5.3.2 Metoda koeficijenata ili modificirana metoda distribucije (MODI)

Nedostatak metode raspodjele sastoji se u tome što treba tražiti lanac za sva polja gdje je $x_{ij} = 0$ i računati njihove karakteristike. Na primjer, ako treba naći optimalni plan kod transportnog problema dimenzija 10 x 10, to jest kod transportnog problema gdje je 10 ishodišta i 10 odredišta, tada pri određivanju svakoga baznog plana treba formirati 81 $[m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1) = 9 \cdot 9 = 81]$ lanaca i računati njihove karakteristike. Kako i broj iteracija od početnoga baznog plana do optimalnog plana može biti velik, vidi se da je metoda raspodjele, iako veoma jednostavna, nepogodna zbog ogromnog posla računanja.

Metoda koeficijenata ili modificirana metoda distribucije - MODI (Modification Distribution Method) predstavlja pojednostavljenje metode raspodjele, koju je na osnovi opće simpleks metode razradio Dantzig [3].

Metoda koeficijenata ima tu prednost što ne treba konstruirati lanac za sva polja, bez tereta ($x_{ij} = 0$), jer se pomoću koeficijenata redaka i stupaca neposredno dobiju karakteristike lanaca. A sama konstrukcija lanca s najmanjom negativnom karakteristikom služi za preraspodjelu dostava u novom baričnom planu. Provjera optimalnosti baričnog plana izvodi se samo pomoću koeficijenata redaka i stupaca. Ti koeficijenti se biraju tako da njihov zbroj bude jednak jediničnoj cijeni u polju s baričnim rješenjem ($x_{ij} > 0$), koja se nalazi na presjeku stupca i retka čiji se koeficijenti zbrajaju. Koeficijenti mogu biti pozitivni, negativni i jednaki nuli.

Označe se koeficijenti retka s α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) i koeficijenti stupca s β_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Jedinične cijene uz barične varijable zadovoljavaju relaciju

$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

Kako baričnih varijabli ima $m + n - 1$, a nepoznatih koeficijenata redaka i stupaca $m + n$ jedan se koeficijen odredi proizvoljno. Obično se uzima da je koeficijent prvog retka jednak nuli, to jest $\alpha_1 = 0$, mada se tom koeficijentu može dati i proizvoljna druga vrijednost.

Za transportni problem u tablici 5.22, gdje je dano i početno barično rješenje dobiveno dijagonalnom metodom, naći će se optimalno rješenje koristeći metodu koeficijenata.

Tablica 5.22

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	5 16	4	16	16	0
I_2	7 21	3	4	21	2
I_3	2 19	8 14	7	33	− 3
I_4	11	5 12	1	12	− 6
I_5	13	6 8	4 10	18	− 5
b_j	56	34	10	100	
β_j	5	11	9	100	

Prvo je, u ovom primjeru, odabrano $\alpha_1 = 0$. Prvi redak s teretom, $x_{11} = 16$, povezan je s prvim stupcem, pa iz uvjeta $c_{11} = \alpha_1 + \beta_1$, odnosno $5 = 0 + \beta_1$ slijedi $\beta_1 = 5$. Prvi stupac povezan je s drugim retkom, s baričnom varijablom $x_{21} = 21$, pa je $c_{21} = 7 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_2 + 5$, odakle je $\alpha_2 = 2$. Prvi stupac je također povezan s trećim retkom pa je $c_{31} = 2 = \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 + 5$, odakle je $\alpha_2 = - 3$. Treći redak je povezan s drugim stupcem u polju (3,2), pa je ispunjeno $c_{32} = 8 = \alpha_3 + \beta_2 =$
$= - 3 + \beta_2$, odakle je $\beta_2 = 11$.

Dalje je

$c_{42} = 5 = \alpha_4 + \beta_2 = \alpha_4 + 11$, odakle je $\alpha_4 = -6$

$c_{52} = 6 = \alpha_5 + \beta_2 = \alpha_5 + 11$, odakle je $\alpha_5 = -5$

$c_{53} = 4 = \alpha_5 + \beta_3 = -5 + \beta_3$, odakle je $\beta_3 = 9$

Provjera optimalnosti bazičnog plana pomoću koeficijenata redaka i stupaca zasniva se na sljedećem teoremu.

