



Sveska sa vježbi iz predmeta Operaciona istraživanja

Sedmica broj 1

Problemi transporta i distribucije	3
• Formulacija transportnog problema	3
• Metode održivanja bazičnog rješenja transportnog problema	6
• Dijagonalna metoda (metoda sjeverozapadnog ugla)	7
• Metoda najmanje jedinične cijena	9
• Slučaj degenetacije	10
• VAM metoda (Vogelova metoda)	11
• Metode održivanja optimalnog rješenja transportnog problema	16
• Metoda raspodjele	16

Sedmica broj 2

Problemi transporta i distribucije	
• Metode održivanja optimalnog rješenja transportnog problema	
• Metoda koeficijentata ili modificirana metoda distribucije	27
• Različite modifikacije transportnog problema	36
• Otvoreni model transporta	36

Sedmica broj 3

Problemi transporta i distribucije	
• Različite modifikacije transportnog problema	
• Minimizacija vremena transporta	43

Zadaci za vježbu	51
------------------	----

Sedmica broj 4

Problemi transporta i distribucije	
• Različite modifikacije transportnog problema	
• Metoda raspoređivanja	63

Sedmica broj 5

Cjelobrojno programiranje	81
• Metoda odsječaka (Gomoriјеva metoda)	85

Sedmica broj 6

Cjelobrojno programiranje	
• Metoda grananja i ograničavanja	103

Sedmica broj 7

Teorija igara	
• Opšti pojmovi i definicije iz domena matricnih igara	117
• Rješavanje prostih matricnih igara	119

Sedmica broj 8 i 9

Teorija igara	
• Rješavanje mješovitih matricnih igara	129
• Rješavanje matricnih igara 2×2	130
• Rješavanje matricnih igara $n \times 2$	136
• Rješavanje matricnih igara $2 \times m$	142

Sedmica broj 10

Teorija igara	
• Rješavanje matricnih igara redukcijom matrice cijena igra	149

Sedmica broj 11

Teorija igara	
• Rješavanje matricnih igara $n \times m$ primjenom linearnog programiranja	161

Sedmica broj 12

Mrežno planiranje	181
• Uvod	181
• Analiza strukture	181

Sedmica broj 13

Mrežno planiranje	
• Analiza vremena i troškova (Metoda kritičnog puta)	191

Sedmica broj 14

Mrežno planiranje	
• Analiza vremena i troškova (Pert metoda)	205

Sedmica broj 15

Mrežno planiranje	
• Raspodjela resursa	219

Dodatak A

Numeričko rješavanje linearnog problema	237
• Simpleks metoda	237

Dodatak B

Dva ispitna roka	255
-------------------------	------------

5. PROBLEMI TRANSPORTA I DISTRIBUCIJE

Posljednje desetljeće znanost posvećuje sve veću pažnju pitanjima organizacije i planiranja, posebno u domeni prometa i transporta, jer su pitanja racionalizacije u ovoj gospodarskoj grani postala vrlo složena.

Posebni slučaj općeg problema linearnog programiranja je tzv. *transportni problem*. Još prije pojave radova iz linearnog programiranja, neke specijalne slučajeve transportnog problema izučavali su ekonomisti [9]. Prvu strogu postavku transportnog problema dao je Hitchcock [5] 1941. godine, pa se zato transportni problem često naziva i "problem Hičkoka".

Hitchcock je formuirao transportni problem na sljedeći način.

Dano je m proizvodnih centara ili skladišta, koji nude određenu robu u količinama a_1, a_2, \dots, a_m i n potrošača koji tu robu potražuju u količinama b_1, b_2, \dots, b_n . Pretpostavlja se da je zbroj ponuda jednak zbroju potražnji: $a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Dani su brojevi c_{ij} koji označavaju cijene prijevoza jedinice robe od i -tog proizvođača do j -tog potrošača. Treba naći takve veličine $x_{ij} \geq 0$, gdje x_{ij} označava količinu tereta koju treba prevesti od i -tog proizvođača do j -tog

potrošača, tako da ukupni troškovi transporta $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ budu minimalni.

Godine 1942. Kantorovič [7] je formuirao opći problem o prenošenju neprekidnih masa. Tek 1951. godine započeo je intenzivni razvoj metoda kojima se mogu rješavati transportni problemi. Dantzig [3] je 1951. godine dao rješenje transportnog problema zasnovano na simpleks metodi. U godinama 1953. - 1955. nastaju nove metode rješavanja transportnog problema, koje poboljšavaju Dantzigovu metodu.

Među tim metodama treba svakako navesti metodu "Stepping stone" (doslovno prevedeno "skakanje s kamena na kamen") Charnesa i Coopera [2] iz 1953. godine.

5.1 Formulacija transportnog problema

Među problemima linearnog programiranja posebno mjesto zauzimaju transportni problemi. Izdvajanje transportnog problema uvedeno je zbog karakteristične postavke njegova matematičkog modela koji omogućava znatna pojednostavljenja u procesu nalaženja optimalnog rješenja.

Transportnim problemom se određuje optimalan plan transporta istovrsne robe ako je poznato:

- broj ishodišta (proizvodni centri, skladišta, lokacije pojedinih resursa i drugo)
- broj odredišta (potrošački centri, gradilišta, prerađivački centri i drugo)
- količine tereta u ishodištima

- količine tereta koje potražuje svako odredište - potrošački centar
- cijena transporta po jedinici tereta od svakog ishodišta do svakog odredišta.

Pod *optimalnim planom* transporta razumijeva se onaj plan transporta robe od ishodišta do odredišta koji ima minimalne ukupne troškove transporta.

Da bi se dobila matematička formulacija transportnog problema uvode se sljedeće pretpostavke i oznake.

Neka je m ishodišta i n odredišta. Ishodišta se označe sa I_1, I_2, \dots, I_m , a odredišta s O_1, O_2, \dots, O_n . Količina tereta (istovrsnog tereta) u ishodištima, *ponuda*, obilježi se s a_1, a_2, \dots, a_m a *potražnja* u odredištima s b_1, b_2, \dots, b_n . Ako te veličine, koje mogu biti izražene u tonama, komadima, vagonima, satima i dr., zadovoljavaju jednakost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (5.1)$$

tada se transportni problem naziva *zatvorenim*. Ako je, pak, ispunjeno

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{ili} \quad \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

tada se transportni problem naziva *otvorenim*.

Označi se, dalje, s c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ cijena transporta jedinice tereta od i -tog ishodišta do j -tog odredišta, a s x_{ij} - količina tereta koju treba prevesti iz i -tog ishodišta u j -to odredište. Svi se ti podatci mogu pregledno dati u tablici, (tablica 5.1).

Tablica 5.1

		ODREDIŠTA				PONUDA a_i
		O_1	O_2	...	O_n	
ISHODIŠTA	I_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
	I_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2

	I_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
POTRAŽNJA b_j		b_1	b_2		b_n	

Obično se u lijevom gornjem kutu polja tablice 5.1 unose jedinične cijene transporta c_{ij} , a u desnom donjem kutu polja količine transporta x_{ij} .

Za zatvoreni model transportnog problema veličine x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ čine dopustivi ili mogući plan transporta ako zadovoljavaju sljedeća ograničenja:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

Teorem 5.1

Uvjet $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ je nužan i dovoljan uvjet da bi sustav jednadžbi (5.2),

(5.3) bio suglasan.

Dokaz:

Zaista, ako je sustav jednadžbi (5.2), (5.3) suglasan, onda je

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{to jest, uvjet (5.1) je nužan uvjet}$$

suglasnosti. Da bi se dokazalo da je taj uvjet i dovoljan za suglasnost sustava jednadžbi (5.2), (5.3), treba dokazati da su vrijednosti varijabli

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^m a_i} \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n$$

rješenja sustava jednadžbi (5.2), (5.3).

Zaista, ako se ta vrijednost za x_{ij} uvrsti u jednadžbu:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

dobiva se

$$\frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{\sum_{i=1}^m a_i} = a_i$$

odakle se zbog uvjeta (5.1) dobiva $a_i = a_i$. Analogno

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^m a_i b_j}{\sum_{i=1}^m a_i} = b_j \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{i=1}^m a_i} = b_j$$

Time je dokazano da je uvjet (5.1) i dovoljan uvjet za suglasnost sustava jednadžbi (5.2), (5.3).

Zbog uvjeta (5.1), jednadžbe (5.2) i (5.3), kojih ima $m + n$, nisu nezavisne. Zaista, zbrajajući jednadžbe (5.2), a zatim jednadžbe (5.3), dobiva se isti rezultat zbog uvjeta (5.1), što znači da je broj linearno nezavisnih veza jednak najviše $m + n - 1$. Može se pokazati da je rang matrice sustava jednadžbi (5.2), (5.3) jednak $r = m + n - 1$, odakle slijedi da se $m + n - 1$ bazičnih varijabli mogu izraziti pomoću ostalih nebazičnih varijabli (slobodnih varijabli). Nebazičnih varijabli ima

$$K = m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$$

Dopustivo (moguće) rješenje naziva se *bazičnim* ako u njemu broj pozitivnih veličina x_{ij} nije veći od $r = m + n - 1$, dok su ostale varijable x_{ij} u bazičnom rješenju jednake nuli. To znači da u svakom bazičnom planu nema više od $r = m + n - 1$ prevoženja.

Bazično rješenje naziva se *optimalnim* ako daje minimalne ukupne troškove transporta, to jest ako daje minimalnu vrijednost funkcije

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.5)$$

Zatvoreni model transportnog problema je najjednostavniji slučaj transportnog problema linearnog programiranja. Zbog toga će se razmotriti najprije metode rješavanja zatvorenog modela transportnog problema.

5.2 Metode određivanja bazičnog rješenja transportnog problema

Rješavanje transportnog problema, kao i svakoga drugog problema linearnog programiranja, počinje određivanjem početnog bazičnog rješenja (početnog plana). To predstavlja prvu etapu u rješavanju transportnog problema. Ako u toj prvoj etapi nije dobiveno optimalno rješenje, prelazi se na drugu etapu, to jest na etapu gdje se nizom iteracija prelazi s početnog bazičnoga rješenja na bazična rješenja koja su sve bliže optimalnom rješenju.

Postoji više metoda za određivanje početnoga bazičnog rješenja. Jedna od prvih metoda nalaženja početnoga bazičnog rješenja je "*dijagonalna metoda*" ili "*metoda sjeverozapadnoga kuta*" (North-West Corner Rule). Druge metode, koje

su kasnije pronađene, imale su za cilj da se dođe do početnoga bazičnog rješenja, koje će biti bliže optimalnom rješenju. Međutim, pri korištenju računala važnija je jednostavnost odgovarajućeg programa za računalo, nego broj iteracija kojima se dolazi do optimalnog rješenja. Zbog toga se, pri korištenju računala, najčešće koriste najjednostavnije metode određivanja početnoga bazičnog plana. Osim dijagonalne metode razmatrat će se još dvije metode za određivanje početnoga bazičnog plana koje pri ručnom rješavanju transportnog problema skraćuju postupak.

5.2.1 Dijagonalna metoda (metoda sjeverozapadnoga kuta)

Najjednostavnije će se objasniti ova metoda na konkretnom primjeru. U tablici 5.2 dane su količine tereta koje treba prevesti iz ishodišta (I_i), količine tereta koje se potražuju u odredištima (O_j), kao i cijene transporta od svakog ishodišta do svakog odredišta. Svako polje tablice 5.2 označivat će se s (i,j) , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. U lijevom gornjem kutu svakoga takvog polja (i,j) tablice 5.2 upisana je jedinična cijena c_{ij} . U desnom donjem kutu svakog polja (i,j) u tablici upisana je vrijednost varijable x_{ij} , to jest upisana je količina tereta koju treba prevesti iz i -tog ishodišta u j -to odredište. U ovom primjeru dan je transportni problem s $m = 4$ ishodišta i $n = 5$ odredišta.

Tablica 5.2

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5 (13)	12 (23)	1	4	13	36
I_2	7	8 (1)	14 (15)	6 (7)	5	23
I_3	15	4	2	7 (14)	9 (15)	29
I_4	6	11	5	16	3 (12)	12
b_j	13	24	15	21	27	100

Ukupna količina tereta u ishodištima (ponuda) je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36 + 23 + 29 + 12 = 100$; jednaka je ukupnoj količini tereta koji se potražuju u potrošačkim centrima $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 13 + 24 + 15 + 21 + 27 = 100$.

Prema dijagonalnoj metodi, prvo se određuje vrijednost varijable x_{11} na sljedeći način:

$$x_{11} = \min \{a_1, b_1\} = \min \{36, 13\} = 13$$

Kao što se vidi, prvo ishodište može isporučiti 36 jedinica tereta, a prvo odredište traži 13 jedinica tereta. Uzimajući za $x_{11} = 13$ potražnja prvog odredišta u potpunosti je zadovoljena; ta se vrijednost za x_{11} upisuje u desnom donjem kutu polja $(1,1)$.

Ishodište I_1 može isporučiti još $36 - 13 = 23$ jedinice tereta preostalim odredištima. Odredištu O_2 daje se najviše što je moguće, to jest veličina x_{12} određuje se prema:

$$x_{12} = \min \{36 - 13, 24\} = 23$$

Na taj način je teret (ponuda) prvog ishodišta iscrpljen, pa su veličine x_{13}, x_{14} i x_{15} jednake nuli. Iz praktičkih razloga njih se ne upisuje u tablicu.

