5. PROBLEMI TRANSPORTA I DISTRIBUCIJE

Posljednje desetljeće znanost posvećuje sve veću pažnju pitanjima organizacije i planiranja, posebno u domeni prometa i transporta, jer su pitanja racionalizacije u ovoj gospodarskoj grani postala vrlo složena.

Posebni slučaj općeg problema linearnog programiranja je tzv. *transportni problem*. Još prije pojave radova iz linearnog programiranja, neke specijalne slučajeve transportnog problema izučavali su ekonomisti [9]. Prvu strogu postavku transportnog problema dao je Hitchcock [5] 1941. godine, pa se zato transportni problem često naziva i "problem Hičkoka".

Hitchcock je formulirao transportni problem na sljedeći način.

Dano je m proizvodnih centara ili skladišta, koji nude određenu robu u količinama $a_1, a_2, \dots, a_m$ i n potrošača koji tu robu potražuju u količinama $b_1, b_2, \dots, b_n$. Pretpostavlja se da je zbroj ponuda jednak zbroju potražnji: $a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots b_n$. Dani su brojevi c_{ij} koji označavaju cijene prijevoza jedinice robe od i-tog proizvođača do j-tog potrošača. Treba naći takve veličine $x_{ij} \geq 0$, gdje x_{ij} označava količinu tereta koju treba prevesti od i-tog proizvođača do j-tog potrošača, tako da ukupni troškovi transporta $F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ budu minimalni.

Godine 1942. Kantorovič [7] je formulirao opći problem o prenošenju neprekidnih masa. Tek 1951. godine započeo je intenzivni razvoj metoda kojima se mogu rješavati transportni problemi. Dantzig [3] je 1951. godine dao rješenje transportnog problema zasnovano na simpleks metodi. U godinama 1953. - 1955. nastaju nove metode rješavanja transportnog problema, koje poboljšavaju Dantzigovu metodu.

Među tim metodama treba svakako navesti metodu "Stepping stone" (doslovno prevedeno "skakanje s kamena na kamen") Charnesa i Coopera [2] iz 1953. godine.

5.1 Formulacija transportnog problema

Među problemima linearnog programiranja posebno mjesto zauzimaju transportni problemi. Izdvajanje transportnog problema uvedeno je zbog karakteristične postavke njegova matematičkog modela koji omogućava znatna pojednostavljenja u procesu nalaženja optimalnog rješenja.

Transportnim problemom se određuje optimalan plan transporta istovrsne robe ako je poznato:

- broj ishodišta (proizvodni centri, skladišta, lokacije pojedinih resursa i drugo)
- broj odredišta (potrošački centri, gradilišta, prerađivački centri i drugo)
- količine tereta u ishodištima

- količine tereta koje potražuje svako odredište - potrošački centar
- cijena transporta po jedinici tereta od svakog ishodišta do svakog odredišta.

Pod *optimalnim planom* transporta razumijeva se onaj plan transporta robe od ishodišta do odredišta koji ima minimalne ukupne troškove transporta.

Da bi se dobila matematička formulacija transportnog problema uvode se sljedeće pretpostavke i oznake.

Neka je m ishodišta i n odredišta. Ishodišta se označe sa $I_1, I_2, \dots, I_m$, a odredišta s $O_1, O_2, \dots, O_n$. Količina tereta (istovrsnog tereta) u ishodištima, *ponuda*, obilježi se s $a_1, a_2, \dots, a_m$ a *potražnja* u odredištima s $b_1, b_2, \dots, b_n$. Ako te veličine, koje mogu biti izražene u tonama, komadima, vagonima, satima i dr., zadovoljavaju jednakost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n \qquad (5.1)$$

tada se transportni problem naziva *zatvorenim*. Ako je, pak, ispunjeno

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{ili} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

tada se transportni problem naziva *otvorenim*.

Označi se, dalje, s c_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ cijena transporta jedinice tereta od i-tog ishodišta do j-tog odredišta, a s x_{ij} - količina tereta koju treba prevesti iz i-tog ishodišta u j-to odredište. Svi se ti podatci mogu pregledno dati u tablici, (tablica 5.1).

Tablica 5.1

ISHODIŠTA \ ODREDIŠTA	O_1	O_2	...	O_n	PONUDA a_i
I_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
I_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	...	...	...	...	⋮
I_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
POTRAŽNJA b_j	b_1	b_2		b_n	

Obično se u lijevom gornjem kutu polja tablice 5.1 unose jedinične cijene transporta c_{ij}, a u desnom donjem kutu polja količine transporta x_{ij}.

Za zatvoreni model transportnog problema veličine x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ čine dopustivi ili mogući plan transporta ako zadovoljavaju sljedeća ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.4)$$

Teorem 5.1

Uvjet $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ je nužan i dovoljan uvjet da bi sustav jednadžbi (5.2), (5.3) bio suglasan.

Dokaz:

Zaista, ako je sustav jednadžbi (5.2), (5.3) suglasan, onda je $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ to jest, uvjet (5.1) je nužan uvjet suglasnosti. Da bi se dokazalo da je taj uvjet i dovoljan za suglasnost sustava jednadžbi (5.2), (5.3), treba dokazati da su vrijednosti varijabli

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

rješenja sustava jednadžbi (5.2), (5.3).