Teorem 5.1

Ako je za sva bazična polja plana (to jest za polje (i,j) gdje je $x_{ij} > 0$) ispunjeno

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \tag{5.6}$$

a za slobodna polja (to jest, gdje je $x_{ij} = 0$)

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \tag{5.7}$$

onda je bazični plan optimalan.

Dokaz:

Ako se plan transporta označi s $\{x_{ij}\}$ i sustav koeficijenata redaka i stupaca s (α_i,β_j) koji zadovoljavaju uvjete (5.6) i (5.7), onda su ukupni troškovi transporta jednaki

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)x_{ij}$$

Za plan $\{ x'_{ij} \}$ ti troškovi su jednaki

$$F' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij}$$

Varijable x'_{ij} se razlikuju od x_{ij} tako što se s nekim od varijabli iz plana $\{x_{ij}\}$ poklapaju, ali u nekim poljima, gdje su varijable x_{ij} jednake nuli, one su pozitivne. U poljima gdje se varijable x_{ij} i x'_{ij} poklapaju ispunjeno je $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, a u poljima gdje su varijable $x_{ij} = 0$ i $x'_{ij} > 0$ ispunjeno je $\alpha_i + \beta_j < c_{ij}$ pa slijedi

$$F' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)x_{ij} = F$$

To znači: izmjenom plana $\{x_{ij}\}$ troškovi transporta ne mogu se umanjiti, to jest plan transporta $\{x_{ij}\}$ s koeficijentima α_i i β_j koji zadovoljavaju uvjete (5.6) i (5.7) je optimalan plan.

Iz ovog teorema neposredno slijedi jednostavan kriterij optimalnosti bazičnog plana:

Ako su razlike

$$k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$$

pozitivne za polja (i,j) gdje je $x_{ij} = 0$, onda je takav bazični plan optimalan.

Razlika $k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$ jednaka je karakteristici lanca polja (i,j) gdje je $x_{ij} = 0$. Ako se uzme, na primjer, polje (1,2) razlika $k_{12} = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 4 - (0 + 11) = -7$ i izračuna karakteristika lanca (1,2) – (1,1) – (3,1) – (3,2), to je $k_{12} = 4 - 5 + 2 - 8 = -7$.

I kao kod metode raspodjele, bazični plan se poboljšava sve dok se pojavljuje makar jedna negativna karakteristika.

Izračunajmo karakteristike praznih polja iz tablice 5.22:

(1,2) : $k_{12} = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 4 - (0 + 11) = -7$

(1,3) : $k_{13} = 16 - (0 + 9) = 7$

(2,2) : $k_{22} = 3 - (2 + 11) = -10$

(2,3) : $k_{23} = 4 - (2 + 9) = -7$

(3,3) : $k_{33} = 7 - (-3 + 9) = 1$

(4,1) : $k_{41} = 11 - (-6 + 5) = 12$

(4,3) : $k_{43} = 1 - (-6 + 9) = -2$

(5,1) : $k_{51} = 13 - (-5 + 5) = 13$

Kako je najmanja negativna karakteristika polja (2,2), po lancu ovog polja izračunat će se promjene dostava. Lanac polja (2,2) spaja u svojim polja (2,1), (3,1), (3,2). Veličina $x_{32} = 14 = \min\{14, 21\}$ oduzima se od dostava u poljima (2,1) i (3,2), a dodaje se dostavama u poljima (2,2) i (3,1). Drugo bazično rješenje dano je u tablici 5.23.

Tablica 5.23

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	5 (16)	4	16	16	0
I_2	7 (7)	3 (14)	4	21	2
I_3	2 (33)	8	7	33	−3
I_4	11	5 (12)	1	12	4
I_5	13	6 (8)	4 (10)	18	5
b_j	56	34	10		
β_j	5	1	−1		

U tablici 5.23 ispisani su i koeficijenti redaka i stupaca. Karakteristike praznih polja su

$(1,2): k_{12} = 4 - (0 + 1) = 3$

$(1,3): k_{13} = 16 - (0 - 1) = 17$

$(2,3): k_{23} = 4 - (2 - 1) = 3$

$(3,2): k_{32} = 8 - (-3 + 1) = 10$

$(3,3): k_{33} = 7 - (-3 - 1) = 11$

$(4,1): k_{41} = 11 - (4 + 5) = 2$

$(4,3): k_{43} = 1 - (4 - 1) = -2$

$(5,1): k_{51} = 13 - (5 + 5) = 3$

Kao što se vidi, u ovom drugom baznom rješenju samo je jedna negativna karakteristika za polje (4,3). Lanac ovog polja je (4,3) – (4,2) – (5,2) – (5,3). Na polje (4,3) i (5,2) doda se $x_{43} = 10 = \min\{12, 10\}$ a na polja (4,2) i (5,3) oduzme. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.24.