Prvo odredište je zadovoljeno, a drugom odredištu dopunit će se jedna jedinica tereta iz drugog ishodišta. Varijable x_{2j} ($j = 1, 2, \dots, 5$), u drugom retku određuju se na sljedeći način:

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = \min \{23, 24 - 23\} = \min \{23, 1\} = 1$$

$$x_{23} = \min \{23 - 1, 15\} = 15$$

$$x_{24} = \min \{23 - 1 - 15, 21\} = \min \{7, 21\} = 7$$

$$x_{25} = 0$$

Dalje je

$$x_{31} = 0, \quad x_{32} = 0, \quad x_{33} = 0$$

$$x_{34} = \min \{29, 21 - 7\} = \min \{29, 14\} = 14$$

$$x_{35} = \min \{29 - 14, 27\} = \min \{15, 27\} = 15$$

i

$$x_{41} = 0, \quad x_{42} = 0, \quad x_{43} = 0, \quad x_{44} = 0$$

$$x_{45} = \min \{12, 27 - 15\} = \min \{12, 12\} = 12$$

Bazične varijable raspoređene su na ovaj način uzduž "dijagonale" tablice pa je otuda i potekao naziv metode. No, isto tako, taj pravac podsjeća na pravac sjeverozapad, pa se metoda naziva i metoda sjeverozapadnoga kuta ili kornera. Karakteristično je da popunjavanje tablice uvijek počinje od polja $(1,1)$, a završava se u polju (m,n) .

Da bi se vizualno istakla polja u kojima su na taj način dobijene bazične

varijable, zaokruže se veličine $x_{ij} > 0$ u tim poljima. Kao što se vidi, postoji $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ kružića, to jest osam $x_{ij} > 0$, dok su preostale varijable $m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1) \cdot (n - 1) = 3 \cdot 4 = 12$ jednake nuli.

Ukupni troškovi prijevoza prema tom prvom bazičnom planu iznose:

$$T_0 = 5 \cdot 13 + 12 \cdot 23 + 8 \cdot 1 + 14 \cdot 15 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 3 \cdot 12 = 870 \text{ n.j.}$$

(n.j. - novčanih jedinica)

5.2.2 Metoda najmanje jedinične cijene

Prilikom sastavljanja početnoga bazičnog rješenja dijagonalnom metodom, ne uzimaju se uopće u obzir jedinične cijene transporta, pa je dobiveno bazično rješenje dosta udaljeno od optimalnog. Intuitivno je jasno da biranje bazičnih varijabli u poljima gdje su cijene transporta manje, daje manju vrijednost funkciji cilja nego što se dobije dijagonalnom metodom. Za prvu bazičnu varijablu uzima se najveći mogući teret u polju tablice 5.3 gdje je jedinična cijena transporta najmanja (u tablici 5.3 su isti podaci kao u tablici 5.2).

Tablica 5.3

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5	12	1	4	13	36
I_2	7	8	14	6	5	23
I_3	15	4	2	7	9	29
I_4	6	11	5	16	3	12
b_j	13	24	15	21	27	100
						100

U primjeru koji je dan u tablici 5.3 vidi se da je cijena $c_{13} = 1$, pa se za x_{13} uzima vrijednost

$$x_{13} = \min \{36, 15\} = 15$$

Ta se vrijednost za x_{13} upisuje u donjem desnom kutu polja (1,3) tablice 5.3.

Na taj način potrebe trećeg odredišta su zadovoljene, a drugo ishodište ima na raspolaganju još $36 - 15 = 21$ jedinica tereta.

Sljedeća najmanja cijena je $c_{33} = 2$, ali potrebe trećeg odredišta su zadovoljene i traži se sljedeća najmanja cijena. To je $c_{45} = 3$ te je

$$x_{45} = \min \{12, 27\} = 12$$

Time je iscrpljeno ishodište I_4 .

Naredna najmanja cijena je $c_{14} = 4$ i $c_{32} = 4$. Na polje (1,4) može se staviti teret $x_{14} = 21$; tako je zadovoljena ponuda odredišta O_4 i istovremeno iscrpljeno prvo ishodište. Na polje (3,2) stavi se $x_{32} = \min \{27, 24\} = 24$. Na isti način odredi se da je

$$x_{21} = 8, \quad x_{31} = 5$$

$$x_{25} = \min \{23, 27 - 12\} = \min \{23, 15\} = 15$$

$$x_{21} = \min \{23 - 15, 13\} = \min \{8, 13\} = 8$$

$$x_{31} = \min \{29 - 24, 13 - 8\} = \min \{5, 5\} = 5$$

Dobilo se moguće rješenje, sve ponude su iscrpljene i potražnje zadovoljene.

Ukupni troškovi transporta su

$$T = 1 \cdot 15 + 4 \cdot 21 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 15 \cdot 5 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 12 = 437 \text{ n.j.}$$

Uočava se da su ukupni troškovi transporta manji za plan transporta koji je dobiven metodom najmanje cijene od troškova transporta za plan dobiven dijagonalnom metodom koji je iznosio 870 n.j.

Pri korištenju metode najmanje cijene može se dogoditi da u nekom koraku postoji najmanja cijena na više mjesta. Tada se uzima ono polje u kojem je najmanja cijena i u retku i u stupcu istovremeno. U to polje stavlja se najveći mogući teret.

U tablici 5.3 zaokruženo je 7 brojeva ($x_{ij} > 0$) što je manje od $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$, u ovom slučaju kaže se da *transportni problem degenerira*.

5.2.3 Slučaj degeneracije

Pod degeneracijom bazičnog plana razumijeva se onaj plan u kojega su i neke od bazičnih varijabli jednake nuli, to jest u degeneriranom planu je broj pozitivnih varijabli manji od $m + n - 1$. U tablici 5.3 metodom najmanje cijene dobiveno je svega 7 dostava, umjesto $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. To znači da je jedna bazična varijabla jednaka nuli.

Slučaj degeneracije, gdje su neke od bazičnih varijabli jednake nuli, može se pojaviti i pri prijelazu od početnoga bazičnog plana na bolji bazični plan, bliže optimalnom.

Zbog zahtjeva metoda rješavanja transportnog problema uvijek će biti pogodno da je $m + n - 1$ bazičnih varijabli, makar umjesto neke od njih stajale i nule. Zbog toga je dovoljno sasvim neznatno izmijeniti ponudu i potražnju, tako da se jednakost $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ ne promijeni.

Na odgovarajućim će se mjestima, umjesto nultih dostava najčešće stavljati, veličina ε (epsilon), pa će se tek po nalaženju optimalnog plana uzeti $\varepsilon = 0$. U ovom primjeru (tablica 5.3), početni će se transportni plan malo izmijeniti tako da će se svakoj ponudi dodati ε , a zadnjoj potražnji $m \cdot \varepsilon$, u ovom slučaju $b_5 = 27 + 4\varepsilon$. S tim izmjenama metodom najmanje cijene je bazični plan s $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ dostava (pozitivnih bazičnih varijabli) u tablici 5.4.

Tablica 5.4

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
l ₁	5	12	1	4	13	36 + ε	3
l ₂	7	8	14	6	5	23 + ε	1
l ₃	15	4	2	7	9	29 + ε	2
l ₄	6	11	5	16	3	12 + ε	2
b _j	13	24	15	21	27 + 4ε		

Notes: In the original image, cells (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,5), (3,1), (3,2), and (4,5) are circled. In the table above, these cells are highlighted with a light gray background.

5.2.4 VAM metoda (Vogelova metoda)

Naziv ove metode čine početna slova riječi u nazivu na engleskom jeziku: Vogel's Approximation Method. Ova metoda dobivanja početnog bazičnog plana je najstroženija, ali se njom dobiva plan bliži optimalnom nego što se dobije drugim metodama. Zbog toga se ona preporučuje pri rješavanju transportnog problema većih dimenzija.

Razmotrit će se ova metoda na istom primjeru iz 5.2.1 (tablica 5.5):

Tablica 5.5

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
l ₁	5	12	1	4	13	36	3
l ₂	7	8	14	6	5	23	1
l ₃	15	4	2	7	9	29	2
l ₄	6	11	5	16	3	12	2
b _j	13	24	15	21	27		
Δ _j	1	4	1	2	2		

U svakom retku i stupcu nađe se razlika dvaju najmanjih brojeva Δ_i i Δ_j. Zapišu se ti brojevi desno od ponuda i ispod potražnji. Tako je za prvi redak razlika 4 - 1 = 3, za drugi redak 6 - 5 = 1, za prvi stupac 6 - 5 = 1 i tako redom; od dobivenih brojeva {Δ_i, Δ_j} nađe se najveći tj. max {3, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 2} = 4.

Najveća razlika je za drugi stupac. U tom stupcu odredi se polje s najmanjom cijenom. To je polje (3,2), i tu se stavi maksimalno mogući teret. To je min {24, 29} = 24. Tako se zadovolji potražnja drugog stupca (tablica 5.6).

Tablica 5.6

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
l ₁	5	12	1	4	13	36	3
l ₂	7	8	14	6	5	23	1
l ₃	15	4	2	7	9	5	5
l ₄	6	11	5	16	3	12	2
b _j	13		15	21	27		
Δ _j	1	-	1	2	2		

Notes: In the original image, cells (1,2), (2,2), (3,2), and (3,3) are shaded. In the table above, these cells are highlighted with a light gray background.

U sljedećem koraku ponovno se traži razlika jediničnih cijena u svakom retku i stupcu, osim u drugom stupcu koji je riješen (zbog toga je osjenčen). Razlike Δ_i i Δ_j su napisane desno i dolje u tablici 5.6. Najveća razlika je u trećem retku 5, polje s najmanjom cijenom je (3,3) i na to se polje stavi maksimalno mogući teret

$$\min \{15, 29 - 24 = 5\} = 5$$

Tako je potpuno iscrpljena ponuda trećeg retka. U tablici 5.7 su dvije bazične varijable, odnosno riješen je drugi stupac u prvom koraku i treći redak u drugom koraku.

Tablica 5.7

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
I ₁	5	12	1	4	13	36	3
I ₂	7	8	14	6	5	23	1
I ₃	15	4	2	7	9		-
I ₄	6	11	5	16	3	12	2
b _j	13		10	21	27		
Δ _j	1	-	4	2	2		

U tablici 5.7 ponovno se nađu razlike za svaki redak i stupac koji nisu potpuno iscrpljeni. Najveća razlika je u trećem stupcu, 4, a polje s najmanjom cijenom je (1,3). Tu se stavi maksimalno mogući teret:

$$\min\{36, 15 - 5\} = 10$$

Na tom koraku je potpuno zadovoljena potražnja trećeg stupca (tablica 5.8).

Tablica 5.8

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
I ₁	5	12	10	4	13	26	1
I ₂	7	8	14	6	5	23	1
I ₃	15	4	2	7	9		-
I ₄	6	11	5	16	3	12	3
b _j	13			21	27		
Δ _j	1	-	-	2	2		

Novo razlike redaka su $\Delta_i = \{1, 1, -, 3\}$ a stupaca $\Delta_j = \{1, -, -, 2, 2\}$. Najveća razlika je za četvrti redak 3, a najmanja jedinična cijena je za polje (4,5). Tu se stavi maksimalno mogući teret $\min\{12, 27\} = 12$ i tako je iscrpljena ponuda četvrtog retka (tablica 5.9).

Tablica 5.9

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
I ₁	5	12	10	4	13	26	1
I ₂	7	8	14	6	5	23	1
I ₃	15	4	2	7	9		-
I ₄	6	11	5	16	3		-
b _j	13			21	15		
Δ _j	2	-	-	2	8		

U tablici 5.9 najveća je razlika u petom stupcu, a polje s najnižom jediničnom cijenom je polje (2,5). Tu se stavlja maksimalni mogući teret 15. Tako je riješen peti stupac, zadovoljena potražnja (tablica 5.10).

Tablica 5.10

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i	Δ _i
I ₁	5	12	10	4	13	26	1
I ₂	7	8	14	6	15	8	1
I ₃	15	4	2	7	9		-
I ₄	6	11	5	16	3		-
b _j	13			21			
Δ _j	2	-	-	2	-		

Razlike jediničnih cijena u tablici 5.10 za prvi i četvrti stupac su jednake 2. Uzima se polje (1,4) s najnižom cijenom i tu stavlja maksimalni teret 21 te tako riješi četvrti stupac (tablica 5.11).

Tablica 5.11

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
I ₁	5	12	1	4	13	5
I ₂	7	8	14	6	5	8
I ₃	15	4	2	7	9	
I ₄	6	11	5	16	3	
b _j	13					

Od prve ponude ostalo je još 5 jedinica a od druge 8. Na polje (1,1) stavi se 5 a na polje (2,1) 8. Tako se dobije početno bazično rješenje u tablici 5.12.

Tablica 5.12

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
I ₁	5	12	1	4	13	36
I ₂	7	8	14	6	5	23
I ₃	15	4	2	7	9	29
I ₄	6	11	5	16	3	12
b _j	13	24	15	21	27	

Troškovi transporta su $T = 392$. Vidi se da je ukupni trošak transporta za dobiveno početno bazično rješenje u tablici 5.12 manji od troškova koji su dobiveni pomoću prethodne dvije metode.

Općenito, početno rješenje dobiveno pomoću VAM metode je najbliže optimalnom rješenju.

Ovdje je svaki korak VAM metode prikazan, zbog postupnosti, posebnom tablicom. Praktično bi početno bazično rješenje bilo određeno VAM metodom kao u tablici 5.13.

Tablica 5.13

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i					Δ _i		
I ₁	5	12	1	4	13	36	3	3	3	1	1	1	
I ₂	7	8	14	6	5	23	1	1	1	1	1	1	
I ₃	15	4	2	7	9	29	2	5	-	-	-	-	
I ₄	6	11	5	16	3	12	2	2	2	3	-	-	
b _j	13	24	15	21	27								
	1	4	1	2	2								
	1	-	1	2	2								
	1	-	4	2	2								
Δ _j	1	-	-	2	2								
	2	-	-	2	8								
	2	-	-	2	-								

Broj dostava, bazičnih varijabli ($x_{ij} > 0$) jednak je $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$, znači transportni problem ne degenerira.

5.3 Metode određivanja optimalnog rješenja transportnog problema

Sve metode rješavanja transportnog problema provjeravaju prvo je li početno bazično rješenje optimalno ili nije. Ukoliko početno bazično rješenje nije optimalno, svakom od metoda se pokazuje kako se prelazi na bolje bazično rješenje, to jest na bazično rješenje koje osigurava smanjenje ukupnih troškova transporta.

