5.4.5 Minimizacija vremena transporta

Koeficijenti c_{ij} u funkciji cilja $F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ do sada su označavali ili jedinične troškove transporta iz ishodišta I_i do odredišta O_j, ili udaljenost od ishodišta do odredišta. Pod optimalnim planom transporta razumijeva se takav plan po kojemu su ukupni troškovi transporta minimalni, ili prema kojemu je ukupni transportni rad minimalan.

Pri prijevozu lako pokvarljive robe nameću se drugi kriteriji optimizacije, jer najvažnije je izvršiti prijevoz u najkraćem vremenu. Naravno, optimalni plan u odnosu na troškove transporta ne mora biti optimalan i u odnosu na vrijeme prijevoza.

Pretpostavimo da koeficijenti c_{ij} označavaju vrijeme izraženo u nekim vremenskim jedinicama (satima, danima) za koje se teret transportira od ishodišta I_i do odredišta O_j. U modelu će se prihvatiti pretpostavka da vrijeme transporta od nekog ishodišta do odredišta ne ovisi o veličini dostave.

Ako se u transportnom problemu postavlja zahtjev da se minimizira zbroj $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, koji označava ukupni broj tona-sati ili vagona-sati, onda se takav transportni problem naziva transportni problem minimizacije vremena prve vrste. Određivanje optimalnog transporta u tom slučaju ni po čemu se ne razlikuje od nalaženja optimalnog plana kod klasičnoga transportnog problema.

Pri prevoženju lako pokvarljive robe, npr. jagoda, nastoji se minimizirati vrijeme da se sve dostave obave. Takvi transportni problemi s minimiziranim vremenom svih dostava nazivaju se transportnim problemima minimizacije vremena druge vrste. Matematički model transportnog problema minimizacije vremena transporta druge vrste glasi:

Naći skup dostava x_{ij}, koji osigurava

$$\max\{c_{ij}\} \rightarrow \min \qquad (5.37)$$
$$x_{ij} > 0,$$

gdje se minimum traži po svim baznim rješenjima, uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (5.38)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad (5.39)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.41)$$

Kao što se vidi, funkcija cilja (5.37) nije linearna funkcija varijabli x_{ij}, pa ovaj problem nije problem linearnog programiranja i ne može se rješavati izloženim metodama.

Prema ideji I.V. Romanovskog [8] uočava se najprije da je osnovni cilj pri rješavanju takvih problema umanjiti maksimalno vrijeme transporta dostave prema baznom planu. Zbog toga se ispituje mogućnost smanjenja vrijednosti

$$t_{max} = \max t_{ij}$$

gdje je

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{za } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{za } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

Ako se uspije naći ono bazično rješenje za koje je t_{max} najmanji među svim t_{max} koji odgovaraju bazičnim rješenjima $X = \{x_{ij}\}$ tada će takvo rješenje biti optimalno rješenje transportnog problema minimizacije vremena druge vrste. Simbolično, u ovom problemu se traži takav plan transporta gdje je vrijeme zadnje dostave minimalno i jednako:

$$\min \max t_{ij}$$
$$X_k \in \{X\} \qquad x_{ij}^{k} \in X_k$$

Postupak nalaženja optimalnog rješenja sastoji se u tome da se dani problem zamijeni odgovarajućim transportnim problemom minimizacije vremena prve vrste i time omogući korištenje metoda nalaženja optimalnog rješenja kod klasičnog transportnog problema. Praktično, navedeni postupak svodi se na sljedeće korake:

1. Za dani transportni problem naći početno bazično rješenje.

2. Odrediti t_{max} u početnom bazičnom rješenju.

3. Veličine c_{ij} zamijeniti veličinama h_{ij}, koje se određuju formulama:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad c_{ij} < t_{max} \\ 1 & \text{za} \quad c_{ij} = t_{max} \\ M & \text{za} \quad c_{ij} > t_{max} \end{cases} \qquad (5.42)$$

gdje je M dovoljno velik pozitivni broj.

Uvođenjem veličina h_{ij} sve prometnice mogu se podijeliti u tri skupine. Prvoj skupini prometnica pripadaju prometnice s vremenom prijevoza koje je manje od maksimalnog, to jest za koje je $h_{ij} = 0$. Te su prometnice pogodne za transport. Drugoj skupini prometnica pripadaju prometnice s vremenom transporta koje je jednako maksimalnom vremenu transporta (u danom bazičnom planu), to jest za koje je $h_{ij} = 1$. Treću skupinu prometnica čine prometnice kod kojih je vrijeme transporta veće od maksimalnog vremena transporta, to jest za koje je $h_{ij} = M$. Prometnice treće skupine su nedopustive (nepoželjne) u novom bazičnom planu, pri traženju prometnica po kojima se izvodi dostava u kraćem vremenu.

4. Na kraju se odrede karakteristike nebazičnih polja (gdje je $x_{ij} = 0$). Ako su sve karakteristike nenegativne, onda je dobiveno bazično rješenje i optimalno, pri čemu se t_{max} maksimalno vrijeme transporta prema dobivenom planu transporta može umanjiti.
Ako je makar jedna od tih karakteristika negativna, tada se traži novo bazično rješenje. Za njega se računaju karakteristike nebazičnih polja i postupak ponavlja dok se ne dođe do optimalnog rješenja.

Postupak će se pokazati na numeričkom primjeru.

Primjer 1.