Tablica 5.24

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	5 (16)	4	16	16	0
I_2	7 (7)	3 (14)	4	21	2
I_3	2 (33)	8	7	33	−3
I_4	11	5 (2)	1 (10)	12	4
I_5	13	6 (18)	4	18	5
b_j	56	34	10		
β_j	5	1	−3		

U tablici 5.24 izračunati su koeficijenti redaka α_i i stupaca β_j.

Karakteristike praznih polja su

$(1,2): k_{12} = 4 - (0 + 1) = 3$

$(1,3): k_{13} = 16 - (0 - 3) = 19$

$(2,3): k_{23} = 4 - (2 - 3) = 5$

$(3,2): k_{32} = 8 - (-3 + 1) = 10$

$(3,3): k_{33} = 7 - (-3 - 3) = 13$

$(4,1): k_{41} = 11 - (4 + 5) = 2$

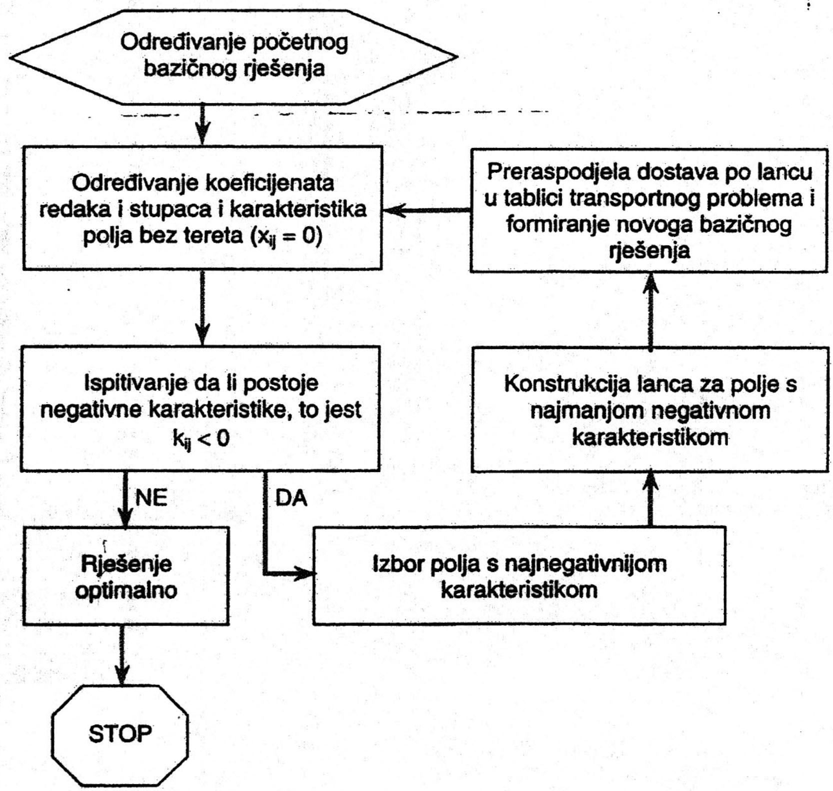
$(5,1): k_{51} = 13 - (5 + 5) = 3$

$(5,3): k_{53} = 4 - (5 - 3) = 2$

Kako su sve karakteristike polja (i,j), gdje je $x_{ij} = 0$, u tablici 5.24 pozitivne, to je ovo treće bazično rješenje i optimalno. Ukupni troškovi transporta prema optimalnom planu jednaki su

$$T_{min} = T_3 = 365 \text{ novčanih jedinica}$$

Iz ovog primjera vidi se da se algoritam metode koeficijenata može shematski prikazati na sljedeći način:



Metoda koeficijenata praktično je identična *metodi potencijala,* koju je razradio početkom 40-ih godina prošlog stoljeća L.V. Kantorovića [6]. Kantorovič je koeficijente redaka i stupaca nazvao potencijalima redaka i stupaca, pa metoda slijedi ovaj naziv.