5.3.1 Metoda raspodjele

Metoda raspodjele (engleski: Distribution Method) nastala je u SAD-u krajem 40-ih godina prošlog stoljeća i sa svojim modifikacijama jedna je od najjednostavnijih metoda za ručno rješavanje transportnog problema.

Da bi se pokazala ova metodu uzet će se primjer iz točke 5.2.1 gdje je dijagonalnom metodom određeno početno bazično rješenje. Dobiveno početno bazično rješenje u tablici 5.2 je nedegenerirano rješenje i ima $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ pozitivnih varijabli.

Ukupni troškovi transporta po ovom početnom bazičnom rješenju jednaki su $T_0 = 870$ novčanih jedinica.

Da bi se provjerilo je li dobiveni bazični plan optimalan, potrebno je za svako

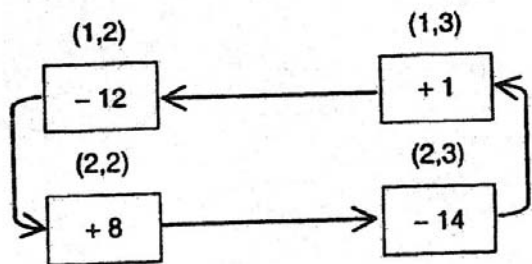
polje tablice, u kojem nema tereta ($x_{ij} = 0$), formirati tzv. lanac.

Uzima se tablica 5.2 kao početna tablica 5.14.

Tablica 5.14

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5	12	1	4	13	36
I_2	7	8	14	6	5	23
I_3	15	4	2	7	9	29
I_4	6	10	11	16	3	12
b_j	13	24	15	21	27	

U tablici 5.14 polje (1,3) nema tereta, tj. $x_{13} = 0$. Želi se odrediti lanac po sljedećoj logici. Ako se na polje (1,3) stavi jedinica tereta, treba platiti $c_{13} = 1$ novčanih jedinica. Da bi se sačuvala ravnoteža između ponude i potražnje mora se u prvom retku oduzeti jedinicu tereta ili od $x_{11} = 13$ ili od $x_{12} = 23$. Ako se oduzme od $x_{11} = 13$, tada se u tom stupcu nema gdje dodati jedinicu tereta. U drugom stupcu su dvije bazične varijable, pa će se u polju (1,2) oduzeti jedinica tereta a na polje (2,2) dodati. Da se ne poremeti ponuda $a_2 = 23$, na polje (2,3) oduzme se jedinica tereta. Za polje (1,3) lanac je oblika



Ispod jediničnih troškova u polju (1,3) stavlja se predznak + (plus), a ispred sljedeće cijene u lancu (kreće se u proizvoljnu stranu lanca od početnog polja) predznak - (minus), zatim + itd. Slijedi se logika da se u svakom retku i svakom stupcu lanca doda i oduzme jedinični teret. Tako se neće poremetiti ravnoteža ponude i potražnje. Sve jedinične cijene u lijevom gornjem kutu polja jednog lanca se zbrajaju uzimajući u obzir i stavljene predznake. Dobiveni zbroj se naziva *karakteristikom lanca*. Nju će se pisati u polje za koje je lanac formiran. Karakteristika lanca za polje (1,3) je jednaka

$$k_{13} = c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23} = 1 - 12 + 8 - 14 = -17$$

Sada se uviđa što znači lanac. On pokazuje polja u kojima se mora izvršiti izmjena bazičnih varijabli (dostava) ako se preko polja koje nije bilo u bazičnom rješenju uvede dostava od ishodišta do određenog odredišta.

Razmotrit će se dalje kakav utjecaj na transportne troškove imaju izmjene u dostavama. Neka je, na primjer, uvedena jedinica robe za prijevoz u polje (1,3). Ukupna cijena se poveća za jednu novčanu jedinicu (jer je $c_{13} = 1$), ona se poveća još za 8 jer se dodaje jedinica robe u polje (2,2), ali se i smanjuje za 12 i 14 novčanih jedinica robe u poljima (1,2) i (2,3). Prema tome, promjena cijene iznosi $1 - 12 + 8 - 14 = -17$.

Broj -17 je, dakle, karakteristika lanca za polje (1,3) i pokazuje koliko se novčanih jedinica uštedi ako se uvede jedinična dostava u polje (1,3).

Očigledan zaključak:

Pojava najmanje jedne negativne karakteristike pokazuje da bazični plan nije optimalan.

Da bi se odabralo polje koje najviše smanjuje troškove transporta, treba izračunati karakteristike lanca za polja gdje nisu bazične varijable. Tako su nezaokruženi brojevi u tablici 5.14 dobiveni na sljedeći način:

$$k_{13} = 1 - 12 + 8 - 14 = -17$$

$$k_{14} = 4 - 12 + 8 - 6 = -6$$

$$k_{15} = 13 - 12 + 8 - 6 + 7 - 9 = 1 - \text{lanac nacrtan u tablici 5.14}$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$$

$$k_{25} = 5 - 6 + 7 - 9 = -3$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 13$$

$$k_{32} = 4 - 7 + 6 - 8 = -5$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 6 - 14 = -13$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 10$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 = 8$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 6 - 14 = -4$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

U tablici 5.14 je ukupno šest negativnih karakteristika lanca za polja gdje nema kružića. Polje (1,3) ima najmanju od negativnih karakteristika (-17). To znači da promjene po lancu polja (1,3) najviše umanjuju ukupne transportne troškove po jedinici tereta. Zato će se u polje (1,3) staviti najveći mogući teret; jednak najmanjoj od dostava u poljima s negativnim jediničnim cijenama u lancu. U ovom slučaju u poljima (1,2) i (2,3) može se oduzeti $\min\{15, 23\} = 15$ jedinica robe te istu količinu dodati u poljima (1,3) i (2,2). Na taj način dobiva se novi bazični plan transporta (tablica 5.15).

Tablica 5.15

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5	12	1	4	13	36
l ₂	7	8	14	6	5	23
l ₃	15	4	2	7	9	29
l ₄	6	11	5	16	3	12
b _j	13	24	15	21	27	

Diagram: A closed loop is formed by cells (1,2), (1,4), (2,4), and (2,2). Arrows indicate a clockwise cycle: (1,2) to (1,4), (1,4) to (2,4), (2,4) to (2,2), and (2,2) to (1,2). The values in these cells are 8, -6, 7, and 8 respectively.

Za bazični plan u tablici 5.15 ukupni transportni troškovi su $T_1 = 615$ novčanih jedinica, a T_0 bilo je 870 novčanih jedinica.

Dobiven je u tablici 5.15 bolji plan transporta, s manjim ukupnim troškovima, odnosno sada su smanjeni troškovi transporta za $870 - 615 = 255$ novčanih jedinica, što je isto $17 \cdot 15 = 255$.

Kao što je uočeno lanac predstavlja zatvoreni poligon u čijem je jednom vrhu jedinična cijena polja za koji se lanac formira, dok su u ostalim vrhovima poligona cijene polja (i,j) gdje je $x_{ij} > 0$. Broj vrhova svakog lanca je paran i najmanje jednak 4, a najviše $m + n$. Za svako polje tablice bez tereta može se formirati samo jedan lanac.

Ponavljaju se isti postupak provjere optimalnosti bazičnog plana. Računaju se karakteristike lanaca, što je upisano u tablici 5.15 u polja gdje nema dostava:

$$k_{14} = 4 - 12 + 8 - 6 = -6$$

$$k_{15} = 13 - 12 + 8 - 6 + 7 - 9 = 1$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$$

$$k_{23} = 14 - 1 + 12 - 8 = 17$$

$$k_{25} = 5 - 6 + 7 - 9 = -3$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 13$$

$$k_{32} = 4 - 7 + 6 - 8 = -5$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 6 - 8 + 12 - 1 = 4$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 5 = 10$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 = 8$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 6 - 8 + 12 - 1 = 13$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

U tablici 5.15 su tri polja s negativnim karakteristikama lanca; na polju (1,4) najmanji je negativni broj. Teret se oduzima s polja (1,2) i (2,4) odnosno traži se minimum $\min\{8, 7\} = 7$ i taj se teret dodaje poljima (1,4) i (2,2) (tablica 5.16).

Tablica 5.16

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5	12	1	4	13	36
l ₂	7	8	14	6	5	23
l ₃	15	4	2	7	9	29
l ₄	6	11	5	16	3	12
b _j	13	24	15	21	27	

Diagram: A closed loop is formed by cells (1,2), (1,4), (2,4), and (2,2). Arrows indicate a clockwise cycle: (1,2) to (1,4), (1,4) to (2,4), (2,4) to (2,2), and (2,2) to (1,2). The values in these cells are 1, 7, 6, and 23 respectively.

Ukupni troškovi za bazični plan u tablici 5.16, nakon druge iteracije $T_2 = 573$, kao što se vidi $T_2 = 573 < T_1 = 615 < T_0 = 870$, smanjenje je $42 = 6 \cdot 7$ novčanih jedinica. Ne može se znati da li je bazično rješenje u tablici 5.16 optimalno dok se ne izračunaju karakteristike lanaca. Izračunate karakteristike lanaca napisane su u tablici 5.16 u polja bez dostava:

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 9 = 7$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 12 - 5 = 6$$

$$k_{23} = 14 - 1 + 12 - 8 = 17$$

$$k_{25} = 5 - 8 + 12 - 4 + 7 - 9 = 3$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{32} = 4 - 7 + 4 - 12 = -11$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 4 - 5 = 4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 7 + 4 - 12 = 2$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 4 - 1 = 7$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

U tablici 5.16 su dvije negativne karakteristike lanaca; bazični plan nije optimalan. Plan transporta će se poboljšati ako se na polje (3,2) stavi maksimalni mogući teret, a to je $\min\{14, 1\} = 1$. Teret se oduzima na polju (3,4) i (1,2) a dodaje poljima (1,4) i (3,2). Novi bazični plan prikazan je u tablici 5.17.

Tablica 5.17

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5 (13)	12 11	1 (15)	4 (8)	13 7	36
l ₂	7 -5	8 (23)	14 6	6 -5	5 -8	23
l ₃	15 7	4 (1)	2 -2	7 (13)	9 (15)	29
l ₄	6 4	11 13	5 7	16 15	3 (12)	12
b _j	13	24	15	21	27	

U trećoj iteraciji trošak je $T_3 = 573 - 1 \cdot 11 = 562$ novčanih jedinica. Da se provjeri optimalnost, računaju se karakteristike lanaca:

$$k_{12} = 12 - 4 + 7 - 4 = 11$$

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 9 = 7$$

$$k_{21} = 7 - 8 + 4 - 7 + 4 - 5 = -5$$

$$k_{23} = 14 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = 6$$

$$k_{24} = 6 - 8 + 4 - 7 = -5$$

$$k_{25} = 5 - 8 + 4 - 9 = -8$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 9 - 7 + 4 - 5 = 4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 9 - 4 = 13$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 9 - 7 + 4 - 1 = 7$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 9 - 7 = 15$$

Postoje četiri negativne karakteristike; plan transporta nije optimalan. Ukupni troškovi transporta će se smanjiti ako se u polje (2,5) stavi maksimalni teret, tj. $x_{25} = \min \{23, 15\} = 15$. Novo bazični plan je u tablici 5.18.

Tablica 5.18

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5 (13)	12 11	1 (15)	4 (8)	13 15	36
l ₂	7 -5	8 (8)	14 6	6 -5	5 (15)	23
l ₃	15 7	4 (16)	2 -2	7 (13)	9 8	29
l ₄	6 -4	11 5	5 -1	16 7	3 (12)	12
b _j	13	24	15	21	27	

Kod četvrte iteracije troškovi su $T_4 = 562 - 8 \cdot 15 = 442$ novčanih jedinica. Ponavlja se postupak računanja karakteristika lanaca:

$$k_{12} = 12 - 4 + 7 - 4 = 11$$

$$k_{15} = 13 - 4 + 7 - 4 + 8 - 5 = 15$$

$$k_{21} = 7 - 5 + 4 - 7 + 4 - 8 = -5$$

$$k_{23} = 14 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = 6$$

$$k_{24} = 6 - 7 + 4 - 8 = -5$$

$$k_{31} = 15 - 7 + 4 - 5 = 7$$

$$k_{33} = 2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

$$k_{35} = 9 - 5 + 8 - 4 = 8$$

$$k_{41} = 6 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 + 4 - 5 = -4$$

$$k_{42} = 11 - 3 + 5 - 8 = 5$$

$$k_{43} = 5 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 + 4 - 1 = -1$$

$$k_{44} = 16 - 3 + 5 - 8 + 4 - 7 = 7$$

Transportni plan u tablici 5.18 nije optimalan jer postoji pet negativnih karakteristika lanaca. Polja (2,1) i (2,4) imaju najmanje karakteristike. Na polje (2,1) staviti će se maksimalno mogući teret tj. $x_{21} = \min \{13, 13, 8\} = 8$. Novi bazični transportni plan prikazan je u tablici 5.19.

Tablica 5.19

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5	12	1	4	13	36
	(5)	11	(15)	(16)	10	
l ₂	7	8	14	6	5	23
	(8)	5	11	0	(15)	
l ₃	15	4	2	7	9	29
	7	(24)	-2	(5)	3	
l ₄	6	11	5	16	3	12
	1	9	4	12	(12)	
b _j	13	24	15	21	27	

$$T_5 = 442 - 5 \cdot 8 = 442 - 40 = 402 \text{ novčanih jedinica.}$$

Karakteristike lanaca će omogućiti da se zaključi je li nakon pete iteracije transportni plan optimalan ili nije. Računaju se karakteristike lanaca i upisuju u tablicu 5.19:

$$\begin{aligned} k_{12} &= 12 - 4 + 7 - 4 = 11 \\ k_{15} &= 13 - 5 + 7 - 5 = 10 \\ k_{22} &= 8 - 7 + 5 - 4 + 7 - 4 = 5 \\ k_{23} &= 14 - 7 + 5 - 1 = 11 \\ k_{24} &= 6 - 7 + 5 - 4 = 0 \\ k_{31} &= 15 - 7 + 4 - 5 = 7 \\ k_{33} &= 2 - 7 + 4 - 1 = -2 \\ k_{35} &= 9 - 7 + 4 - 5 + 7 - 5 = 3 \\ k_{41} &= 6 - 3 + 5 - 7 = 1 \\ k_{42} &= 11 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 + 7 - 4 = 9 \\ k_{43} &= 5 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 = 4 \\ k_{44} &= 16 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 = 12 \end{aligned}$$

Kako je u polju (3,3) karakteristika lanca k_{33} negativna, transportni plan u tablici 5.19 nije optimalan. Troškovi transporta će se smanjiti ako se na polju (3,3) stavi najveći mogući teret, u ovom slučaju $x_{33} = \min \{5, 15\} = 5$. Novo bazično rješenje je prikazano u tablici 5.20.

