ostalih elemenata bilo koga reda.

3. Posle razvrstavanja nula na zavisne i nezavisne dobilo se da ima 6 nezavisnih nula, što je dokaz da je iznađeno optimalno rešenje.

Optimalno rešenje je:

$$x_{13} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{45} = 1, \quad x_{56} = 1, \quad x_{64} = 1.$$

Drugim rečima, prvi posao treba obrađivati na trećoj mašini, drugi na drugoj, treći na prvoj i četvrti na šestoj. Mašine M_4 i M_5 neće biti upotrebljene za obavljanje ovih poslova. Promenljive x_{45} i x_{56} su dopunske promenljive i one ovde ukazuju koje mašine neće biti angažovane.

Minimalno vreme za koje je moguće obaviti ove poslove iznosi:

$$\min F(X) = c_{13}x_{13} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{45}x_{45} + c_{56}x_{56} + c_{64}x_{64} =$$
$$= 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 34 \text{ norma časova.}$$

53. Zadatak

Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mesta. Raspisan je konkurs. U uži izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provera njihove stručne sposobnosti za obavljanje poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli 1.

Tabela 1.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	5	6	5	1
R_2	4	6	4	1
R_3	8	6	7	6
R_4	2	4	4	4
R_5	6	10	9	4

Kako rasporediti radnike na radna mesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

Rešenje. Matematički model ovog problema je:

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{6} c_{ij}\, x_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,4,$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant 1, \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je i-ti radnik određen na j-to mesto} \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Karakteristično svojstvo ovoga problema raspoređivanja je *iznalaženje maksimalne vrednosti funkcije kriterijuma.* Ovaj problem spada takođe u otvorene probleme, jer je manji broj radnih mesta nego kandidata. Svođenje ovoga matematičkog modela na zatvoreni matematički model vrši se dodavanjem fiktivnog radnog mesta (M_5), kao što je urađeno u tabeli 2.

Tabela 2.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	5	6	5	1	0
R_2	4	6	4	1	0
R_3	8	6	7	6	0
R_4	2	4	4	4	0
R_5	6	10	9	4	0

Kako se traži maksimalna vrednost funkcije F(X) postupak za rešavanje je sledeći:

1. U svakoj koloni se od svih elemenata oduzima naveči elemenat. Tako je dobijena tabela 3.

Tabela 3.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	−3	−4	−4	−5	0
R_2	−4	−4	−5	−5	0
R_3	0	−4	−2	0	0
R_4	−6	−6	−5	−2	0
R_5	−2	0	0	−2	0

2. Znajući da je max $F(X) = C \cdot X = \min F_1(X) = - CX$ množe se elementi tabele 3 sa (−1) i dalje rešavanje se nastavlja po postupku za iznalaženje minimalne vrednosti funkcije kriterijuma.

Tabela 4.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1 *	3	4	4	5	$\boxed{0}$
R_2 *	4	4	5	5	$\cancel{0}$
R_3	$\boxed{0}$	4	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
R_4 *	6	6	5	2	$\cancel{0}$
R_5	2	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	$\cancel{0}$

3. U tabeli 4 razvrstane su nule na zavisne i nezavisne.

4. Rešenje nije optimalno, jer postoje samo tri nezavisne nule.

a) Označeni su redovi bez nezavisnih nula (R_2 i R_4).

b) Precrtane su kolone sa zavisnom nulom u označenom redu (M_5).

c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R_1).

d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, pa je precrtavanje kolona i obeležavanje redova završeno.

e) Precrtani su neobeleženi redovi.

f) Najmanji neprecrtani elemenat je 2 u polju (4; 4).

g) Najmanji elemenat je dodat dvostruko precrtanim elementima.

h) Oduzet je najmanji elemenat od svih neprecrtanih elemenata.

i) Prepisani su precrtani elementi i dobijena je tabela 5.

Tabela 5.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1 *	1	2	2	3	$\boxed{0}$
R_2 *	2	2	3	3	$\cancel{0}$
R_3	$\boxed{0}$	4	2	$\cancel{0}$	2
R_4	4	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
R_5	2	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	2

Pošto rešenje dato tabelom 5 nije optimalno ponovljen je postupak pod a) do i) i dobijena tabela 6.

Tabela 6.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1 *	$\boxed{0}$	1	1	2	$\cancel{0}$
R_2 *	1	1	2	2	$\boxed{0}$
R_3 *	$\cancel{0}$	4	2	$\boxed{0}$	3
R_4 *	4	4	3	$\cancel{0}$	1
R_5	2	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	3

Kako rešenje dato tabelom 6 nije optimalno postupak je ponovljen i dobijena je tabela 7.

Tabela 7.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$
R_2	1	$\boxed{0}$	1	2	$\cancel{0}$
R_3	$\boxed{0}$	3	1	$\cancel{0}$	3
R_4	4	3	2	$\boxed{0}$	1
R_5	3	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	3	4

Tabela 8.

RADNA MESTA / RADNICI	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$
R_2	1	$\cancel{0}$	1	2	$\boxed{0}$
R_3	$\boxed{0}$	3	1	$\cancel{0}$	3
R_4	4	3	2	$\boxed{0}$	1
R_5	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3	4

Razvrstavanjem nula na zavisne i nezavisne dobijena su optimalna rešenja:

– prvo (tabela 7)

$$x_{15} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{44} = 1, \quad x_{53} = 1$$

$$F(X_1^*) = c_{15}x_{15} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{44}x_{44} + c_{53}x_{53} =$$

$$= 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 27$$

– drugo (tabela 8)

$$x_{13} = 1, \quad x_{25} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{41} = 1, \quad x_{52} = 1$$

$$F(X_2^*) = c_{13}x_{13} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{44}x_{44} + c_{52}x_{52} =$$
$$= 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 27.$$

Na osnovu prvog optimalnog rešenja konstatujemo da na prvo radno mesto treba rasporediti trećeg radnika, na drugo drugog, na treće petog i na četvrto četvrtog. Prvi radnik neće biti zaposlen.

Na osnovu drugog optimalnog rešenja treba na radna mesta (M_1, M_2, M_3 i M_4) rasporediti trećeg, petog, prvog i četvrtog radnika, respektivno. Drugi radnik neće biti zaposlen.

Znači, konkursna komisija mora iznaći novi kriterijum na osnovu koga će odlučiti da li da zaposli prvog ili drugog radnika.