Primjer s degeneracijom

Neka je dan transportni problem

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	1	3	2	300
I_2	5	7	10	250
I_3	3	1	4	450
b_j	300	400	300	

Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000$ i $\sum_{j=1}^{3} b_j = 1000$, to je dani problem zatvoren. Jedan od početnih bazičnih programa, dobiven dijagonalnom metodom je

Tablica 5.25

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	1 300	3	2	300
I_2	5	7 250	10	250
I_3	3	1 150	4 300	450
b_j	300	400	300	

Bazični program u tablici 5.25 ima četiri varijable različite od nule. Međutim, prema $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, treba imati pet varijabli različitih od nule.

Dodajmo ponudama a_1, a_2, a_3 proizvoljno malu veličinu ε i trećoj potražnji 3ε. Tako je dobivena tablica 5.26 u kojoj je naveden i jedan početni transportni plan.

Tablica 5.26

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	1 300	3 ε	2	$300+\varepsilon$	0
I_2	5	7 $250+\varepsilon$	10	$250+\varepsilon$	4
I_3	3	1 $150-2\varepsilon$	4 $300+3\varepsilon$	$450+\varepsilon$	-2
b_j	300	400	$300+3\varepsilon$		
β_j	1	3	6		

Izračunati su koeficijenti redaka i stupaca: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = -2$, $\beta_3 = 6$.

Karakteristike polja bez tereta ($x_{ij} = 0$) su

$(1,3) : k_{13} = 2 - (0 + 6) = -4$

$(2,1) : k_{21} = 5 - (4 + 1) = 0$

$(2,3) : k_{23} = 10 - (4 + 6) = 0$

$(3,1) : k_{31} = 3 - (-2 + 1) = 4$

Negativna karakteristika je u polju (1,3). Napravit će se preraspodjela po lancu $+ (1,3) \rightarrow - (1,2) \rightarrow + (3,2) \rightarrow - (3,3)$. Na poljima gdje se oduzima teret najmanja vrijednost je $\varepsilon = \min\{\varepsilon, 300+3\varepsilon\}$. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.27.

Tablica 5.27

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	1 300	3	2 ε	$300+\varepsilon$	0
I_2	5	7 $250+\varepsilon$	10	$250+\varepsilon$	8
I_3	3	1 $150-\varepsilon$	4 $300+2\varepsilon$	$450+\varepsilon$	2
b_j	300	400	$300+3\varepsilon$		
β_j	1	-1	2		

Koeficijenti redaka i stupaca su: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 8$, $\beta_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 2$.

Karakteristike polja bez tereta su

$(1,2): k_{12} = 3 - (0 - 1) = 4$

$(2,1): k_{21} = 5 - (8 + 1) = -4$

$(2,3): k_{23} = 10 - (8 + 2) = 0$

$(3,1): k_{31} = 3 - (2 + 1) = 0$

Kako je negativna karakteristika na polju (2,1), pravi se raspodjela po lancu + (2,1) → − (2,2) → + (3,2) → − (3,3) → + (1,3) → − (1,1). Na polje (2,1) stavi se teret $x_{21} = \min\{250+\varepsilon, 300+2\varepsilon, 300\} = 250 + \varepsilon$.

Treće bazično rješenje prikazano je u tablici 5.28.

Tablica 5.28

	O_1	O_2	O_3	a_i	α_i
I_1	1 | $50-\varepsilon$	3	2 | $250+2\varepsilon$	$300+\varepsilon$	0
I_2	5 | $250+\varepsilon$	7	10	$250+\varepsilon$	4
I_3	3	1 | 400	4 | $50+\varepsilon$	$450+\varepsilon$	2
b_j	300	400	$300+3\varepsilon$		
β_j	1	−1	2		

Karakteristike polja bez tereta su

$(1,2): k_{12} = 3 - (0 - 1) = 4$

$(2,2): k_{22} = 7 - (4 - 1) = 4$

$(2,3): k_{23} = 10 - (4 + 2) = 4$

$(3,1): k_{31} = 3 - (2 + 1) = 0$

Kako su sve karakteristike pozitivne ili nula transportni plan je optimalan. Ako se izostavi veličina ε, dobije se bazični program $x_{11} = 50$, $x_{13} = 250$, $x_{21} = 250$, $x_{32} = 400$, $x_{33} = 50$ koji ima $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ bazičnih varijabli i nije degeneriran.