Zaista, ako se ta vrijednost za x_{ij} uvrsti u jednadžbu:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

dobiva se

$$\frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i$$

odakle se zbog uvjeta (5.1) dobiva $a_i = a_i$. Analogno

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j$$

Time je dokazano da je uvjet (5.1) i dovoljan uvjet za suglasnost sustava jednadžbi (5.2), (5.3).

Zbog uvjeta (5.1), jednadžbe (5.2) i (5.3), kojih ima $m + n$, nisu nezavisne. Zaista, zbrajajući jednadžbe (5.2), a zatim jednadžbe (5.3), dobiva se isti rezultat zbog uvjeta (5.1), što znači da je broj linearno nezavisnih veza jednak najviše $m + n - 1$. Može se pokazati da je rang matrice sustava jednadžbi (5.2), (5.3) jednak $r = m + n - 1$, odakle slijedi da se $m + n - 1$ *baz̆ičnih varijabli* mogu izraziti pomoću ostalih nebazičnih varijabli (slobodnih varijabli). Nebazičnih varijabli ima

$$K = m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$$

Dopustivo (moguće) rješenje naziva se *bazičnim* ako u njemu broj pozitivnih veličina x_{ij} nije veći od $r = m + n - 1$, dok su ostale varijable x_{ij} u bazičnom rješenju jednake nuli. To znači da u svakom bazičnom planu nema više od $r = m + n - 1$ prevoženja.

Bazično rješenje naziva se *optimalnim* ako daje minimalne ukupne troškove transporta, to jest ako daje minimalnu vrijednost funkcije

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \qquad (5.5)$$

Zatvoreni model transportnog problema je najjednostavniji slučaj transportnog problema linearnog programiranja. Zbog toga će se razmotriti najprije metode rješavanja zatvorenog modela transportnog problema.

5.2 Metode određivanja bazičnog rješenja transportnog problema

Rješavanje transportnog problema, kao i svakoga drugog problema linearnog programiranja, počinje određivanjem početnog bazičnog rješenja (početnog plana). To predstavlja prvu etapu u rješavanju transportnog problema. Ako u toj prvoj etapi nije dobiveno optimalno rješenje, prelazi se na drugu etapu, to jest na etapu gdje se nizom iteracija prelazi s početnog bazičnoga rješenja na bazična rješenja koja su sve bliže optimalnom rješenju.

Postoji više metoda za određivanje početnoga bazičnog rješenja. Jedna od prvih metoda nalaženja početnoga bazičnog rješenja je "*dijagonalna metoda*" ili "*metoda sjeverozapadnoga kuta*" (North-West Corner Rule). Druge metode, koje su kasnije pronađene, imale su za cilj da se dođe do početnoga baznog rješenja, koje će biti bliže optimalnom rješenju. Međutim, pri korištenju računala važnija je jednostavnost odgovarajućeg programa za računalo, nego broj iteracija kojima se dolazi do optimalnog rješenja. Zbog toga se, pri korištenju računala, najčešće koriste najjednostavnije metode određivanja početnoga baznog plana. Osim dijagonalne metode razmatrat će se još dvije metode za određivanje početnoga baznog plana koje pri ručnom rješavanju transportnog problema skraćuju postupak.

5.2.1 Dijagonalna metoda (metoda sjeverozapadnoga kuta)

Najjednostavnije će se objasniti ova metoda na konkretnom primjeru. U tablici 5.2 dane su količine tereta koje treba prevesti iz ishodišta (I_i), količine tereta koje se potražuju u odredištima (O_j), kao i cijene transporta od svakog ishodišta do svakog odredišta. Svako polje tablice 5.2 označivat će se s (i,j), i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n. U lijevom gornjem kutu svakoga takvog polja (i,j) tablice 5.2 upisana je jedinična cijena c_{ij}. U desnom donjem kutu svakog polja (i,j) u tablici upisana je vrijednost varijable x_{ij}, to jest upisana je količina tereta koju treba prevesti iz i-tog ishodišta u j-to odredište. U ovom primjeru dan je transportni problem s m = 4 ishodišta i n = 5 odredišta.

Tablica 5.2

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 / 13	12 / 23	1	4	13	36
I_2	7	8 / 1	14 / 15	6 / 7	5	23
I_3	15	4	2	7 / 14	9 / 15	29
I_4	6	11	5	16	3 / 12	12
b_j	13	24	15	21	27	100 / 100

Ukupna količina tereta u ishodištima (ponuda) je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36 + 23 + 29 + 12 = 100$; jednaka je ukupnoj količini tereta koji se potražuje u potrošačkim centrima $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 13 + 24 + 15 + 21 + 27 = 100$.

Prema dijagonalnoj metodi, prvo se određuje vrijednost varijable x_{11} na sljedeći način:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{36, 13\} = 13$$

Kao što se vidi, prvo ishodište može isporučiti 36 jedinica tereta, a prvo odredište traži 13 jedinica tereta. Uzimajući za x_{11} = 13 potražnja prvog odredišta u potpunosti je zadovoljena; ta se vrijednost za x_{11} upisuje u desnom donjem kutu polja (1,1).

Ishodište I_1 može isporučiti još 36 − 13 = 23 jedinice tereta preostalim odredištima. Odredištu O_2 daje se najviše što je moguće, to jest veličina x_{12} određuje se prema:

$$x_{12} = \min\{36 - 13, 24\} = 23$$

Na taj način je teret (ponuda) prvog ishodišta iscrpljen, pa su veličine x_{13}, x_{14} i x_{15} jednake nuli. Iz praktičkih razloga njih se ne upisuje u tablicu.