Tablica 5.20

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
l ₁	5	12	1	4	13	36
	(5)	9	(10)	(21)	10	
l ₂	7	8	14	6	5	23
	(8)	3	11	0	(15)	
l ₃	15	4	2	7	9	29
	9	(24)	(5)	2	5	
l ₄	6	11	5	16	3	12
	1	8	4	12	(12)	
b _j	13	24	15	21	27	

Za plan transporta u tablici 5.20 ukupni su transportni troškovi $T_6 = 402 - 2 \cdot 5 = 392$ novčanih jedinica.

Ponavlja se postupak računanja karakteristika lanca za šestu iteraciju, tj. za plan transporta u tablici 5.20:

$$\begin{aligned} k_{12} &= 12 - 4 + 2 - 1 = 9 \\ k_{15} &= 13 - 5 + 7 - 5 = 10 \\ k_{22} &= 8 - 7 + 5 - 1 + 2 - 4 = 3 \\ k_{23} &= 14 - 1 + 5 - 7 = 11 \\ k_{24} &= 6 - 7 + 5 - 4 = 0 \\ k_{31} &= 15 - 2 + 1 - 5 = 9 \\ k_{34} &= 7 - 4 + 1 - 2 = 2 \\ k_{35} &= 9 - 5 + 7 - 5 + 1 - 2 = 5 \\ k_{41} &= 6 - 3 + 5 - 7 = 1 \\ k_{42} &= 11 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 + 2 - 4 = 8 \\ k_{43} &= 5 - 3 + 5 - 7 + 5 - 1 = 4 \\ k_{44} &= 16 - 3 + 5 - 7 + 5 - 4 = 12 \end{aligned}$$

Kako u tablici 5.20 nema negativnih karakteristika, optimalan je transportni plan:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= 5 & \dot{x}_{13} &= 10 & \dot{x}_{14} &= 21 \\ \dot{x}_{21} &= 8 & \dot{x}_{25} &= 15 & & \\ \dot{x}_{32} &= 24 & \dot{x}_{33} &= 5 & & \\ \dot{x}_{45} &= 12 & & & & \end{aligned}$$

s ukupnim transportnim troškovima $T = 392$ novčane jedinice.

Do optimalnog rješenja došlo se nakon šest iteracija. Uzet je početni bazični plan transporta dobiven dijagonalnom metodom iz tablice 5.2.

Da je početni bazični plan uzet iz tablice 5.13, gdje je on nađen VAM metodom, vidi se da je to odmah optimalni plan transporta s ukupnim troškovima $T_0 = 392$. *Općenito, VAM metoda određivanja početnog bazičnog plana je bliža optimalnom rješenju i nju treba koristiti pri ručnom rješavanju transportnog problema. Elektronički programi obično početno bazično rješenje određuju dijagonalnom metodom.*

U tablici 5.20, polje (2,4) ima karakteristiku lanca nula. Ako se na to polje stavi $x_{24} = \min \{21, 8\} = 8$, dobiva se plan transporta prikazan u tablici 5.21. Taj plan transporta ima iste ukupne troškove transporta 392. Planovi u tablici 5.20 i

5.21 su oba optimalna s istom vrijednošću funkcije cilja $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} = 392$

novčane jedinice.

Tablica 5.21

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a _i
I ₁	5 ⓫	12	1 ⓫	4 ⓫	13	36
I ₂	7	8	14	6 ⓫	5 ⓫	23
I ₃	15	4 ⓫	2 ⓫	7	9	29
I ₄	6	11	5	16	3 ⓫	12
b _j	13	24	15	21	27	

Ako se početno bazično rješenje odredi metodom najmanje cijene, onda je treće bazično rješenje optimalno rješenje (što zainteresirani čitalac može provjeriti).

5.3.2 Metoda koeficijenata ili modificirana metoda distribucije (MODI)

Nedostatak metode raspodjele sastoji se u tome što treba tražiti lanac za sva polja gdje je $x_{ij} = 0$ i računati njihove karakteristike. Na primjer, ako treba naći optimalni plan kod transportnog problema dimenzija 10×10 , to jest kod transportnog problema gdje je 10 ishodišta i 10 odredišta, tada pri određivanju svakoga bazičnog plana treba formirati 81 $[m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1) = 9 \cdot 9 = 81]$ lanaca i računati njihove karakteristike. Kako i broj iteracija od početnoga bazičnog plana do optimalnog plana može biti velik, vidi se da je metoda raspodjele, iako veoma jednostavna, nepogodna zbog ogromnog posla računanja.

Metoda koeficijenata ili modificirana metoda distribucije - MODI (Modification Distribution Method) predstavlja pojednostavljenije metode raspodjele, koju je na osnovi opće simpleks metode razradio Dantzig [3].

122

Metoda koeficijenata ima tu prednost što ne treba konstruirati lanac za sva polja, bez tereta ($x_{ij} = 0$), jer se pomoću koeficijenata redaka i stupaca neposredno dobiju karakteristike lanaca. A sama konstrukcija lanca s najmanjom negativnom karakteristikom služi za preraspodjelu dostava u novom bazičnom planu. Provjera optimalnosti bazičnog plana izvodi se samo pomoću koeficijenata redaka i stupaca. Ti koeficijenti se biraju tako da njihov zbroj bude jednak jediničnoj cijeni u polju s bazičnim rješenjem ($x_{ij} > 0$), koja se nalazi na presjeku stupca i retka čiji se koeficijenti zbrajaju. Koeficijenti mogu biti pozitivni, negativni i jednaki nuli.

Označe se koeficijenti retka s α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) i koeficijenti stupca s β_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Jedinične cijene uz bazične varijable zadovoljavaju relaciju

$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

Kako bazičnih varijabli ima $m + n - 1$, a nepoznatih koeficijenata redaka i stupaca $m + n$ jedan se koeficijent odredi proizvoljno. Obično se uzima da je koeficijent prvog retka jednak nuli, to jest $\alpha_1 = 0$, mada se tom koeficijentu može dati i proizvoljna druga vrijednost.

Za transportni problem u tablici 5.22, gdje je dano i početno bazično rješenje dobiveno dijagonalnom metodom, naći će se optimalno rješenje koristeći metodu koeficijenata.

Tablica 5.22

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
I ₁	5 Ⓜ	4	16	16	0
I ₂	7 Ⓜ	3	4	21	2
I ₃	2 Ⓜ	8 Ⓜ	7 Ⓜ	33	-3
I ₄	11	5	1 Ⓜ	12	-6
I ₅	13	6 Ⓜ	4 Ⓜ	18	-5
b _j	56	34	10	100	
β _j	5	11	9	100	

Prvo je, u ovom primjeru, odabrano $\alpha_1 = 0$. Prvi redak s teretom, $x_{11} = 16$, povezan je s prvim stupcem, pa iz uvjeta $c_{11} = \alpha_1 + \beta_1$, odnosno $5 = 0 + \beta_1$ slijedi $\beta_1 = 5$. Prvi stupac povezan je s drugim retkom, s bazičnom varijablom $x_{21} = 21$, pa je $c_{21} = 7 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_2 + 5$, odakle je $\alpha_2 = 2$. Prvi stupac je također povezan s trećim retkom pa je $c_{31} = 2 = \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 + 5$, odakle je $\alpha_3 = -3$. Treći redak je povezan s drugim stupcem u polju (3,2), pa je ispunjeno $c_{32} = 8 = \alpha_3 + \beta_2 = -3 + \beta_2$, odakle je $\beta_2 = 11$.

Dalje je

$$c_{42} = 5 = \alpha_4 + \beta_2 = \alpha_4 + 11, \text{ odakle je } \alpha_4 = -6$$

$$c_{52} = 6 = \alpha_5 + \beta_2 = \alpha_5 + 11, \text{ odakle je } \alpha_5 = -5$$

$$c_{53} = 4 = \alpha_5 + \beta_3 = -5 + \beta_3, \text{ odakle je } \beta_3 = 9$$

Provjera optimalnosti bazičnog plana pomoću koeficijenata redaka i stupaca zasniiva se na sljedećem teoremu.

Teorem 5.1

Ako je za sva bazična polja plana (to jest za polje (i,j) gdje je $x_{ij} > 0$) ispunjeno

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad (5.6)$$

a za slobodna polja (to jest, gdje je $x_{ij} = 0$)

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \quad (5.7)$$

onda je bazični plan optimalan.

Dokaz:

Ako se plan transporta označi s $\{x_{ij}\}$ i sustav koeficijenata redaka i stupaca s (α_i, β_j) koji zadovoljavaju uvjete (5.6) i (5.7), onda su ukupni troškovi transporta jednaki

$$F = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_j) x_{ij}$$

Za plan $\{x'_{ij}\}$ ti troškovi su jednaki

$$F' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x'_{ij}$$

Varijable x'_{ij} se razlikuju od x_{ij} tako što se s nekim od varijabli iz plana $\{x_{ij}\}$ poklapaju, ali u nekim poljima, gdje su varijable x_{ij} jednake nuli, one su pozitivne. U poljima gdje se varijable x_{ij} i x'_{ij} poklapaju ispunjeno je $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, a u poljima gdje su varijable $x_{ij} = 0$ i $x'_{ij} > 0$ ispunjeno je $\alpha_i + \beta_j < c_{ij}$ pa slijedi

$$F' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_j) x'_{ij} = F$$

To znači: izmjenom plana $\{x_{ij}\}$ troškovi transporta ne mogu se umanjiti, to jest plan transporta $\{x_{ij}\}$ s koeficijentima α_i i β_j koji zadovoljavaju uvjete (5.6) i (5.7) je optimalan plan.

Iz ovog teorema neposredno slijedi jednostavan kriterij optimalnosti bazičnog plana:

Ako su razlike

$$k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$$

pozitivne za polja (i,j) gdje je $x_{ij} = 0$, onda je takav bazični plan optimalan.

Razlika $k_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$ jednaka je karakteristici lanca polja (i,j) gdje je $x_{ij} = 0$. Ako se uzme, na primjer, polje (1,2) razlika $k_{12} = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 4 - (0 + 11) = -7$ i izračuna karakteristika lanca (1,2) - (1,1) - (3,1) - (3,2), to je $k_{12} = 4 - 5 + 2 - 8 = -7$.

I kao kod metode raspodjele, bazični plan se poboljšava sve dok se pojavljuje makar jedna negativna karakteristika.

Izračunajmo karakteristike praznih polja iz tablice 5.22:

$$(1,2) : k_{12} = c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 4 - (0 + 11) = -7$$

$$(1,3) : k_{13} = 16 - (0 + 9) = 7$$

$$(2,2) : k_{22} = 3 - (2 + 11) = -10$$

$$(2,3) : k_{23} = 4 - (2 + 9) = -7$$

$$(3,3) : k_{33} = 7 - (-3 + 9) = 1$$

$$(4,1) : k_{41} = 11 - (-6 + 5) = 12$$

$$(4,3) : k_{43} = 1 - (-6 + 9) = -2$$

$$(5,1) : k_{51} = 13 - (-5 + 5) = 13$$

Kako je najmanja negativna karakteristika polja (2,2), po lancu ovog polja izračunat će se promjene dostava. Lanac polja (2,2) spaja u svojim polja (2,1), (3,1), (3,2). Veličina $x_{32} = 14 = \min \{14, 21\}$ oduzima se od dostava u poljima (2,1) i (3,2), a dodaje se dostavama u poljima (2,2) i (3,1). Drugo bazično rješenje dano je u tablici 5.23.

Tablica 5.23

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
I ₁	5 ①6	4	16	16	0
I ₂	7 ⑦	3 ⑭	4	21	2
I ₃	2 ③③	8	7	33	-3
I ₄	11	5 ⑫	1	12	4
I ₅	13	6 ⑧	4 ⑩	18	5
b _j	56	34	10		
β _j	5	1	-1		

U tablici 5.23 ispisani su i koeficijenti redaka i stupaca. Karakteristike praznih polja su

$$(1,2) : k_{12} = 4 - (0 + 1) = 3$$

$$(1,3) : k_{13} = 16 - (0 - 1) = 17$$

$$(2,3) : k_{23} = 4 - (2 - 1) = 3$$

$$(3,2) : k_{32} = 8 - (-3 + 1) = 10$$

$$(3,3) : k_{33} = 7 - (-3 - 1) = 11$$

$$(4,1) : k_{41} = 11 - (4 + 5) = 2$$

$$(4,3) : k_{43} = 1 - (4 - 1) = -2$$

$$(5,1) : k_{51} = 13 - (5 + 5) = 3$$

Kao što se vidi, u ovom drugom bazičnom rješenju samo je jedna negativna karakteristika za polje (4,3). Lanac ovog polja je (4,3) - (4,2) - (5,2) - (5,3). Na polje (4,3) i (5,2) dodaje se $x_{43} = 10 = \min\{12, 10\}$ a na polja (4,2) i (5,3) oduzme. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.24.

Tablica 5.24

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
l ₁	5	4	16	16	0
l ₂	7	3	4	21	2
l ₃	2	8	7	33	-3
l ₄	11	5	1	12	4
l ₅	13	6	4	18	5
b _j	56	34	10		
β _j	5	1	-3		

U tablici 5.24 izračunati su koeficijenti redaka α_i i stupaca β_j.