Ukupni troškovi za taj bazični program su

$T = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 250 + 5 \cdot 250 + 1 \cdot 400 + 50 \cdot 4 = 2400$ novčanih jedinica

5.4 Različite modifikacije transportnog problema

5.4.1 Otvoreni model transporta

Ako je ponuda jednaka potražnji tj. ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

riječ je o *zatvorenom problemu transporta*. Međutim, u praksi se često događa da taj uvjet nije ispunjen, to jest često se sreće sa slučajem kada je ukupna ponuda veća od ukupne potražnje:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ili kada je ukupna ponuda manja od ukupne potražnje:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Matematički model transportnog problema kod kojega ukupna ponuda nije jednaka ukupnoj potražnji naziva se *otvoreni model transporta*.

S formalne strane, otvoreni model transporta uvijek se može svesti na zatvoreni model.

U slučaju kad je ukupna ponuda veća od ukupne potražnje, uvodi se jedno fiktivno odredište. To znači da se tablica transportnog problema proširuje još jednim stupcem, pri čemu će potražnja toga novog odredišta biti jednaka

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Na taj način se u matematički model uvode nove varijable $x_{i,n+1} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

U slučaju kada je ukupna ponuda manja od ukupne potražnje, uvodi se fiktivno ishodište s količinom tereta

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Sada se tu nove varijable $x_{m+1,j} \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Iako otvoreni model transporta ne stvara teškoće pri formalnom prijelazu na zatvoreni model, u praksi se pojavljuju izvjesna pitanja koja treba uzeti u obzir. Razmotrit će se slučaj kad je ukupna ponuda veća od potražnje. U tom slučaju, kao je već utvrđeno, treba uvesti fiktivno odredište, ili što je isto, dodati stupac u transportnoj tablici, ali se odgovarajuće varijable $x_{i,n+1}$ uvode i u funkciju cilja (funkciju ukupnih troškova). Logično je sada postaviti pitanje: kako u funkciji cilja uvesti jedinične cijene $c_{i,n+1}$ $i=1,2,...,m$. Često se jednostavno stavlja $c_{i,n+1} = 0$ $i = 1,2,...,m$, što je točno pod veoma specifičnim pretpostavkama. Na primjer, ako u ishodištima ima više robe nego što je potražnja stavljanjem $c_{i,n+1} = 0$ za $i = 1,2,...,m$, jedan dio tereta ostaje u ishodištu i. Ukoliko u ishodištima postoje troškovi skladištenja koji su poznati i proporcionalni količini robe, tada je nužno da se u funkciji cilja ti troškovi uklope u odgovarajuće cijene $c_{i,n+1}$ $i = 1,2,...,m$.

Razmatrani slučajevi otvorenog modela transporta sadrže i niz drugih problema praktične prirode, koji se pojavljuju pri konstrukciji matematičkog modela. Može se, na primjer, dogoditi da je unaprijed poznato da neko ishodište ne može uskladištiti robu, što znači da je od tih ishodišta nedopustiva "trasa" do fiktivnog odredišta.

Realno je razmotriti slučaj da u ishodištu I_i može ostati dio robe pripremljen za transport. Drukčije rečeno, potrebno je osigurati da u optimalnom rješenju u ishodištu I_i ne ostane više tereta nego što to ishodište može zadržati u skladištu, ili, što je isto, uvodi se pretpostavka da se iz I_i mora izvesti unaprijed određena količina robe.

U svezi s tim, ukupna količina robe u ishodištu I_i, jednaka a_i, dijeli se na dva dijela:

$$a_i = a_i' + a_i''$$

gdje je a_i' - količina tereta koja se mora otpremiti iz I_i, a a_i'' - količina tereta koja može ostati kao zaliha.

Primjer 1.