Prvo odredište je zadovoljeno, a drugom odredištu dopunit će se jedna jedinica tereta iz drugog ishodišta. Varijable x_{2j} (j = 1, 2, ... , 5), u drugom retku određuju se na sljedeći način:

$$x_{21} = 0, \qquad x_{22} = \min\{23, 24 - 23\} = \min\{23, 1\} = 1$$

$$x_{23} = \min\{23 - 1, 15\} = 15$$

$$x_{24} = \min\{23 - 1 - 15, 21\} = \min\{7, 21\} = 7$$

$$x_{25} = 0$$

Dalje je

$$x_{31} = 0, \qquad x_{32} = 0, \qquad x_{33} = 0$$

$$x_{34} = \min\{29, 21 - 7\} = \min\{29, 14\} = 14$$

$$x_{35} = \min\{29 - 14, 27\} = \min\{15, 27\} = 15$$

i

$$x_{41} = 0, \qquad x_{42} = 0, \qquad x_{43} = 0, \qquad x_{44} = 0$$

$$x_{45} = \min\{12, 27 - 15\} = \min\{12, 12\} = 12$$

Bazične varijable raspoređene su na ovaj način uzduž "dijagonale" tablice pa je otuda i potekao naziv metode. No, isto tako, taj pravac podsjeća na pravac sjeverozapad, pa se metoda naziva i metoda sjeverozapadnoga kuta ili kornera. Karakteristično je da popunjavanje tablice uvijek počinje od polja (1,1), a završava se u polju (m,n).

Da bi se vizualno istakla polja u kojima su na taj način dobijene bazične varijable, zaokruže se veličine $x_{ij} > 0$ u tim poljima. Kao što se vidi, postoji $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ kružića, to jest osam $x_{ij} > 0$, dok su preostale varijable $m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1) \cdot (n - 1) = 3 \cdot 4 = 12$ jednake nuli.

Ukupni troškovi prijevoza prema tom prvom baznom planu iznose:

$$T_0 = 5 \cdot 13 + 12 \cdot 23 + 8 \cdot 1 + 14 \cdot 15 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 3 \cdot 12 = 870 \text{ n.j.}$$

(n.j. - novčanih jedinica)

5.2.2 Metoda najmanje jedinične cijene

Prilikom sastavljanja početnoga baznog rješenja dijagonalnom metodom, ne uzimaju se uopće u obzir jedinične cijene transporta, pa je dobiveno bazično rješenje dosta udaljeno od optimalnog. Intuitivno je jasno da biranje baznih varijabli u poljima gdje su cijene transporta manje, daje manju vrijednost funkciji cilja nego što se dobije dijagonalnom metodom. Za prvu baznu varijablu uzima se najveći mogući teret u polju tablice 5.3 gdje je jedinična cijena transporta najmanja (u tablici 5.3 su isti podaci kao u tablici 5.2).

Tablica 5.3

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5	12	1 (15)	4 (21)	13	36
I_2	7 (8)	8	14	6	5 (15)	23
I_3	15 (5)	4 (24)	2	7	9	29
I_4	6	11	5	16	3 (12)	12
						100
b_j	13	24	15	21	27	100

U primjeru koji je dan u tablici 5.3 vidi se da je cijena $c_{13} = 1$, pa se za x_{13} uzima vrijednost

$$x_{13} = \min\{36, 15\} = 15$$

Ta se vrijednost za x_{13} upisuje u donjem desnom kutu polja (1,3) tablice 5.3.

Na taj način potrebe trećeg odredišta su zadovoljene, a drugo ishodište ima na raspolaganju još 36 – 15 = 21 jedinica tereta.

Sljedeća najmanja cijena je c_{33} = 2, ali potrebe trećeg odredišta su zadovoljene i traži se sljedeća najmanja cijena. To je $c_{45} = 3$ te je

$$x_{45} = \min\{12, 27\} = 12$$

Time je iscrpljeno ishodište I_4.

Naredna najmanja cijena je $c_{14} = 4$ i $c_{32} = 4$. Na polje (1,4) može se staviti teret $x_{14} = 21$; tako je zadovoljena ponuda odredišta O_4 i istovremeno iscrpljeno prvo ishodište. Na polje (3,2) stavi se $x_{32} = \min\{27, 24\} = 24$. Na isti način odredi se da je

$$x_{21} = 8, \qquad x_{31} = 5$$

$$x_{25} = \min\{23, 27 - 12\} = \min\{23, 15\} = 15$$

$$x_{21} = \min\{23 - 15, 13\} = \min\{8, 13\} = 8$$

$$x_{31} = \min\{29 - 24, 13 - 8\} = \min\{5, 5\} = 5$$

Dobilo se moguće rješenje, sve ponude su iscrpljene i potražnje zadovoljene.

Ukupni troškovi transporta su

$$T = 1\cdot15 + 4\cdot21 + 7\cdot8 + 5\cdot15 + 15\cdot5 + 4\cdot24 + 3\cdot12 = 437 \text{ n.j.}$$

Uočava se da su ukupni troškovi transporta manji za plan transporta koji je dobiven metodom najmanje cijene od troškova transporta za plan dobiven dijagonalnom metodom koji je iznosio 870 n.j.