Karakteristike praznih polja su

$$(1,2) : k_{12} = 4 - (0 + 1) = 3$$

$$(1,3) : k_{13} = 16 - (0 - 3) = 19$$

$$(2,3) : k_{23} = 4 - (2 - 3) = 5$$

$$(3,2) : k_{32} = 8 - (-3 + 1) = 10$$

$$(3,3) : k_{33} = 7 - (-3 - 3) = 13$$

$$(4,1) : k_{41} = 11 - (4 + 5) = 2$$

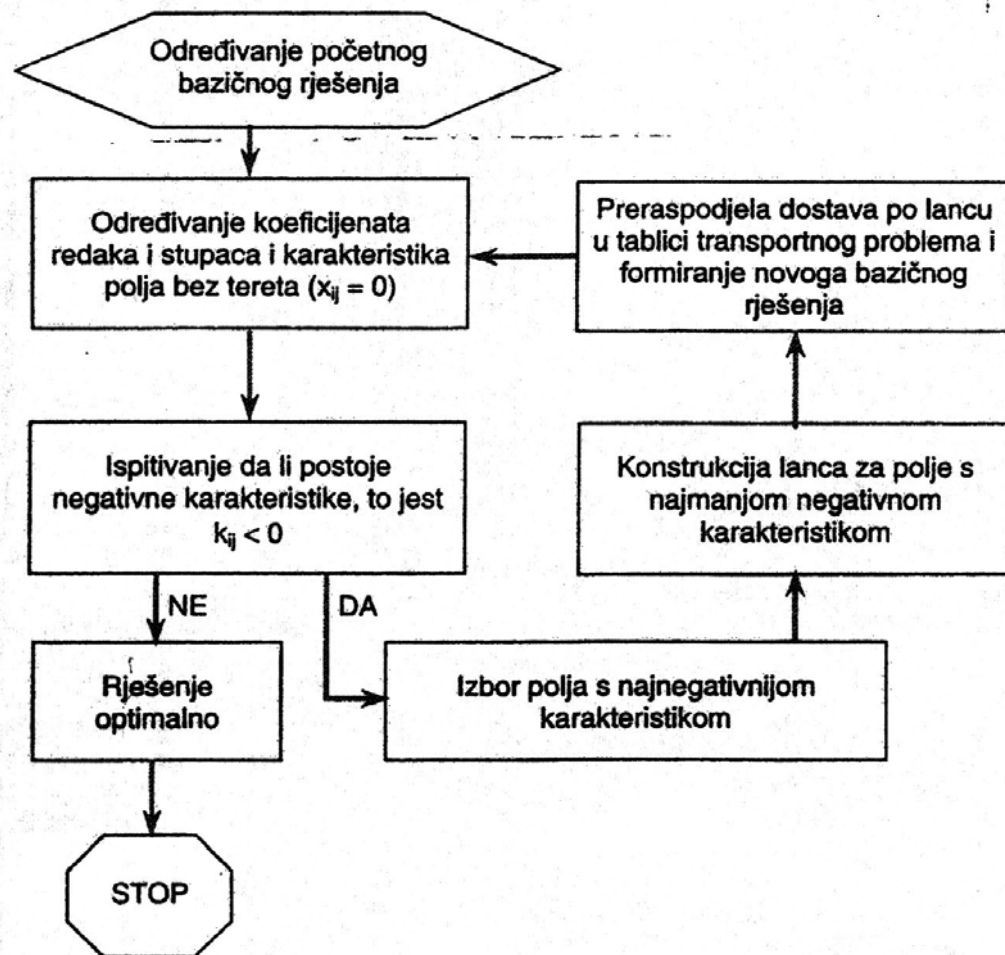
$$(5,1) : k_{51} = 13 - (5 + 5) = 3$$

$$(5,3) : k_{53} = 4 - (5 - 3) = 2$$

Kako su sve karakteristike polja (i,j), gdje je x_{ij} = 0, u tablici 5.24 pozitivne, to je ovo treće bazično rješenje i optimalno. Ukupni troškovi transporta prema optimalnom planu jednaki su

$$T_{\min} = T_3 = 365 \text{ novčanih jedinica}$$

Iz ovog primjera vidi se da se algoritam metode koeficijenata može shematski prikazati na sljedeći način:



Metoda koeficijenata praktično je identična metodi potencijala, koju je razradio početkom 40-ih godina prošlog stoljeća L.V. Kantoroviča [6]. Kantorovič je koeficijente redaka i stupaca nazvao potencijalima redaka i stupaca, pa metoda slijedi ovaj naziv.

Primjer s degeneracijom

Neka je dan transportni problem

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i
l ₁	1	3	2	300
l ₂	5	7	10	250
l ₃	3	1	4	450
b _j	300	400	300	

Kako je $\sum_{i=1}^3 a_i = 1000$ i $\sum_{j=1}^3 b_j = 1000$, to je dani problem zatvoren. Jedan od početnih bazičnih programa, dobiven dijagonalnom metodom je

Tablica 5.25

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i
l ₁	1	3	2	300
l ₂	5	7	10	250
l ₃	3	1	4	450
b _j	300	400	300	

Bazični program u tablici 5.25 ima četiri varijable različite od nule. Međutim, prema $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, treba imati pet varijabli različitih od nule.

Dodajmo ponudama a₁, a₂, a₃ proizvoljno malu veličinu ε i trećoj potražnji 3ε. Tako je dobivena tablica 5.26 u kojoj je naveden i jedan početni transportni plan.

Tablica 5.26

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
l ₁	1	3	2	300 + ε	0
l ₂	5	7	10	250 + ε	4
l ₃	3	1	4	450 + ε	-2
b _j	300	400	300 + 3ε		
β _j	1	3	6		

Izračunati su koeficijenti redaka i stupaca: α₁ = 0, β₁ = 1, α₂ = 4, β₂ = 3, α₃ = -2, β₃ = 6.

Karakteristike polja bez tereta (x_{ij} = 0) su

(1,3) : k₁₃ = 2 - (0 + 6) = -4

(2,1) : k₂₁ = 5 - (4 + 1) = 0

(2,3) : k₂₃ = 10 - (4 + 6) = 0

(3,1) : k₃₁ = 3 - (-2 + 1) = 4

Negativna karakteristika je u polju (1,3). Napravit će se preraspodjela po lancu + (1,3) → - (1,2) → + (3,2) → - (3,3). Na poljima gdje se oduzima teret najmanja vrijednost je ε = min {ε, 300 + 3ε}. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.27.

Tablica 5.27

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
l ₁	1	3	2	300 + ε	0
l ₂	5	7	10	250 + ε	8
l ₃	3	1	4	450 + ε	2
b _j	300	400	300 + 3ε		
β _j	1	-1	2		

Koeficijenti redaka i stupaca su: α₁ = 0, β₁ = 1, α₂ = 8, β₂ = -1, α₃ = 2, β₃ = 2.

Karakteristike polja bez tereta su

$$(1,2) : k_{12} = 3 - (0 - 1) = 4$$

$$(2,1) : k_{21} = 5 - (8 + 1) = -4$$

$$(2,3) : k_{23} = 10 - (8 + 2) = 0$$

$$(3,1) : k_{31} = 3 - (2 + 1) = 0$$

Kako je negativna karakteristika na polju (2,1), pravi se raspodjela po lancu $+(2,1) \rightarrow -(2,2) \rightarrow +(3,2) \rightarrow -(3,3) \rightarrow +(1,3) \rightarrow -(1,1)$. Na polje (2,1) stavi se teret $x_{21} = \min\{250 + \epsilon, 300 + 2\epsilon, 300\} = 250 + \epsilon$.

Treće bazično rješenje prikazano je u tablici 5.28.

Tablica 5.28

	O ₁	O ₂	O ₃	a _i	α _i
l ₁	1 (50 - ε)	3	2 (250 + 2ε)	300 + ε	0
l ₂	5 (250 + ε)	7	10	250 + ε	4
l ₃	3	1	4 (400)	450 + ε	2
b _j	300	400	300 + 3ε		
β _j	1	-1	2		

Karakteristike polja bez tereta su

$$(1,2) : k_{12} = 3 - (0 - 1) = 4$$

$$(2,2) : k_{22} = 7 - (4 - 1) = 4$$

$$(2,3) : k_{23} = 10 - (4 + 2) = 4$$

$$(3,1) : k_{31} = 3 - (2 + 1) = 0$$

Kako su sve karakteristike pozitivne ili nula transportni plan je optimalan. Ako se izostavi veličina ε, dobije se bazični program $x_{11} = 50, x_{13} = 250, x_{21} = 250, x_{32} = 400, x_{33} = 50$ koji ima $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ bazičnih varijabli i nije degeneriran.

Ukupni troškovi za taj bazični program su

$$T = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 250 + 5 \cdot 250 + 1 \cdot 400 + 50 \cdot 4 = 2400 \text{ novčanih jedinica}$$

5.4 Različite modifikacije transportnog problema

5.4.1 Otvoreni model transporta

Ako je ponuda jednaka potražnji tj. ako je

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

riječ je o *zatvorenom problemu transporta*. Međutim, u praksi se često događa da taj uvjet nije ispunjen, to jest često se sreće sa slučajem kada je ukupna ponuda veća od ukupne potražnje:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

ili kada je ukupna ponuda manja od ukupne potražnje:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Matematički model transportnog problema kod kojega ukupna ponuda nije jednaka ukupnoj potražnji naziva se *otvoreni model transporta*.

S formalne strane, otvoreni model transporta uvijek se može svesti na zatvoreni model.

U slučaju kad je ukupna ponuda veća od ukupne potražnje, uvodi se jedno fiktivno odredište. To znači da se tablica transportnog problema proširuje još jednim stupcem, pri čemu će potražnja toga novog odredišta biti jednaka

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

Na taj način se u matematički model uvode nove varijable $x_{i,n+1} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

U slučaju kada je ukupna ponuda manja od ukupne potražnje, uvodi se fiktivno ishodište s količinom tereta

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

Sada se tu nove varijable $x_{m+1,j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Iako otvoreni model transporta ne stvara teškoće pri formalnom prijelazu na zatvoreni model, u praksi se pojavljuju izvjesna pitanja koja treba uzeti u obzir. Razmotrit će se slučaj kad je ukupna ponuda veća od potražnje. U tom slučaju, kao je već utvrđeno, treba uvesti fiktivno odredište, ili što je isto, dodati stupac u

transportnoj tablici, ali se odgovarajuće varijable $x_{i,n+1}$ uvode i u funkciju cilja (funkciju ukupnih troškova). Logično je sada postaviti pitanje: kako u funkciji cilja uvesti jedinične cijene $c_{i,n+1}$ $i=1,2,\dots,m$. Često se jednostavno stavlja $c_{i,n+1} = 0$ $i = 1,2,\dots,m$, što je točno pod veoma specifičnim pretpostavkama. Na primjer, ako u ishodištima ima više robe nego što je potražnja stavljanjem $c_{i,n+1} = 0$ za $i = 1,2,\dots,m$, jedan dio tereta ostaje u ishodištu i . Ukoliko u ishodištima postoje troškovi skladištenja koji su poznati i proporcionalni količini robe, tada je nužno da se u funkciji cilja ti troškovi uklupe u odgovarajuće cijene $c_{i,n+1}$ $i = 1,2,\dots,m$.

Razmatrani slučajevi otvorenog modela transporta sadrže i niz drugih problema praktične prirode, koji se pojavljuju pri konstrukciji matematičkog modela. Može se, na primjer, dogoditi da je unaprijed poznato da neko ishodište ne može uskladištiti robu, što znači da je od tih ishodišta nedopustiva "trasa" do fiktivnog odredišta.

Realno je razmotriti slučaj da u ishodištu I_i može ostati dio robe pripremljen za transport. Drukčije rečeno, potrebno je osigurati da u optimalnom rješenju u ishodištu I_i ne ostane više tereta nego što to ishodište može zadržati u skladištu, ili, što je isto, uvodi se pretpostavka da se iz I_i mora izvesti unaprijed određena količina robe.

U svezi s tim, ukupna količina robe u ishodištu I_i , jednaka a_i , dijeli se na dva dijela:

$$a_i = a'_i + a''_i$$

gdje je a'_i - količina tereta koja se mora otpremiti iz I_i , a a''_i - količina tereta koja može ostati kao zaliha.

Primjer 1.

Neka je dan transportni problem u kojemu veličine c_{ij} označavaju udaljenosti između ishodišta I_i i odredišta O_j (tablica 5.29).

Tablica 5.29

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	5	1	11	6
I_2	9	7	8	14	7
I_3	10	2	6	12	10
b_j	3	6	5	2	23

16

Kako je $\sum_{i=1}^3 a_i = 23 > \sum_{j=1}^4 b_j = 16$, uvodi se fiktivno odredište O_5 .

Neka je poznato da se u prvom ishodištu ne može uskladištiti više od 2 jedinice robe. Zbog toga se umjesto ishodišta I_1 formiraju dva ishodišta I'_1 i I''_1 s

količinama robe 4 i 2. S obzirom na interpretaciju veličina c_{ij} uzima se $c'_{1,n+1} = M$ (gdje je M veliki ne specificirani broj), dok su ostali koeficijenti $c_{i,n+1} = 0$.

Transformirani transportni problem prikazan je u tablici 5.30.

Tablica 5.30

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I'_1	3	5	1	11	M	4
I''_1	3	5	1	11	0	2
I_2	9	7	8	14	0	7
I_3	10	2	6	12	0	10
b_j	3	6	5	2	7	

To je sada problem transporta linearnog programiranja za koji se lako nađe optimalno rješenje.

U drugom slučaju, to jest u slučaju kada je ukupna potražnja veća od ukupne ponude, opet je prijelaz na zatvoreni model transporta, s formalne strane, vrlo jednostavan. Uvodi se fiktivno ishodište koje "isporučuje" razliku između ukupne potražnje i ponude. Ali ni ovdje se u svakoj situaciji ne može ograničiti na formalno rješenje problema, jer će se dogoditi da se mora isporučiti cjelokupna tražena roba, što će se u matematičkom modelu morati uzeti u obzir.

Može se, na primjer, dogoditi da se određenom odredištu može poslati manje jedinica robe nego što potražuje, ali ne manje od unaprijed dogovorene količine. Sljedeći primjer ilustrira takvu situaciju.