Neka je dan transportni problem u kojemu veličine c_{ij} označavaju udaljenosti između ishodišta I_i i odredišta O_j (tablica 5.29).

Tablica 5.29

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	5	1	11	6
I_2	9	7	8	14	7
I_3	10	2	6	12	10
b_j	3	6	5	2	23 / 16

Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = 23 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 16$, uvodi se fiktivno odredište O_5.

Neka je poznato da se u prvom ishodištu ne može uskladištiti više od 2 jedinice robe. Zbog toga se umjesto ishodišta I_i formiraju dva ishodišta I_i' i I_i'' s količinama robe 4 i 2. S obzirom na interpretaciju veličina c_{ij} uzima se $c'_{1,n+1} = M$ (gdje je M veliki ne specificirani broj), dok su ostali koeficijenti $c_{i,n+1} = 0$.

Transformirani transportni problem prikazan je u tablici 5.30.

Tablica 5.30

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_i'	3	5	1	11	M	4
I_i''	3	5	1	11	0	2
I_2	9	7	8	14	0	7
I_3	10	2	6	12	0	10
b_j	3	6	5	2	7	

To je sada problem transporta linearnog programiranja za koji se lako nađe optimalno rješenje.

U drugom slučaju, to jest u slučaju kada je ukupna potražnja veća od ukupne ponude, opet je prijelaz na zatvoreni model transporta, s formalne strane, vrlo jednostavan. Uvodi se fiktivno ishodište koje "isporučuje" razliku između ukupne potražnje i ponude. Ali ni ovdje se u svakoj situaciji ne može ograničiti na formalno rješenje problema, jer će se dogodi da se mora isporučiti cjelokupna tražena roba, što će se u matematičkom modelu morati uzeti u obzir.

Može se, na primjer, dogoditi da se određenom odredištu može poslati manje jedinica robe nego što potražuje, ali ne manje od unaprijed dogovorene količine. Sljedeći primjer ilustrira takvu situaciju.

Primjer 2.

Neka je dan transportni problem (tablica 5.31).

Tablica 5.31

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	2	6	5	4
I_2	9	8	11	6	9
I_3	4	5	10	7	12
b_j	5	7	11	6	25
					29

Kao što se vidi, ovdje je $\sum_{i=1}^{3} a_i = 25 < \sum_{j=1}^{4} b_j = 29$.

Potrebno je, dakle, uvesti fiktivno ishodište I_4, u kojemu će biti "ponuđeno" za transport 29 – 25 = 4 jedinice robe. Uvodi se i sljedeće ograničenje: u slučaju da drugo odredište ne bude potpuno podmireno u optimalnom planu, mora se osigurati najmanje tri jedinice robe. Da bi se to ograničenje ispunilo, uvode se dva odredišta umjesto O_2, naime odredište O_2' potražuje 7 – 3 = 4 jedinice robe i O_2'' potražuje 3 jedinice robe. Očigledno, za vrijednosti c_{43} treba uzeti M, a za ostale vrijednosti $c_{4j} = 0$. Praktično, umjesto M, u polju (4,3) ne stavlja se ništa, nego se to polje precrtava. Zatvoreni model transportnog problema prikazan je u tablici 5.32.

Tablica 5.32

	O_1	O_2'	O_2''	O_3	O_4	a_i
I_1	3	2	2	6	5	4
I_2	9	8	8	11	6	9
I_3	4	5	5	10	7	12
I_4	0	0	M	0	0	4
b_j	5	4	3	11	6	

Optimalno rješenje može se naći jednom od već prikazanih metoda.

Valja napomenuti da se na isti način postupa kada postoji više odredišta s ograničenjima kao što su bila u ovoj zadaći.

Još će se navesti jedan primjer otvorenog problema transporta: prebacivanje praznih vagona od željezničkih kolodvora gdje su istovareni do željezničkih kolodvora gdje ih treba prebaciti radi utovara. Najčešće je to otvoreni model, koji se svodi na zatvoreni transportni model.

Primjer 3.

Određivanje optimalnog plana prebacivanja praznih vagona [10].

Jedan od osnovnih zadataka u okviru racionalizacije teretnog prijevoza željeznicom je određivanje optimalnog plana prebacivanja praznih vagona iz kolodvora gdje su istovareni u kolodvor gdje se trebaju utovariti. Popularnije rečeno, to je zadatak nalaženja minimalnog "trčanja" praznih vagona.