Pri korištenju metode najmanje cijene može se dogoditi da u nekom koraku postoji najmanja cijena na više mjesta. Tada se uzima ono polje u kojem je najmanja cijena i u retku i u stupcu istovremeno. U to polje stavlja se najveći mogući teret.

U tablici 5.3 zaokruženo je 7 brojeva ($x_{ij} > 0$) što je manje od $m + n - 1 =$ $= 4 + 5 - 1 = 8$, u ovom slučaju kaže se da *transportni problem degenerira.*

5.2.3 Slučaj degeneracije

Pod degeneracijom baznog plana razumijeva se onaj plan u kojega su i neke od baznih varijabli jednake nuli, to jest u degeneriranom planu je broj pozitivnih varijabli manji od m + n – 1. U tablci 5.3 metodom najmanje cijene dobiveno je svega 7 dostava, umjesto $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. To znači da je jedna bazična varijabla jednaka nuli.

Slučaj degeneracije, gdje su neke od baznih varijabli jednake nuli, može se pojaviti i pri prijelazu od početnoga baznog plana na bolji bazični plan, bliže optimalnom.

Zbog zahtjeva metoda rješavanja transportnog problema uvijek će biti pogodno da je m + n − 1 baznih varijabli, makar umjesto neke od njih stajale i nule. Zbog toga je dovoljno sasvim neznatno izmijeniti ponudu i potražnju, tako da se jednakost $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ne promijeni.

Na odgovarajućim će se mjestima, umjesto nultih dostava najčešće stavljati, veličina ε (epsilon), pa će se tek po nalaženju optimalnog plana uzeti ε = 0.

U ovom primjeru (tablica 5.3), početni će se transportni plan malo izmijeniti tako da će se svakoj ponudi dodati ε, a zadnjoj potražnji m·ε, u ovom slučaju $b_5 = 27 + 4\varepsilon$. S tim izmjenama metodom najmanje cijene je bazični plan s $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ dostava (pozitivnih baznih varijabli) u tablici 5.4.

Tablica 5.4

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 / ε	12	1 / 15	4 / 21	13	36 + ε
I_2	7 / 8 − 2ε	8	14	6	5 / 15 + 3ε	23 + ε
I_3	15 / 5 + ε	4 / 24	2	7	9	29 + ε
I_4	6	11	5	16	3 / 12 + ε	12 + ε
b_j	13	24	15	21	27 + 4ε	

5.2.4 VAM metoda (Vogelova metoda)

Naziv ove metode čine početna slova riječi u nazivu na engleskom jeziku: Vogel's Approximation Method. Ova metoda dobivanja početnog baznog plana je najsloženija, ali se njom dobiva plan bliži optimalnom nego što se dobije drugim metodama. Zbog toga se ona preporučuje pri rješavanju transportnog problema većih dimenzija.

Razmotrit će se ova metoda na istom primjeru iz 5.2.1 (tablica 5.5):

Tablica 5.5

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1	4	13	36	3
I_2	7	8	14	6	5	23	1
I_3	15	4	2	7	9	29	2
I_4	6	11	5	16	3	12	2
b_j	13	24	15	21	27		
Δ_j	1	4	1	2	2		

U svakom retku i stupcu nađe se razlika dvaju najmanjih brojeva Δ_i i Δ_j. Zapišu se ti brojevi desno od ponuda i ispod potražnji. Tako je za prvi redak razlika $4 - 1 = 3$, za drugi redak $6 - 5 = 1$, za prvi stupac $6 - 5 = 1$ i tako redom; od dobivenih brojeva $\{\Delta_i, \Delta_j\}$ nađe se najveći tj. $\max\{3,1,2,2,1,4,1,2,2\} = 4$.

Najveća razlika je za drugi stupac. U tom stupcu odredi se polje s najmanjom cijenom. To je polje (3,2), i tu se stavi maksimalno mogući teret. To je $\min\{24,29\} = 24$. Tako se zadovolji potražnja drugog stupca (tablica 5.6).

Tablica 5.6

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1	4	13	36	3
I_2	7	8	14	6	5	23	1
I_3	15	4 24	2	7	9	5	5
I_4	6	11	5	16	3	12	2
b_j	13		15	21	27		
Δ_j	1	-	1	2	2		

U sljedećem koraku ponovno se traži razlika jediničnih cijena u svakom retku i stupcu, osim u drugom stupcu koji je riješen (zbog toga je osjenčen). Razlike Δ_i i Δ_j su napisane desno i dolje u tablici 5.6. Najveća razlika je u trećem retku 5, polje s najmanjom cijenom je (3,3) i na to se polje stavi maksimalno mogući teret

$$\min\{15, 29 - 24 = 5\} = 5$$

Tako je potpuno iscrpljena ponuda trećeg retka. U tablici 5.7 su dvije bazične varijable, odnosno riješen je drugi stupac u prvom koraku i treći redak u drugom koraku.

Tablica 5.7

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1	4	13	36	3
I_2	7	8	14	6	5	23	1
I_3	15	4 (24)	2 (5)	7	9		-
I_4	6	11	5	16	3	12	2
b_j	13		10	21	27		
Δ_j	1	-	4	2	2		

U tablici 5.7 ponovno se nađu razlike za svaki redak i stupac koji nisu potpuno iscrpljeni. Najveća razlika je u trećem stupcu, 4, a polje s najmanjom cijenom je (1,3). Tu se stavi maksimalno mogući teret:

$$\min\{36, 15-5\} = 10$$

Na tom koraku je potpuno zadovoljena potražnja trećeg stupca (tablica 5.8).