Primjer 2.

Neka je dan transportni problem (tablica 5.31).

Tablica 5.31

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	2	6	5	4
I_2	9	8	11	6	9
I_3	4	5	10	7	12
b_j	5	7	11	6	25

29

Kao što se vidi, ovdje je $\sum_{i=1}^3 a_i = 25 < \sum_{j=1}^4 b_j = 29$.

Potrebno je, dakle, uvesti fiktivno ishodište I_4 , u kojemu će biti "ponuđeno" za transport $29 - 25 = 4$ jedinice robe. Uvodi se i sljedeće ograničenje: u slučaju da drugo odredište ne bude potpuno podmireno u optimalnom planu, mora se osigurati najmanje tri jedinice robe. Da bi se to ograničenje ispunilo, uvode se dva odredišta umjesto O_2 , naime odredište O_2' potražuje $7 - 3 = 4$ jedinice robe i O_2'' potražuje 3 jedinice robe. Očigledno, za vrijednosti c_{43} treba uzeti M , a za ostale vrijednosti $c_{4j} = 0$. Praktično, umjesto M , u polju (4,3) ne stavlja se ništa, nego se to polje precrtava. Zatvoreni model transportnog problema prikazan je u tablici 5.32.

Tablica 5.32

	O_1	O_2'	O_2''	O_3	O_4	a_i
I_1	3	2	2	6	5	4
I_2	9	8	8	11	6	9
I_3	4	5	5	10	7	12
I_4	0	0	M	0	0	4
b_j	5	4	3	11	6	

Optimalno rješenje može se naći jednom od već prikazanih metoda.

Valja napomenuti da se na isti način postupa kada postoji više odredišta s ograničenjima kao što su bila u ovoj zadaći.

Još će se navesti jedan primjer otvorenog problema transporta: prebacivanje praznih vagona od željezničkih kolodvora gdje su istovareni do željezničkih kolodvora gdje ih treba prebaciti radi utovara. Najčešće je to otvoreni model, koji se svodi na zatvoreni transportni model.

Primjer 3.

Određivanje optimalnog plana prebacivanja praznih vagona [10].

Jedan od osnovnih zadataka u okviru racionalizacije teretnog prijevoza željeznicom je određivanje optimalnog plana prebacivanja praznih vagona iz kolodvora gdje su istovareni u kolodvor gdje se trebaju utovariti. Popularnije rečeno, to je zadatak nalaženja minimalnog "trčanja" praznih vagona.

Postoji velik broj načina na koji se može izvršiti prebacivanje praznih vagona. Osnovni kriterij za izbor plana prebacivanja praznih vagona je onaj plan pri kojemu su troškovi prebacivanja minimalni. Postavlja se zadatak nalaženja optimalnog plana prebacivanja praznih vagona za jednu promatrane mrežu, na

primjer, mrežu jednoga željezničkoga transportnog poduzeća koje ima n kolodvora.

Radi pojednostavljenja matematičkoga modela, uvode se sljedeće pretpostavke:

1. Prazni vagoni, čije se prebacivanje želi matematički modelirati istog su tipa i uzajamno se mogu zamjenjivati.
2. Moguće je prebaciti prazne vagone iz jednog kolodvora promatrane mreže u proizvoljni drugi, a troškovi prebacivanja, po jednom vagonu iz svakoga kolodvora u proizvoljni drugi dani su i neka su jednaki c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$).
3. Vremena prebacivanja praznih vagona iz i -toga kolodvora u j -ti kolodvor jednaka su t_{ij} dana ($t_{ij} = 0$), $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ gdje se veličine t_{ij} računaju s točnošću do jednog dana zaokruživanjem na gore.
4. Jednom u tijeku dana kolodvori šalju izvješće centru, odakle se rukovodi prebacivanjem praznih vagona, o broju potrebnih praznih vagona, odnosno o broju praznih vagona koje mogu poslati drugim kolodvorima.

Ako je $t_{ij} \leq m$ dana, može se formirati matematički model prebacivanja praznih vagona za m dana. Drugim riječima, može se za m dana planirati prebacivanje praznih vagona. Zbog toga, pretpostavlja se dalje, svaki kolodvor promatrane mreže šalje centru svoja potraživanja praznih vagona kao i svoju ponudu za svaki od m dana.

Označimo s b_{js} - potrebe j -toga kolodvora za praznim vagonima s -tog dana, $s = 1, 2, \dots, m$. Neka su a_{ir} ponude i -toga kolodvora praznih vagona r -tog dana, a s a_{i0} označimo broj praznih vagona koji se na početku prvog dana stavlja na raspolaganje na i -tom kolodvoru. Na taj način, umjesto n odredišta ima $m \cdot n$ odredišta koja potražuju b_{js} , $j = 1, 2, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, m$ praznih vagona i $(m + 1)$ -n ishodišta s ponudama a_{ir} , $i = 1, 2, \dots, n$; $r = 0, 1, \dots, m$ praznih vagona.

Znači, ukupna ponuda praznih vagona iznosi

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^m a_{ir}$$

a ukupna potražnja praznih vagona je

$$B = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^m b_{js}$$

U modelu transportnog problema osnovno ograničenje je oblika

$$A = B$$

Prilagodi se sada model prebacivanja praznih vagona za m dana na model transportnog problema $A = B$. Kako se u "zatvorenom" modelu transportnog problema zahtijeva da ponuda bude jednaka potražnji za slučaj $A > B$ dodaje se fiktivno odredište koje "potražuje" sljedeći broj vagona:

$$b_{n+1,1} = \max\{0, A - B\}$$

$$b_{n+1,2} = 0$$

.....

$$b_{n+1,m} = 0$$

Isto tako se uradi pomoću fiksnog ishodišta za slučaj $A < B$:

$$a_{n+1,1} = \max\{0, B - A\}$$

$$a_{n+1,2} = 0$$

.....

$$a_{n+1,m} = 0$$

Taj zapis omogućuje da se promatraju oba slučaja zajedno, jer je najmanje jedan od brojeva $b_{n+1,1}$ ili $a_{n+1,1}$ jednak nuli.

Ograničenje $A = B$ sada postaje

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{r=0}^m a_{ir} = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{s=1}^m b_{js}$$

to jest, dobiven je transportni problem s $(m+1)(n+1)$ ishodišta i $m(n+1)$ odredišta.

Moguća rješenja x_{ijrs} tako modificiranoga transportnog problema zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{r=0}^m x_{ijrs} = b_{js}; \quad j = 1, 2, \dots, n+1; \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{s=1}^m x_{ijrs} = a_{ir}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1; \quad r = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$x_{ijrs} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n+1; \quad j = 1, 2, \dots, n+1; \\ r = 0, 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, m$$

Među mogućim rješenjima biraju se ona koja imaju realan smisao. Realna rješenja zadovoljavaju vremenska ograničenja. Prije svega, da bi se isključile dostave vagona koje ne bi zadovoljile vremenska ograničenja, stavit će se da su te vrijednosti x_{ijrs} jednake nuli. Veličine x_{ijrs} koji ne zadovoljavaju vremensko ograničenje odnose se na one dostave praznih vagona koje ne mogu biti dostavljeni na vrijeme kolodvorima koji ih potražuju, to jest, to su dostave iz i -tog ishodišta koje su poslate r -tog dana da bi u j -to odredište stigle s -tog dana i pri tom zadovoljavaju uvjet:

$$r + t_{ij} > s$$

Ako, pak dostava zadovoljava uvjet:

$$r + t_{ij} \leq s \quad (5.9)$$

tada je odgovarajuće rješenje $x_{ijrs} > 0$ realno, što znači da će dostava iz i -tog ishodišta stići u j -to odredište ne kasnije od dana kada je potrebno. Znači, moguća rješenja transportnog problema, pored ograničenja (5.8) u ovoj modifikaciji, zadovoljavaju i vremensko ograničenje (5.9). Takva rješenja nazivaju se *realnima*.

Sada je model sveden na klasičan model transportnog problema, ako se samo vrijednostima x_{ijrs} , koje ne zadovoljavaju uvjet (5.9) pridruže veliki transportni troškovi M_{ijrs} [1]. Znači, transportni troškovi c_{ijrs} prebacivanja praznih vagona iz i -tog u j -ti kolodvor definiraju se na sljedeći način:

Očigledno je $c_{ir,n+1,1} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$; $r = 1, 2, \dots, m$) jer veličine $c_{ir,n+1,1}$ označavaju troškove prijevoza praznih vagona kojih ima previše u i -tom kolodvoru r -tog dana i koje treba poslati na fiktivni kolodvor $(n+1)$ prvog dana i $c_{n+1,0js} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n+1$; $s = 1, 2, \dots, m$) jer veličine $c_{n+1,0js}$ označavaju troškove prijevoza praznih vagona koje treba poslati iz fiktivnoga kolodvora uoči početka realizacije plana da bi u j -ti stigli s -tog dana.

Valja napomenuti na kraju da se ovaj matematički model može prilagoditi složenijim pretpostavkama od pretpostavki 1 – 4 na kojima je model konstruiran.

Jedno od bitnih ograničenja je, svakako, prvo, to jest ograničenje da su vagoni istog tipa. Model se može proširiti da se uvedu alternacije za pojedine tipove praznih vagona. Ipak se model usložnjava odbacujući prvo ograničenje.

Od posebnog je praktičnog značenja da se u ovom matematičkom modelu može uzeti u obzir činjenica da kolodvori ne jednōm, nego više puta tijekom dana šalju izvješće centru o broju potrebnih praznih vagona, odnosno o broju praznih vagona koje ti kolodvori mogu poslati drugim kolodvorima. Isto tako, model može uzeti u obzir da se prazni vagoni iz jednog kolodvora mogu prebaciti u drugi i tamo koristiti još istog dana, to jest, može biti $r = s$, odnosno veličine t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) mogu biti proizvoljni brojevi između 0 i m , a ne samo cijeli brojevi u tim granicama.

U ovom matematičkom modelu također nije uzet u obzir prioritet robe koju treba prevoziti. Klasifikacija robe prema prioritetu i naznačavanje i ovih podataka operativnom centru zahtijeva također proširenje matematičkog modela transportnog problema. Takvo proširenje još više će približiti matematički model realnosti.

5.4.5 Minimizacija vremena transporta

Koeficijenti c_{ij} u funkciji cilja $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ do sada su označavali ili jedinične troškove transporta iz ishodišta I_i do odredišta O_j , ili udaljenost od ishodišta do odredišta. Pod optimalnim planom transporta razumijeva se takav plan po kojemu su ukupni troškovi transporta minimalni, ili prema kojemu je ukupni transportni rad minimalan.

Pri prijevozu lako pokvarljive robe nameću se drugi kriteriji optimizacije, jer najvažnije je izvršiti prijevoz u najkraćem vremenu. Naravno, optimalni plan u odnosu na troškove transporta ne mora biti optimalan i u odnosu na vrijeme prijevoza.

Pretpostavimo da koeficijenti c_{ij} označavaju vrijeme izraženo u nekim vremenskim jedinicama (satima, danima) za koje se teret transportira od ishodišta I_i do odredišta O_j . U modelu će se prihvatiti pretpostavka da vrijeme transporta od nekog ishodišta do odredišta ne ovisi o veličini dostave.

Ako se u transportnom problemu postavlja zahtjev da se minimizira zbroj $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, koji označava ukupni broj tona-sati ili vagona-sati, onda se takav

transportni problem naziva transportni problem minimizacije vremena prve vrste. Određivanje optimalnog transporta u tom slučaju ni po čemu se ne razlikuje od nalaženja optimalnog plana kod klasičnoga transportnog problema.

Pri prevoženju lako pokvarljive robe, npr. jagoda, nastoji se minimizirati vrijeme da se sve dostave obave. Takvi transportni problemi s minimiziranim

vremenom svih dostava nazivaju se transportnim problemima minimizacije vremena druge vrste. Matematički model transportnog problema minimizacije vremena transporta druge vrste glasi:

$$\begin{aligned} &\text{Naći skup dostava } x_{ij}, \text{ koji osigurava} \\ &\max \{c_{ij}\} \rightarrow \min \\ &x_{ij} > 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

gdje se minimum traži po svim bazičnim rješenjima, uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.38)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.39)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (5.41)$$

Kao što se vidi, funkcija cilja (5.37) nije linearna funkcija varijabli x_{ij} , pa ovaj problem nije problem linearnog programiranja i ne može se rješavati izloženim metodama.

Prema ideji I.V. Romanovskog [8] uočava se najprije da je osnovni cilj pri rješavanju takvih problema umanjiti maksimalno vrijeme transporta dostave prema bazičnom planu. Zbog toga se ispituje mogućnost smanjenja vrijednosti

$$t_{\max} = \max t_{ij}$$

gdje je

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{za } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{za } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

Ako se uspije naći ono bazično rješenje za koje je t_{\max} najmanji među svim t_{\max} koji odgovaraju bazičnim rješenjima $X = \{x_{ij}\}$ tada će takvo rješenje biti optimalno rješenje transportnog problema minimizacije vremena druge vrste. Simbolično, u ovom problemu se traži takav plan transporta gdje je vrijeme zadnje dostave minimalno i jednako:

$$\begin{aligned} &\min \max t_{ij} \\ &X_k \in \{X\} \quad x_{ij}^k \in X_k \end{aligned}$$

Postupak nalaženja optimalnog rješenja sastoji se u tome da se dani problem zamijeni odgovarajućim transportnim problemom minimizacije vremena prve vrste i time omogući korištenje metoda nalaženja optimalnog rješenja kod klasičnog transportnog problema. Praktično, navedeni postupak svodi se na sljedeće korake:

1. Za dani transportni problem naći početno bazično rješenje.
2. Odrediti t_{\max} u početnom bazičnom rješenju.
3. Veličine c_{ij} zamijeniti veličinama h_{ij} , koje se određuju formulama:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za } c_{ij} < t_{\max} \\ 1 & \text{za } c_{ij} = t_{\max} \\ M & \text{za } c_{ij} > t_{\max} \end{cases} \quad (5.42)$$

gdje je M dovoljno velik pozitivni broj.