Postoji velik broj načina na koji se može izvršiti prebacivanje praznih vagona. Osnovni kriterij za izbor plana prebacivanja praznih vagona je onaj plan pri kojemu su troškovi prebacivanja minimalni. Postavlja se zadatak nalaženja optimalnog plana prebacivanja praznih vagona za jednu promatranu mrežu, na primjer, mrežu jednoga željezničkoga transportnog poduzeća koje ima n kolodvora.

Radi pojednostavljenja matematičkog modela, uvode se sljedeće pretpostavke:

1. Prazni vagoni, čije se prebacivanje želi matematički modelirati istog su tipa i uzajamno se mogu zamjenjivati.
2. Moguće je prebaciti prazne vagone iz jednog kolodvora promatrane mreže u proizvoljni drugi, a troškovi prebacivanja, po jednom vagonu iz svakoga kolodvora u proizvoljni drugi dani su i neka su jednaki c_{ij} ($i = 1, 2, \dots , n$; $j = 1, 2, \dots , n$).
3. Vremena prebacivanja praznih vagona iz i-toga kolodvora u j-ti kolodvor jednaka su t_{ij} dana ($t_{ii} = 0$), $i = 1, 2, \dots , n$; $j = 1, 2, \dots , n$ gdje se veličine t_{ij} računaju s točnošću do jednog dana zaokruživanjem na gore.
4. Jednom u tijeku dana kolodvori šalju izvješće centru, odakle se rukovodi prebacivanjem praznih vagona, o broju potrebnih praznih vagona, odnosno o broju praznih vagona koje mogu poslati drugim kolodvorima.

Ako je $t_{ij} \leq m$ dana, može se formirati matematički model prebacivanja praznih vagona za m dana. Drugim riječima, može se za m dana planirati prebacivanje praznih vagona. Zbog toga, pretpostavlja se dalje, svaki kolodvor promatrane mreže šalje centru svoja potraživanja praznih vagona kao i svoju ponudu za svaki od m dana.

Označimo s b_{js} - potrebe j-toga kolodvora za praznim vagonima s-tog dana, $s = 1, 2, \dots , m$. Neka su a_{ir} ponude i-toga kolodvora praznih vagona r-tog dana, a s a_{io} označimo broj praznih vagona koji se na početku prvog dana stavlja na raspolaganje na i-tom kolodvoru. Na taj način, umjesto n odredišta ima $m \cdot n$ odredišta koja potražuju b_{js}, $j = 1, 2, \dots , n$; $s = 1, 2, \dots , m$ praznih vagona i $(m + 1) \cdot n$ ishodišta s ponudama a_{ir}, $i = 1, 2, \dots , n$; $r = 0, 1, \dots , m$ praznih vagona.

Znači, ukupna ponuda praznih vagona iznosi

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=0}^{m} a_{ir}$$

a ukupna potražnja praznih vagona je

$$B = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} b_{js}$$

U modelu transportnog problema osnovno ograničenje je oblika

$$A = B$$

Prilagodi se sada model prebacivanja praznih vagona za m dana na model transportnog problema A = B. Kako se u "zatvorenom" modelu transportnog problema zahtijeva da ponuda bude jednaka potražnji za slučaj A > B dodaje se fiktivno odredište koje "potražuje" sljedeći broj vagona:

$$b_{n+1,1} = \max\{0, A - B\}$$

$$b_{n+1,2} = 0$$

....

$$b_{n+1,m} = 0$$

Isto tako se uradi pomoću fiksnog ishodišta za slučaj $A < B$:

$$a_{n+1,1} = \max\{0, B - A\}$$

$$a_{n+1,2} = 0$$

....

$$a_{n+1,m} = 0$$

Taj zapis omogućuje da se promatraju oba slučaja zajedno, jer je najmanje jedan od brojeva $b_{n+1,1}$ ili $a_{n+1,0}$ jednak nuli.

Ograničenje $A = B$ sada postaje

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{r=0}^{m} a_{ir} = \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{m} b_{js}$$

to jest, dobiven je transportni problem s $(m + 1)(n + 1)$ ishodišta i $m(n + 1)$ odredišta.