Tablica 5.8

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1 (10)	4	13	26	1
I_2	7	8	14	6	5	23	1
I_3	15	4 (24)	2 (5)	7	9		-
I_4	6	11	5	16	3	12	3
b_j	13			21	27		
Δ_j	1	-	-	2	2		

Nove razlike redaka su $\Delta_i = \{1, 1, -, 3\}$ a stupaca $\Delta_j = \{1, -, -, 2, 2\}$. Najveća razlika je za četvrti redak 3, a najmanja jedinična cijena je za polje (4,5). Tu se stavi maksimalno moguć teret min $\{12, 27\}$ = 12 i tako je iscrpljena ponuda četvrtog retka (tablica 5.9).

Tablica 5.9

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1 10	4	13	26	1
I_2	7	8	14	6	5	23	1
I_3	15	4 24	2 5	7	9		-
I_4	6	11	5	16	3 12		-
b_j	13			21	15		
Δ_j	2	-	-	2	8		

U tablici 5.9 najveća je razlika u petom stupcu, a polje s najnižom jediničnom cijenom je polje (2,5). Tu se stavlja maksimalni mogući teret 15. Tako je riješen peti stupac, zadovoljena potražnja (tablica 5.10).

Tablica 5.10

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i
I_1	5	12	1 10	4	13	26	1
I_2	7	8	14	6	5 15	8	1
I_3	15	4 24	2 5	7	9		-
I_4	6	11	5	16	3 12		-
b_j	13			21			
Δ_j	2	-	-	2	-		

Razlike jediničnih cijena u tablici 5.10 za prvi i četvrti stupac su jednake 2. Uzima se polje (1,4) s najnižom cijenom i tu stavlja maksimalni teret 21 te tako riješi četvrti stupac (tablica 5.11).

Tablica 5.11

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5	12	1 (10)	4 (21)	13	5
I_2	7	8	14	6	5 (15)	8
I_3	15	4 (24)	2 (5)	7	9	
I_4	6	11	5	16	3 (12)	
b_j	13					

Od prve ponude ostalo je još 5 jedinica a od druge 8. Na polje (1,1) stavi se 5 a na polje (2,1) 8. Tako se dobije početno bazično rješenje u tablici 5.12.

Tablica 5.12

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 (5)	12	1 (10)	4 (21)	13	36
I_2	7 (8)	8	14	6	5 (15)	23
I_3	15	4 (24)	2 (5)	7	9	29
I_4	6	11	5	16	3 (12)	12
b_j	13	24	15	21	27	

Troškovi transporta su T = 392. Vidi se da je ukupni trošak transporta za dobiveno početno bazično rješenje u tablici 5.12 manji od troškova koji su dobiveni pomoću prethodne dvije metode.

Općenito, početno rješenje dobiveno pomoću VAM metode je najbliže optimalnom rješenju.

Ovdje je svaki korak VAM metode prikazan, zbog postupnosti, posebnom tablicom. Praktično bi početno bazično rješenje bilo određeno VAM metodom kao u tablici 5.13.

Tablica 5.13

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i	Δ_i					
I_1	5 5	12	1 10	4 21	13	36	3	3	3	1	1	1
I_2	7 8	8	14	6	5 15	23	1	1	1	1	1	1
I_3	15	4 24	2 5	7	9	29	2	5	-	-	-	-
I_4	6	11	5	16	3 12	12	2	2	2	3	-	-
b_j	13	24	15	21	27							
	1	4	1	2	2							
	1	-	1	2	2							
	1	-	4	2	2							
Δ_j	1	-	-	2	2							
	2	-	-	2	8							
	2	-	-	2	-							

Broj dostava, baznih varijabli ($x_{ij} > 0$) jednak je $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$, znači transportni problem ne degenerira.

5.3 Metode određivanja optimalnog rješenja transportnog problema

Sve metode rješavanja transportnog problema provjeravaju prvo je li početno bazično rješenje optimalno ili nije. Ukoliko početno bazično rješenje nije optimalno, svakom od metoda se pokazuje kako se prelazi na bolje bazično rješenje, to jest na bazično rješenje koje osigurava smanjenje ukupnih troškova transporta.

5.3.1 Metoda raspodjele

Metoda raspodjele (engleski: Distribution Method) nastala je u SAD-u krajem 40-ih godina prošlog stoljeća i sa svojim modifikacijama jedna je od najjednostavnijih metoda za ručno rješavanje transportnog problema.

Da bi se pokazala ova metodu uzet će se primjer iz točke 5.2.1 gdje je dijagonalnom metodom određeno početno bazično rješenje. Dobiveno početno bazično rješenje u tablici 5.2 je nedegenerirano rješenje i ima $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ pozitivnih varijabli.

Ukupni troškovi transporta po ovom početnom bazičnom rješenju jednaki su $T_0 = 870$ novčanih jedinica.

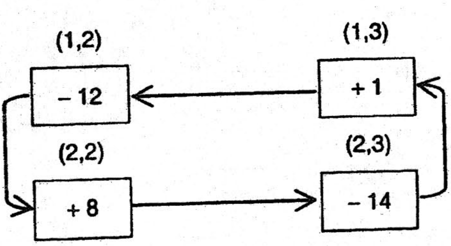
Da bi se provjerilo je li dobiveni bazični plan optimalan, potrebno je za svako polje tablice, u kojem nema tereta ($x_{ij} = 0$), formirati tzv. lanac.