Uvođenjem veličina h_{ij} sve prometnice mogu se podijeliti u tri skupine. Prvoj skupini prometnica pripadaju prometnice s vremenom prijevoza koje je manje od maksimalnog, to jest za koje je $h_{ij} = 0$. Te su prometnice pogodne za transport. Drugoj skupini prometnica pripadaju prometnice s vremenom transporta koje je jednako maksimalnom vremenu transporta (u danom bazičnom planu), to jest za koje je $h_{ij} = 1$. Treću skupinu prometnica čine prometnice kod kojih je vrijeme transporta veće od maksimalnog vremena transporta, to jest za koje je $h_{ij} = M$. Prometnice treće skupine su nedopustive (nepoželjne) u novom bazičnom planu, pri traženju prometnica po kojima se izvodi dostava u kraćem vremenu.

4. Na kraju se odrede karakteristike nebazičnih polja (gdje je $x_{ij} = 0$). Ako su sve karakteristike nenegativne, onda je dobiveno bazično rješenje i optimalno, pri čemu se t_{\max} maksimalno vrijeme transporta prema dobivenom planu transporta može umanjiti. Ako je makar jedna od tih karakteristika negativna, tada se traži novo bazično rješenje. Za njega se računaju karakteristike nebazičnih polja i postupak ponavlja dok se ne dođe do optimalnog rješenja.

Postupak će se pokazati na numeričkom primjeru.

Primjer 1.

Dan je zatvoreni transportni problem gdje treba minimizirati vrijeme svih dostava.

Tablica 5.46

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	
I_1	15 (50)	20	25	15	15	50
I_2	10 (25)	25 (35)	20 (40)	40	30	100
I_3	12	18	24 (5)	30 (85)	36 (60)	150
	75	35	45	85	60	

Naći optimalni plan s minimalnim vremenom transporta.

U tablici 5.46 je označeno početno bazično rješenje dobiveno dijagonalnom metodom za koje je

$$\max_{x_{ij} \in X_1} t_{ij} = t_{35} = 36, \quad X_1 - \text{prvo bazično rješenje}$$

Napravi se transformacija prema (5.42) i pomoću koeficijenata redaka i stupaca računaju karakteristike nebazičnih polja.

Tablica 5.47

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5		α_i
I_1	0 (50)	0	0	0	0 -1	50	0
I_2	0 (25)	0 (35)	0 (40)	M	M -1	100	0
I_3	0	0	0 (5)	0 (85)	1 (60)	150	0
	75	35	45	85	60		
β_j	0	0	0	0	1		

Polja (1,5) i (2,5) imaju negativne karakteristike; plan nije optimalan. Polje (1,5) ima manje vrijeme t_{ij} , $t_{15} < t_{25}$, te se želi da polje (1,5) bude bazično. Po lancu (1,5) — (1,1) — (2,1) — (2,3) — (3,3) — (3,5) treba unijeti promjenu za $\delta = \min \{50, 40, 60\} = 40$. Novo bazično rješenje prikazano je u tablici 5.48.

Tablica 5.48

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅		α _i
l ₁	0	0	0	0	0	50	0
l ₂	0	0	0	M	0	100	0
l ₃	0	0	0	0	1	150	1
	75	35	45	85	60		
β _j	0	0	-1	-1	0		

Karakteristike nebazičnih poja (3,1) i (3,2) su negativne; plan u tablici 5.48 nije optimalan. Na lancu (3,1) — (3,5) — (1,5) — (1,1) treba unijeti promjene $\delta = \min \{20, 10\} = 10$. Novi plan prikazan je u tablici 5.49.

Tablica 5.49

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅		α _i
l ₁	0	1	1	0	1	50	0
l ₂	0	0	0	M	0	100	1
l ₃	0	0	0	0	1	150	1
	75	35	45	85	60		
β _j	-1	-1	-1	-1	0		

Plan u tablici 5.49 nije optimalan jer je karakteristika nebazičnog polja (2,5) negativna. Nastavlja se postupak traženja optimalnog rješenja. Plan u tablici 5.50 je optimalan jer su sve karakteristike nebazičnih polja nenegativne.

Tablica 5.50

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅		α _i
l ₁	0	0	0	0	0	50	0
l ₂	0	0	0	M	0	100	0
l ₃	0	0	0	0	1	150	0
	75	35	45	85	60		
β _j	0	0	0	0	0		

Promatraju se vremena t_{ij} iz tablice 5.46 za bazična polja tablice 5.50 i dobije se

$$t_{\max} = \max \{15, 10, 25, 30, 12, 24, 30\} = 30$$

Sve dostave bit će obavljene za 30 vremenskih jedinica (i to se vrijeme ne može smanjiti).

I jednostavno prebacivanje dostava po lancima polja transportne tablice s ciljem isključivanja polja u kojima je vrijeme prevoženja jednako maksimalnom vremenu u dobivenom planu predstavlja pogodnu metodu rješavanja transportnog problema s kriterijem minimalnog vremena svih dostava. Na taj način može se riješiti primjer 1. Prema tablici 4.46 za početno bazično rješenje $\max t_{ij} = t_{35} = 36$.

$$x_{ij} \in X_{ij}$$

Dakle, traži se novi plan da polje (3,5) ne bude bazično. U lancu (3,5) — (2,5) — (2,3) — (3,3) mogu se obaviti promjene tako da se u poljima (3,5) i (2,3) oduzme $\delta = \min \{60, 40\} = 40$, a ista veličina doda na polja (2,5) i (3,3). Novi plan prikazan je u tablici 5.51.

Tablica 5.51

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅		α _i
l ₁	15	20	25	15	15	50	0
l ₂	10	25	20	40	30	100	1
l ₃	12	18	24	30	36	150	1
	75	35	45	85	60		

I dalje je polje (3,5) bazično. U lancu (3,2) — (3,5) — (2,5) — (2,2) mogu se načiniti izmjene za $\delta = \min \{20, 35\} = 20$. Novi transportni plan je prikazan u tablici 5.52.

Tablica 5.52

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅		α _i
l ₁	15	20	25	15	15	50	0
l ₂	10	25	20	40	30	100	0
l ₃	12	18	24	30	36	150	0
	75	35	45	85	60		

(Ova stranica je ostavljena prazna)

Novi transportni plan ima

$$t_{\max} = t_{25} = t_{34} = 30$$

Može se naći i drugi raspored dostava, ali t_{\max} neće biti manje od $t_{25} = t_{34} = 30$.

5 Problemi transporta i distribucije

5.1 Formulacija transportnog problema

Zadatak. Riješite grafičkom metodom problem prijevoza kave iz dvije pržionice P_1 i P_2 u diskonte D_1 , D_2 i D_3 , ako su troškovi, ponuda i potražnja kao u tablici:

	D_1	D_2	D_3	a_i
P_1	3	7	4	40
P_2	3	5	9	56
b_j	22	38	36	

(rješenje: $T = 400$)

Rješavanje transportnog problema može se razdijeliti u tri etape:

- određivanje početnog bazičnog rješenja
- ocjena optimalnosti dobivenog rješenja
- promjena plana

Metode određivanja početnog bazičnog mogućeg rješenja su:

- dijagonalna metoda ili metoda sjeverozapadnog kornera
- metoda najmanje cijene
- VAM - metoda ili Vogelova metoda

Metode ocjenjivanja optimalnosti rješenja transportnog problema su:

- Stepping-stone metoda
- MODI ili modificirana Stepping-stone metoda

Promjena plana koji nije optimalan, provodi se jedino Stepping - stone metodom.

5.2 Zadaci

1. Odredite plan transporta tako da ukupni troškovi budu minimalni. Ponuda, potražnja i jedinični troškovi dani su u tablici:

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
I_1	5	7	8	3	1	300
I_2	2	4	9	5	9	600
I_3	9	11	4	7	9	400
I_4	6	7	9	9	11	700
b_j	150	350	350	500	650	

(rješenje: $T = 9650$)

2. Zrno pšenice sa četiri lokacije treba transportirati u tri silosa. Na prvoj lokaciji ubrano je $400t$, na drugoj $500t$, na trećoj $800t$ i na četvrtoj $500t$ pšeničnog zrna. Kapaciteti silosa su: $700t$ prvog, $800t$ drugog i $700t$ trećeg. Odredite minimalne troškove transporta pšeničnog zrna ako su tablicom dani troškovi transporta jedne tone zrna s i -te lokacije u j -ti silos.

	S_1	S_2	S_3
L_1	1	4	3
L_2	7	1	5
L_3	4	8	3
L_4	4	2	8

(rješenje: $T = 4200$)

3. Transportni je problem zadan tablično:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	15	6	4	90
I_2	1	8	10	5	75
I_3	4	3	6	10	35
b_j	50	50	85	15	

Zadan je plan:

$$x_{11} = 25, x_{13} = 50, x_{14} = 15, x_{21} = 25, x_{22} = 50, x_{33} = 35$$

Poboljšavajte zadani plan do optimalnog Stepping-stone metodom. Odredite plan transporta sa minimalnim troškom i izračunajte trošak (rješenje: $T = 855$)

4. Nadjite optimalni plan i izračunajte minimalni trošak

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
S_1	6	12	14	8	11	95
S_2	10	12	10	3	15	55
S_3	12	15	7	14	4	80
	35	50	40	70	35	

(rješenje: $T = 1530$)

5.3 Degeneracija

Početno bazično moguće rješenje je degenerirano radi postojanja zatvorenog potproblema. Ako je kod konstrukcije početnog bazičnog rješenja jednom bazičnom varijablom moguće istovremeno zadovoljiti i ponudu i potražnju, ostaviti jedno, ili ponudu ili potražnju, i to ono kod kojeg su jedinične cijene nepopunjenih polja pojedinačno manje od drugog.

1. Riješiti transportni problem:

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	3	1	4	50
I_2	5	8	3	40
I_3	2	1	6	85
I_4	4	5	0	15
b_j	90	75	25	

(rješenje: $T = 375$)

2. Riješite transportni problem i izračunajte minimalne troškove transporta

	O_1	O_2	O_3	O_4	
I_1	1	1	6	4	90
I_2	1	8	10	5	75
I_3	4	3	6	2	35
	50	50	85	15	

(rješenje: $T = 725$)

3. Riješite problem transporta, nađite optimalni plan i izračunajte minimalni trošak toga plana

				a_i	
	4	3	6	15	90
	2	8	7	3	70
	4	5	1	10	30
b_j	50	40	85	15	

(rješenje: $T = 630$)

4. Riješite transportni problem:

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	10	12	0	10
I_2	8	4	3	15
I_3	6	9	4	10
I_4	7	8	5	5
b_j	20	5	15	

(rješenje: $T = 170$)

5. Riješite transportni problem zadan tablicom:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	8	1	2	9	50
I_2	5	7	5	3	50
I_3	2	3	9	4	75
b_j	40	55	60	20	

(rješenje: $T = 475$)

6. Iz tri rudnika kapaciteta redom 300, 250 i 450 tona iskopanih dnevno, vozi se ugljen u tri prodajna skladišta ogrijeva: S_1 , S_2 i S_3 . Dnevne potrebe tih skladišta su redom 300, 400 i 300 tona dnevno. Izračunajte najmanju cijenu prijevoza. Cijene prijevoza po jednoj toni iz prvog rudnika u skladišta redom iznose: 1, 3 i 2 novčane jedinice. Cijena po toni za prijevoz iz drugog rudnika u skladišta je 5, 7 i 10, dok iz trećeg redom 3, 1, i 4 novaca.

(rješenje: $T = 2400$)

7. Zadan je transportni problem s četiri ishodišta i tri odredišta. Početno bazično rješenje odredite metodom sjeverozapadnog kuta, a zatim STEP-PING STONE metodom odredite optimalno rješenje. Izračunajte minimalne troškove.

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	10	12	0	20
I_2	8	4	3	30
I_3	6	9	4	20
I_4	7	8	5	10
b_j	40	10	30	

(rješenje: $T = 340$)

8. Odrediti plan transporta sa minimalnim troškovima i izračunati trošak:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
S_1	8	18	16	9	10	90
S_2	10	12	10	3	15	50
S_3	12	15	7	14	4	80
	30	50	40	70	30	

(rješenje: $T = 1840$)

5.4 Otvoreni problem

Otvoren je problem u kojem je

$$\sum_i a_i \neq \sum_j b_j$$

Problem zatvaramo dodavanjem retka ili stupca. Jedinične su cijene u danom retku ili stupcu jednake nuli. Ukoliko je ponuda veća od potražnje, dodaje se stupac i bazično rješenje u tom stupcu predstavlja količinu koja neće biti distribuirana. U suprotnom, dodaje se redak i bazično rješenje u tom retku predstavlja količinu robe koja neće biti dostavljena.

1. Riješiti transportni problem, izračunati ukupne troškove transporta, a sve za prijevoz robe iz četiri skladišta u tri potrošačka centra

	P_1	P_2	P_3	a_i
S_1	12	14	2	35
S_2	10	6	5	45
S_3	8	11	6	30
S_4	9	8	7	25
	40	40	20	

(rješenje: $T = 610$)

2. Riješiti transportni problem:

	P_1	P_2	P_3	ponuda
S_1	0	12	10	30
S_2	8	4	3	40
S_3	6	9	4	25
S_4	7	8	5	20
potražnja	35	35	15	

(rješenje: $T = 610$)

3. Građevinsko poduzeće ima pet gradilišta i četiri naselja za svoje djelatnike. Kapacitet prvog naselja je 200 radnika, drugog 100, trećeg 150 i četvrtog 50 radnika. Za prvo gradilište potrebno je 150, za drugo isto toliko, za treće 50, četvrto 60 i za peto 90 radnika. Ako je cijena

prijevoza jednog radnika od i -tog naselja do j -tog gradilišta zadana tablicom, nađite optimalni plan prijevoza radnika i izračunati minimalne troškove prijevoza:

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
N_1	4	1	2	5	3
N_2	2	1	8	3	5
N_3	4	8	7	1	2
N_4	6	2	5	7	4

(rješenje: $T = 940$)

4. Riješite transportni problem i izračunajte minimalni trošak transporta:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	11	21	13	8	1210
I_2	4	7	10	13	1100
I_3	8	6	11	4	730
b_j	95	325	415	800	

(rješenje: $T = 10285$)

5. Treba naći optimalni program transporta iz tri ishodišta u četiri odredišta na temelju podataka o jediničnim troškovima, ponudi i potražnji. Izračunati minimalne troškove transporta.