Moguća rješenja x_{irjs} tako modificiranoga transportnog problema zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{r=0}^{m} x_{irjs} = b_{js}; \quad j = 1, 2, \dots, n+1; \; s = 1, 2, \dots, m \tag{5.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{m} x_{irjs} = a_{ir}; \qquad i = 1, 2, \dots, n+1; \qquad r = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$x_{ijrs} > 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n+1; \qquad j = 1, 2, \dots, n+1$$
$$r = 0, 1, 2, \dots, m; \qquad s = 1, 2, \dots, m$$

Među mogućim rješenjima biraju se ona koja imaju realan smisao. Realna rješenja zadovoljavaju vremenska ograničenja. Prije svega, da bi se isključile dostave vagona koje ne bi zadovoljile vremenska ograničenja, stavit će se da su te vrijednosti x_{ijrs} jednake nuli. Veličine x_{ijrs} koji ne zadovoljavaju vremensko ograničenje odnose se na one dostave praznih vagona koje ne mogu biti dostavljeni na vrijeme kolodvorima koji ih potražuju, to jest, to su dostave iz i-tog ishodišta koje su poslate r-tog dana da bi u j-to odredište stigle s-tog dana i pri tom zadovoljavaju uvjet:

$$r + t_{ij} > s$$

Ako, pak dostava zadovoljava uvjet:

$$r + t_{ij} \le s \tag{5.9}$$

tada je odgovarajuće rješenje $x_{ijrs} > 0$ realno, što znači da će dostava iz i-tog ishodišta stići u j-to odredište ne kasnije od dana kada je potrebno. Znači, moguća rješenja transportnog problema, pored ograničenja (5.8) u ovoj modifikaciji, zadovoljavaju i vremensko ograničenje (5.9). Takva rješenja nazivaju se *realnima*.

Sada je model sveden na klasičan model transportnog problema, ako se samo vrijednostima x_{ijrs}, koje ne zadovoljavaju uvjet (5.9) pridruže veliki transportni troškovi M_{irjs} [1]. Znači, transportni troškovi c_{irjs} prebacivanja praznih vagona iz i-tog u j-ti kolodvor definiraju se na sljedeći način:

Očigledno je $c_{ir,n+1,1} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n + 1$; $r = 1, 2, \dots, m$) jer veličine $c_{ir,n+1,1}$ označavaju troškove prijevoza praznih vagona kojih ima previše u i-tom kolodvoru r-tog dana i koje treba poslati na fiktivni kolodvor (n + 1) prvog dana i $c_{n+1,0js} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n + 1$; $s = 1, 2, \dots, m$) jer veličine $c_{n+1,0js}$ označavaju troškove prijevoza praznih vagona koje treba poslati iz fiktivnoga kolodvora uoči početka realizacije plana da bi u j-ti stigli s-tog dana.

Valja napomenuti na kraju da se ovaj matematički model može prilagoditi složenijim pretpostavkama od pretpostavki 1 – 4 na kojima je model konstruiran.

Jedno od bitnih ograničenja je, svakako, prvo, to jest ograničenje da su vagoni istog tipa. Model se može proširiti da se uvedu alternacije za pojedine tipove praznih vagona. Ipak se model usložnjava odbacujući prvo ograničenje.

Od posebnog je praktičnog značenja da se u ovom matematičkom modelu može uzeti u obzir činjenica da kolodvori ne jednõm, nego više puta tijekom dana šalju izvješće centru o broju potrebnih praznih vagona, odnosno o broju praznih vagona koje ti kolodvori mogu poslati drugim kolodvorima. Isto tako, model može uzeti u obzir da se prazni vagoni iz jednog kolodvora mogu prebaciti u drugi i tamo koristiti još istog dana, to jest, može biti $r = s$, odnosno veličine t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) mogu biti proizvoljni brojevi između 0 i m, a ne samo cijeli brojevi u tim granicama.

U ovom matematičkom modelu također nije uzet u obzir prioritet robe koju treba prevoziti. Klasifikacija robe prema prioritetu i naznačavanje i ovih podataka operativnom centru zahtijeva također proširenje matematičkog modela transportnog problema. Takvo proširenje još više će približiti matematički model realnosti.