Uzima se tablica 5.2 kao početna tablica 5.14.

Tablica 5.14

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 13	12 23	1 – 17	4 – 6	13 1	36
I_2	7 6	8 1	14 15	6 7	5 – 3	23
I_3	15 13	4 –5	2 – 13	7 14	9 15	29
I_4	6 10	11 8	5 – 4	16 15	3 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

U tablici 5.14 polje (1,3) nema tereta, tj. $x_{13} = 0$. Želi se odrediti lanac po sljedećoj logici. Ako se na polje (1,3) stavi jedinica tereta, treba platiti $c_{13} = 1$ novčanih jedinica. Da bi se sačuvala ravnoteža između ponude i potražnje mora se u prvom retku oduzeti jedinicu tereta ili od $x_{11} = 13$ ili od $x_{12} = 23$. Ako se oduzme od $x_{11} = 13$, tada se u tom stupcu nema gdje dodati jedinicu tereta. U drugom stupcu su dvije bazične varijable, pa će se u polju (1,2) oduzeti jedinica tereta a na polje (2,2) dodati. Da se ne poremeti ponuda $a_2 = 23$, na polje (2,3) oduzme se jedinica tereta. Za polje (1,3) lanac je oblika



Ispod jediničnih troškova u polju (1,3) stavlja se predznak + (plus), a ispred sljedeće cijene u lancu (kreće se u proizvoljnu stranu lanca od početnog polja) predznak – (minus), zatim + itd. Slijedi se logika da se u svakom retku i svakom stupcu lanca doda i oduzme jedinični teret. Tako se neće poremetiti ravnoteža ponude i potražnje. Sve jedinične cijene u lijevom gornjem kutu polja jednog lanca se zbrajaju uzimajući u obzir i stavljene predznake. Dobiveni zbroj se naziva *karakteristikom lanca*. Nju će se pisati u polje za koje je lanac formiran. Karakteristika lanca za polje (1,3) je jednaka

$$k_{13} = c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23} = 1 - 12 + 8 - 14 = - 17$$

Sada se uviđa što znači lanac. On pokazuje polja u kojima se mora izvršiti izmjena baznih varijabli (dostava) ako se preko polja koje nije bilo u baznom rješenju uvede dostava od ishodišta do određenog odredišta.

Razmotrit će se dalje kakav utjecaj na transportne troškove imaju izmjene u dostavama. Neka je, na primjer, uvedena jedinica robe za prijevoz u polje (1,3). Ukupna cijena se poveća za jednu novčanu jedinicu (jer je $c_{13} = 1$), ona se poveća još za 8 jer se dodaje jedinica robe u polje (2,2), ali se i smanjuje za 12 i 14 novčanih jedinica robe u poljima (1,2) i (2,3). Prema tome, promjena cijene iznosi $1 - 14 + 8 - 12 = -17$.

Broj -17 je, dakle, karakteristika lanca za polje (1,3) i pokazuje koliko se novčanih jedinica uštedi ako se uvede jedinična dostava u polje (1,3).

Očigledan zaključak:

Pojava najmanje jedne negativne karakteristike pokazuje da bazični plan nije optimalan.

Da bi se odabralo polje koje najviše smanjuje troškove transporta, treba izračunati karakteristike lanaca za polja gdje nisu bazične varijable. Tako su nezaokruženi brojevi u tablici 5.14 dobiveni na sljedeći način:

$k_{13} = 1 - 12 + 8 - 14 = -17$

$k_{14} = 4 - 12 + 8 - 6 = -6$

$k_{15} = 13 - 12 + 8 - 6 + 7 - 9 = 1$ - lanac nacrtan u tablici 5.14

$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$

$k_{25} = 5 - 6 + 7 - 9 = -3$

$k_{31} = 15 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 13$

$k_{32} = 4 - 7 + 6 - 8 = -5$

$k_{33} = 2 - 7 + 6 - 14 = -13$

$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 10$

$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 = 8$

$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 6 - 14 = -4$

$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$

U tablici 5.14 je ukupno šest negativnih karakteristika lanca za polja gdje nema kružića. Polje (1,3) ima najmanju od negativnih karakteristika (-17). To znači da promjene po lancu polja (1,3) najviše umanjuju ukupne transportne troškove po jedinici tereta. Zato će se u polje (1,3) staviti najveći mogući teret; jednak najmanjoj od dostava u poljima s negativnim jediničnim cijenama u lancu. U ovom slučaju u poljima (1,2) i (2,3) može se oduzeti $\min\{15, 23\} = 15$ jedinica robe te istu količinu dodati u poljima (1,3) i (2,2). Na taj način dobiva se novi bazični plan transporta (tablica 5.15).

Tablica 5.15

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 13	12 8	1 15	4 −6	13 1	36
I_2	7 6	8 16	14 17	6 7	5 −3	23
I_3	15 13	4 −5	2 4	7 14	9 15	29
I_4	6 10	11 8	5 13	16 15	3 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

Za bazični plan u tablici 5.15 ukupni transportni troškovi su T_1 = 615 novčanih jedinica, a T_0 bilo je 870 novčanih jedinica.