Dan je zatvoreni transportni problem gdje treba minimizirati vrijeme svih dostava.

Tablica 5.46

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	
I_1	15 50	20	25	15	15	50
I_2	10 25	25 35	20 40	40	30	100
I_3	12	18	24 5	30 85	36 60	150
	75	35	45	85	60	

Naći optimalni plan s minimalnim vremenom transporta.

U tablici 5.46 je označeno početno bazično rješenje dobiveno dijagonalnom metodom za koje je

$$\max_{x_{ij} \in X_1} t_{ij} = t_{35} = 36, \qquad X_1 \text{ - prvo bazično rješenje}$$

Napravi se transformacija prema (5.42) i pomoću koeficijenata redaka i stupaca računaju karakteristike nebazičnih polja.

Tablica 5.47

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5		α_i
I_1	0 50	0 0	0 0	0 0	0 −1	50	0
I_2	0 25	0 35	0 40	M M	0 −1	100	0
I_3	0 0	0 0	0 5	0 85	1 60	150	0
	75	35	45	85	60		
β_j	0	0	0	0	1		

Polja (1,5) i (2,5) imaju negativne karakteristike; plan nije optimalan. Polje (1,5) ima manje vrijeme t_{ij}, $t_{15} < t_{25}$, te se želi da polje (1,5) bude bazično. Po lancu (1,5) — (1,1) — (2,1) — (2,3) — (3,3) — (3,5) treba unijeti promjenu za $\delta = \min\{50, 40, 60\} = 40$. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.48.

Tablica 5.48

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5		α_i
I_1	0 / 10	0 / 0	0 / 1	0 / 1	0 / 40	50	0
I_2	0 / 65	0 / 35	0 / 1	M / M+1	0 / 0	100	0
I_3	0 / −1	0 / −1	0 / 45	0 / 85	1 / 20	150	1
	75	35	45	85	60		
β_j	0	0	−1	−1	0		

Karakteristike nebazičnih poja (3,1) i (3,2) su negativne; plan u tablici 5.48 nije optimalan. Na lancu (3,1) — (3,5) — (1,5) — (1,1) treba unijeti promjene $\delta = \min\{20, 10\} = 10$. Novi plan prikazan je u tablici 5.49.

Tablica 5.49

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5		α_i
I_1	0 / 1	0 / 1	0 / 1	0 / 1	0 / 50	50	0
I_2	0 / 65	0 / 35	0 / 0	M / M	0 / −1	100	1
I_3	0 / 10	0 / 0	0 / 45	0 / 85	1 / 10	150	1
	75	35	45	85	60		
β_j	−1	−1	−1	−1	0		

Plan u tablici 5.49 nije optimalan jer je karakteristika nebazičnog polja (2,5) negativna. Nastavlja se postupak traženja optimalnog rješenja. Plan u tablici 5.50 je optimalan jer su sve karakteristike nebazičnih polja nenegativne.

Tablica 5.50

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5		α_i
I_1	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 50	50	0
I_2	0 / 55	0 / 35	0 / 0	M / M	0 / 10	100	0
I_3	0 / 20	0 / 0	0 / 45	0 / 85	1 / 1	150	0
	75	35	45	85	60		
β_j	0	0	0	0	0		

Promatraju se vremena t_{ij} iz tablice 5.46 za bazična polja tablice 5.50 i dobije se

$$t_{max} = \max\{15, 10, 25, 30, 12, 24, 30\} = 30$$

Sve dostave bit će obavljene za 30 vremenskih jedinica (i to se vrijeme ne može smanjiti).

I jednostavno prebacivanje dostava po lancima polja transportne tablice s ciljem isključivanja polja u kojima je vrijeme prevoženja jednako maksimalnom vremenu u dobivenom planu predstavlja pogodnu metodu rješavanja transportnog problema s kriterijem minimalnog vremena svih dostava. Na taj način može se riješiti primjer 1. Prema tablici 4.46 za početno bazično rješenje $\max\limits_{x_{ij}\in X_1} t_{ij} = t_{35} = 36$.

Dakle, traži se novi plan da polje (3,5) ne bude bazično. U lancu (3,5) — (2,5) — (2,3) — (3,3) mogu se obaviti promjene tako da se u poljima (3,5) i (2,3) oduzme $\delta = \min\{60, 40\} = 40$, a ista veličina doda na polja (2,5) i (3,3). Novi plan prikazan je u tablici 5.51.

Tablica 5.51

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	
I_1	15 (50)	20	25	15	15	50
I_2	10 (25)	25 (35)	20	40	30 (40)	100
I_3	12	18	24 (45)	30 (85)	36 (20)	150
	75	35	45	85	60	

I dalje je polje (3,5) bazično. U lancu (3,2) — (3,5) — (2,5) — (2,2) mogu se načiniti izmjene za $\delta = \min\{20, 35\} = 20$. Novi transportni plan je prikazan u tablici 5.52.

Tablica 5.52

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	
I_1	15 (50)	20	25	15	15	50
I_2	10 (25)	25 (15)	20	40	30 (60)	100
I_3	12	18 (20)	24 (45)	30 (85)	36	150
	75	35	45	85	60	

Novi transportni plan ima

$$t_{max} = t_{25} = t_{34} = 30$$

Može se naći i drugi raspored dostava, ali t_{max} neće biti manje od $t_{25} = t_{34} = 30$.

(Ova stranica je ostavljena prazna)