Dobiven je u tablici 5.15 bolji plan transporta, s manjim ukupnim troškovima, odnosno sada su smanjeni troškovi transporta za 870 – 615 = 255 novčanih jedinica, što je isto $17 \cdot 15 = 255$.

Kao što je uočeno lanac predstavlja zatvoreni poligon u čijem je jednom vrhu jedinična cijena polja za koji se lanac formira, dok su u ostalim vrhovima poligona cijene polja (i,j) gdje je $x_{ij} > 0$. Broj vrhova svakog lanca je paran i najmanje jednak 4, a najviše m + n. Za svako polje tablice bez tereta može se formirati samo jedan lanac.

Ponavlja se isti postupak provjere optimalnosti bazičnog plana. Računaju se karakteristike lanaca, što je upisano u tablici 5.15 u polja gdje nema dostava:

$$k_{14} = 4 - 12 + 8 - 6 = -6$$

$$k_{15} = 13 - 12 + 8 - 6 + 7 - 9 = 1$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$$

$$k_{23} = 14 - 1 + 12 - 8 = 17$$

$$k_{25} = 5 - 6 + 7 - 9 = -3$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 13$$

$$k_{32} = 4 - 7 + 6 - 8 = -5$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 6 - 8 + 12 - 1 = 4$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 10$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 = 8$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 1 = 13$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

U tablici 5.15 su tri polja s negativnim karakteristikama lanca; na polju (1,4) najmanji je negativni broj. Teret se oduzima s polja (1,2) i (2,4) odnosno traži se minimum $\min\{8,7\} = 7$ i taj se teret doda poljima (1,4) i (2,2) (tablica 5.16).

Tablica 5.16

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 13	12 1	1 15	4 7	13 7	36
I_2	7 6	8 23	14 17	6 6	5 3	23
I_3	15 7	4 – 11	2 – 2	7 14	9 15	29
I_4	6 4	11 2	5 7	16 15	3 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

Ukupni troškovi za bazični plan u tablici 5.16, nakon druge iteracije $T_2 = 573$, kao što se vidi $T_2 = 573 < T_1 = 615 < T_0 = 870$, smanjenje je $42 = 6 \cdot 7$ novčanih jedinica. Ne može se znati da li je bazično rješenje u tablici 5.16 optimalno dok se ne izračunaju karakteristike lanaca. Izračunate karakteristike lanaca napisane su u tablici 5.16 u polja bez dostava:

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 9 = 7$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$$

$$k_{23} = 14 - 1 + 12 - 8 = 17$$

$$k_{25} = 5 - 8 + 12 - 4 + 7 - 9 = 3$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{32} = 4 - 7 + 4 - 12 = -11$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 4 - 5 = 4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 4 - 12 = 2$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 4 - 1 = 7$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

U tablici 5.16 su dvije negativne karakteristike lanaca; bazični plan nije optimalan. Plan transporta će se poboljšati ako se na polje (3,2) stavi maksimalni mogući teret, a to je $\min\{14, 1\} = 1$. Teret se oduzima na polju (3,4) i (1,2) a dodaje poljima (1,4) i (3,2). Novi bazični plan prikazan je u tablici 5.17.

Tablica 5.17

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 13	12 11	1 15	4 8	13 7	36
I_2	7 −5	8 23	14 6	6 −5	5 −8	23
I_3	15 7	4 1	2 −2	7 13	9 15	29
I_4	6 4	11 13	5 7	16 15	3 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

U trećoj iteraciji trošak je $T_3 = 573 - 1 \cdot 11 = 562$ novčanih jedinica. Da se provjeri optimalnost, računaju se karakteristike lanaca:

$$k_{12} = 12 - 4 + 7 - 4 = 11$$

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 9 = 7$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 4 - 7 + 4 - 5 = -5$$

$$k_{23} = 14 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = 6$$

$$k_{24} = 6 - 8 + 4 - 7 = -5$$

$$k_{25} = 5 - 8 + 4 - 9 = -8$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 4 - 5 = 4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 4 = 13$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 4 - 1 = 7$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

Postoje četiri negativne karakteristike; plan transporta nije optimalan. Ukupni troškovi transporta će se smanjiti ako se u polje (2,5) stavi maksimalni teret, tj. $x_{25} = \min\{23, 15\} = 15$. Novo bazični plan je u tablici 5.18.

Tablica 5.18

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 13	12 11	1 15	4 8	13 15	36
I_2	7 −5	8 8	14 6	6 −5	5 15	23
I_3	15 7	4 16	2 −2	7 13	9 8	29
I_4	6 −4	11 5	5 −1	16 7	3 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

Kod četvrte iteracije troškovi su $T_4 = 562 - 8 \cdot 15 = 442$ novčanih jedinica. Ponavlja se postupak računanja karakteristika lanaca:

$$k_{12} = 12 - 4 + 7 - 4 = 11$$

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 4 + 8 - 5 = 15$$

$$k_{21} = 7 - 5 + 4 - 7 + 4 - 8 = -5$$

$$k_{23} = 14 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = 6$$

$$k_{24} = 6 - 7 + 4 - 8 = -5$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{35} = 9 - 5 + 8 - 4 = 8$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 + 4 - 5 = -4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 5 - 8 = 5$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = -1$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 = 7$$

Transportni plan u tablici 5.18 nije optimalan jer postoji pet negativnih karakteristika lanaca. Polja (2,1) i (2,4) imaju najmanje karakteristike. Na polje (2,1) stavit će se maksimalno mogući teret tj. $x_{21} = \min\{13, 13, 8\} = 8$. Novi bazični transportni plan prikazan je u tablici 5.19.

Tablica 5.19

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 / 5	12 / 11	1 / 15	4 / 16	13 / 10	36
I_2	7 / 8	8 / 5	14 / 11	6 / 0	5 / 15	23
I_3	15 / 7	4 / 24	2 / −2	7 / 5	9 / 3	29
I_4	6 / 1	11 / 9	5 / 4	16 / 12	3 / 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

$T_5 = 442 - 5 \cdot 8 = 442 - 40 = 402$ novčanih jedinica.

Karakteristike lanaca će omogućiti da se zaključi je li nakon pete iteracije transportni plan optimalan ili nije. Računaju se karakteristike lanaca i upisuju u tablicu 5.19:

$$k_{12} = 12 - 4 + 7 - 4 = 11$$

$$k_{15} = 13 - 5 + 7 - 5 = 10$$

$$k_{22} = 8 - 7 + 5 - 4 + 7 - 4 = 5$$

$$k_{23} = 14 - 7 + 5 - 1 = 11$$

$$k_{24} = 6 - 7 + 5 - 4 = 0$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{35} = 9 - 7 + 4 - 5 + 7 - 5 = 3$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 5 - 7 = 1$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 + 7 - 4 = 9$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 = 4$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 = 12$$

Kako je u polju (3,3) karakteristika lanca k_{33} negativna, transportni plan u tablici 5.19 nije optimalan. Troškovi transporta će se smanjiti ako se na polje (3,3) stavi najveći mogući teret, u ovom slučaju $x_{33} = \min\{5, 15\} = 5$. Novo bazično rješenje je prikazano u tablici 5.20.

Tablica 5.20

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 / 5	12 / 9	1 / 10	4 / 21	13 / 10	36
I_2	7 / 8	8 / 3	14 / 11	6 / 0	5 / 15	23
I_3	15 / 9	4 / 24	2 / 5	7 / 2	9 / 5	29
I_4	6 / 1	11 / 8	5 / 4	16 / 12	3 / 12	12
b_j	13	24	15	21	27	

Za plan transporta u tablici 5.20 ukupni su transportni troškovi $T_6 = 402 - 2 \cdot 5 = 392$ novčanih jedinica.

Ponavlja se postupak računanja karakteristika lanca za šestu iteraciju, tj. za plan transporta u tablici 5.20:

$$k_{12} = 12 - 4 + 2 - 1 = 9$$

$$k_{15} = 13 - 5 + 7 - 5 = 10$$

$$k_{22} = 8 - 7 + 5 - 1 + 2 - 4 = 3$$

$$k_{23} = 14 - 1 + 5 - 7 = 11$$

$$k_{24} = 6 - 7 + 5 - 4 = 0$$

$$k_{31} = 15 - 2 + 1 - 5 = 9$$

$$k_{34} = 7 - 4 + 1 - 2 = 2$$

$$k_{35} = 9 - 5 + 7 - 5 + 1 - 2 = 5$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 5 - 7 = 1$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 + 2 - 4 = 8$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 = 4$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 = 12$$

Kako u tablici 5.20 nema negativnih karakteristika, optimalan je transportni plan:

$x^{\bullet}_{11} = 5$ $\quad x^{\bullet}_{13} = 10$ $\quad x^{\bullet}_{14} = 21$

$x^{\bullet}_{21} = 8$ $\quad x^{\bullet}_{25} = 15$

$x^{\bullet}_{32} = 24$ $\quad x^{\bullet}_{33} = 5$

$x^{\bullet}_{45} = 12$

s ukupnim transportnim troškovima T = 392 novčane jedinice.

Do optimalnog rješenja došlo se nakon šest iteracija. Uzet je početni bazični plan transporta dobiven dijagonalnom metodom iz tablice 5.2.

Da je početni bazični plan uzet iz tablice 5.13, gdje je on nađen VAM metodom, vidi se da je to odmah optimalni plan transporta s ukupnim troškovima $T_0 = 392$. *Općenito, VAM metoda određivanja početnog bazičnog plana je bliža optimalnom rješenju i nju treba koristiti pri ručnom rješavanju transportnog problema*. Elektronički programi obično početno bazično rješenje određuju dijagonalnom metodom.

U tablici 5.20, polje (2,4) ima karakteristiku lanca nula. Ako se na to polje stavi $x_{24} = \min\{21, 8\} = 8$, dobiva se plan transporta prikazan u tablici 5.21. Taj plan transporta ima iste ukupne troškove transporta 392. Planovi u tablici 5.20 i 5.21 su oba optimalna s istom vrijednošću funkcije cilja $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 392$ novčane jedinice.

Tablica 5.21

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 (13)	12	1 (10)	4 (13)	13	36
I_2	7	8	14	6 (8)	5 (15)	23
I_3	15	4 (24)	2 (5)	7	9	29
I_4	6	11	5	16	3 (12)	12
b_j	13	24	15	21	27	

Ako se početno bazično rješenje odredi metodom najmanje cijene, onda je treće bazično rješenje optimalno rješenje (što zainteresirani čitalac može provjeriti).

(Ova stranica je ostavljena prazna)