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	2	5	9	6	50
I_2	1	7	3	8	60
I_3	5	9	4	4	60
b_j	15	40	65	50	

(rješenje: $T = 630$)

6. Na skladištima je redom po 60,70 i 55 tona robe mjesečno. Šest robnih kuća mjesečno potražuju redom po 20,40,30,55,15 i 35 tona robe. Jedinični troškovi prijevoza iz prvog skladišta u svaku od prodavaonica iznose redom: 3,2,2,3,3 i 1 kunu. Iz drugog skladišta: 2,0,1,1,0 i 1 kunu. Iz trećeg: 1,4,3,4,2 i 0 kuna. Odredite optimalni plan prijevoza i ukupni trošak. (rješenje: $T = 185$).

5.5 Problemski zadaci

1. Na četiri kolodvora ima redom 28,22,36 i 14 vagona. Šest stanica treba redom: 20,15,17,12,8 i 28 vagona. Udaljenosti kolodvora i stanica dane su tablicom. Napravite plan prijevoza tako da umnožak broja vagona i kilometara bude najmanji.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
K_1	20	27	30	35	40	45
K_2	18	35	40	42	50	20
K_3	40	30	35	25	48	40
K_4	21	45	28	32	40	44

2. Transportni problem zadan je tablicom:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	3	1	0	2	8000
I_2	2	3	4	0	7000
I_3	7	5	6	3	10000
I_4	1	1	0	1	3000
b_j	6500	7800	2500	9700	

Odredite minimalne troškove transporta.

3. Nađite optimalni plan prijevoza i izračunajte minimalni trošak transportnog problema zadanog tablicom u kojoj su navedeni ponuda, potražnja i jedinični troškovi transporta.

	O_1	O_2	O_3	a_i
I_1	3	1	5	150
I_2	3	1	2	200
I_3	2	2	1	250
I_4	4	4	6	350
I_5	2	0	3	400
b_j	900	200	400	

Rješenja problemskih zadataka :

1. 2647 vagonskih kilometara
2. $T = 45600$ novčanih jedinica
3. $T = 2950$ novčanih jedinica.

5.6 Zadaci s ispita

1. Naći optimalni plan transporta iz tri skladišta u četiri odredišta. Jedinični troškovi, kapaciteti skladišta i potražnja odredišta dani su u tablici:

	O_1	O_2	O_3	O_4	
I_1	3	15	6	4	50
I_2	10	8	10	5	75
I_3	4	3	6	10	35
	50	50	85	15	

(rješenje: problem zatvoriti dodavanjem retka I_4 kapaciteta 40, jediničnih cijena 0, minimalni $T = 900$)

2. Riješite transportni problem prijevoza koji će minimizirati iznos tonskih kilometara, ako su kilometraže između tvornica i opskrbnih centara, kao ponuda tvornica i potražnja centara u tonama dani u tablici:

	C_1	C_2	C_3	Ponuda
T_1	25	35	30	160
T_2	30	40	40	160
T_3	35	55	45	160
T_4	15	50	30	240
Potražnja	160	280	320	

(rješenje: $T_{min} = 23600$)

3. Transportni je problem zadan tablicom:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	15	15	40	40	80
I_2	9	8	10	15	125
I_3	23	3	6	42	45
b_j	50	60	95	10	

Početno bazično rješenje odredite metodom sjeverozapadnog kornera.

Poboljšavajte početni plan do optimalnog MODI metodom.

(rješenje: $T_{min} = 2075$).

4. Riješite transportni problem, ako svaki neisporučeni transformator donosi štetu od 10 novčanih jedinica. Količine proizvedenih transformatora potražnja za njima i jedinične cijene transporta dani su tablično:

	C_1	C_2	C_3	C_4	a_i
P_1	3	4	2	0	240
P_2	4	3	5	1	280
P_3	2	3	2	4	250
b_j	180	160	220	180	

(rješenje: $T = 1670$, 30 transformatora ostaje u P_2).

5. Riješite transportni problem: nadjite optimalni plan transporta i izračunajte minimalni trošak ako se drugom računskom centru treba isporučiti bar 50% traženih računala. Troškovi transporta, količine računala na raspolaganju i potrebe za računalima dani su tablicom:

	R_1	R_2	R_3	R_4	a_i
I_1	2	5	9	6	80
I_2	1	7	3	8	120
I_3	5	9	4	4	160
b_j	100	40	150	110	

(rješenje: nakon fiktivnog retka uvodi se stupac R'_2 u kojem je potražnja 20, stvarne jedinične cijene podudarne su s cijenama u stupcu R_2 , dok je fiktivna cijena $M \geq 3 \cdot \max(c_{ij})$. Ponuda u stupcu R_2 mijenja se na 20. Nakon uobičajene procedure, minimalni trošak je 1140.)

6. Riješite transportni problem, tako da se iz svakog silosa otkupi bar polovica žita. Količina žita u silosima, potražnja otkupnih stanica i cijene po toni žita dani su tablično:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
S_1	4	3	4	4	200
S_2	4	3	6	2	180
S_3	4	2	4	3	150
b_j	80	60	120	80	

(rješenje: $T = 1080$, treći je silos ispražnjen).

6.4 Minimizacija vremena transporta

Koeficijenti u funkciji cilja sada se interpretiraju kao duljina putovanja. Zadržev se sastoji u tome da što manja količina robe bude na najduljem putu.

Zadaci

1. Izuzetno opasan plin treba prevesti željeznicom. Proizvodnja plina, potražnja i vremena transporta u satima zadana su tablično:

	O_1	O_2	O_3	O_4	proizvodnja
P_1	3	15	6	4	55
P_2	10	8	10	5	80
P_3	4	3	6	10	40
potrebe	55	55	90	20	

(rješenje: Najbolje što se može postići je da 5t putuje iz P_2 u O_3 10h).

2. U Republici Hrvatskoj iznenada je donesen zakon da se kamioni moraju transportirati željeznicom. U Rijeci, Zadru, Šibeniku i Splitu trebamo redom 180, 160, 90 i 100 vagona za prijevoz kamiona. Kotoriba, Dobova, Ploče i Vinkovci imaju na raspolaganju redom: 120, 160, 80 i 150 vagona. Udaljenosti kolodvora u Rijeci do spomenutih odredišta iznosi redom: 280, 170, 300 i 500km. Udaljenost kolodora u Zadru do spomenutih odredišta su redom: 450, 360, 280 i 600km. Šibenik je udaljen redom do spomenutih odredišta 560, 420, 180 i 680km, dok je iz Splita do odredišta po 600, 500, 100 i 780 kilometara. Napravite plan prijevoza po kojem najmanje vagona putuje najvećom kilometražom.

(rješenje: 130 vagona ipak će putovati 600km od Vinkovaca do Zadra i to će biti vagoni koji će najdalje putovati.)

3. Zadan je transportni problem gdje veličine $c_{ij} = t_{ij}$ označavaju vremena transporta u satima. Nadjite minimalno vrijeme svih dostava, ako one počinju istovremeno:

	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
I_1	6	4	3	5	80
I_2	7	4	3	5	70
I_3	8	7	4	3	50
b_j	60	60	60	20	

(rješenje: 60 jedinica putuje 6 sati i to se ne može popraviti.)

4. Riba se izlovljava u uzgajalištima I_1, I_2, I_3 . Svako jutro riba kreće put ribarnica koje se nalaze u mjestima R_1, R_2, R_3 i R_4 . Iz uzgajališta I_1 do ribarnica prijevoz traje redom: 2, 5, 9 i 6 sati. Da bi iz I_2 riba došla u spomenute ribarnice treba po 1, 7, 3 i 8 sati. Konačno, prijevozi iz I_3 traju 5, 9, te po 4 sata do ribarnica R_3 i R_4 . Treba napraviti takav plan da je što je moguće manje ribe na najduljem putu. Na uzgajalištima je na raspolaganju: 80t, 120t, 160t dnevno, a ribarnice potražuju redom: 100t, 40t, 150t i 110t dnevno.

(rješenje: 110t ribe putovat će 4h, dok će ostala riba putovati kraće.)

pri zadovoljenju ograničenja

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Prvo ograničenje ukazuje da jednom izvršiocu može biti dodeljena jedna i samo jedna aktivnost, a drugo da na jednoj aktivnosti može biti angažovan jedan i samo jedan izvršilac. Otuda, ako je r-tom izvršiocu poverena s-ta aktivnost, onda je $x_{rs}=1$, $x_{rj} = 0$ za $j = 1, 2, \dots, n, j \neq s$, i $x_{is} = 0$ za $i = 1, 2, \dots, m, i \neq r$. Gornja ograničenja su data pod pretpostavkom da je jednak broj aktivnosti i izvršilaca ($n=m$).

Pri nepostojanju ravnoteže između izvršilaca i aktivnosti ($m \neq n$) pojavljuje se otvoreni problem raspoređivanja. Za veći broj izvršilaca od broja aktivnosti ($m < n$), druga grupa ograničenja postaje

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

dok za veći broj aktivnosti od broja izvršilaca, prva grupa ograničenja postaje

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Da bi se ovi matematički modeli sve'i na matematički model uravnoteženja izvršilaca i aktivnosti, uvodi se fiktivna aktivnost, odnosno fiktivni izvršilac. Pri čemu su efikasnosti fiktivne aktivnosti $c_{if} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), odnosno fiktivnog izvršioca $c_{jf} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Ovde indeks f označava da se radi o fiktivnoj aktivnosti, odnosno fiktivnom izvršiocu.

50. Zadatak

Pet radnika treba da obave pet poslova. Svaki radnik je osposobljen za izvršenje svih poslova, ali u razmatranom periodu jedan radnik može biti angažovan samo na jednom poslu. Vremena obavljanja poslova od strane radnika u norma časovima data su u tabeli 1.

Izvršiti raspodelu poslova na radnike da bi ukupno vreme izvršenja poslova bilo minimalno.

Rešenje. Matematički model ovoga problema se sastoji u određivanju

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

1.4.5. Metoda raspoređivanja

Problem raspoređivanja spada u problem linearnog programiranja, odnosno u probleme transporta. Sastoji se u raspoređivanju n aktivnosti ili resursa na m izvršilaca ili mesta, pri čemu se želi postići najbolja efikasnost. Polazi se od toga da se jedna aktivnost može dodeliti samo jednom izvršiocu, kao i da je poznata efikasnost i-tog izvršioca na j-toj aktivnosti (c_{ij}). Cilj koji se želi postići može biti: najkraće vreme za izvršenje projekta, najniži ukupni troškovi, najkraći ukupni putevi, najveća dobit, i slično.

Raspored n aktivnosti na m izvršilaca moguće je obaviti na $n!$ načina (broj permutacija od n elemenata). Ako se raspoređuje 5 aktivnosti na 5 izvršilaca, onda za to postoji $5! = 120$ rešenja, dok za raspored 10 aktivnosti na 10 izvršilaca ima $10! = 3628800$ rešenja. Uočljivo je, da razmatranje svih rešenja i iznalaženje najpovoljnijeg, zahteva mnogo vremena. Potrebno vreme se naglo povećava sa porastom broja aktivnosti i izvršilaca. Ovo ukazuje na prednost iznalaženja metode koja će dovesti do optimalnog rešenja bez razmatranja svih mogućnosti. Ako je i-tom izvršiocu dodeljena j-ta aktivnost, onda se uzima da je $x_{ij} = 1$, dok je u suprotnom $x_{ij} = 0$.

Matematička formulacija problema raspoređivanja može se iskazati na sledeći način. Potrebno je odrediti nenegativne vrednosti promenljivih x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, koje daju optimalnu vrednost funkciji

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-tom radniku dodeljen } j\text{-ti posao} \\ 0, & \text{ako } i\text{-tom radniku nije dodeljen } j\text{-ti posao.} \end{cases}$$

Tabela 1.

RADNICI \ POSLOVI	POSLOVI				
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
R ₁	3	21	12	6	10
R ₂	8	23	2	5	5
R ₃	33	14	13	10	7
R ₄	14	21	19	11	11
R ₅	9	16	10	15	13

Za probleme kao što je ovaj (jednak broj radnika i poslova) kaže se da imaju kvadratnu matricu efikasnosti C.

Algoritam iznalaženja optimalnog rešenja bazira na matrici efikasnosti C, jer promenljive mogu imati vrednost 1 ili 0. Algoritam se sastoji iz više koraka:

1. Od svih elemenata kolone oduzima se najmanji element kolone.
2. Ustanovljava se da li postoji u svakom redu bar jedna nula. Ako to nije slučaj, od svih elemenata redova bez nule oduzima se najmanji element toga reda.
3. Razvrstavaju se nule na nezavisne i zavisne. Počinje se od reda koji ima samo jednu nulu. Ta nula se uvrštava u nezavisne. Sve nule koje se nalaze u koloni sa ovom nulom uvrštavaju se u zavisne. Po završetku redova sa jednom nulom prelazi se na redove sa više nula. Pri tome se proizvoljno proglašava neka od nula nezavisnom.

4. - Ispituje se optimalnost rešenja. Ako ima nezavisnih nula koliko i aktivnosti, odnosno izvršilaca, onda je iznađeno optimalno rešenje. Ukoliko je manji broj nezavisnih nula postupak se produžava kao što sledi:

- a) označiti redove ^{bez} nezavisnim nulama (*);
 - b) označiti (precrtati) sve kolone koje imaju zavisne nule u označenim redovima;
 - c) označiti redove (*) koji imaju nezavisnu nulu u označenim kolonama;
 - d) označiti (precrtati) kolone koje imaju zavisnu nulu u novo označenom redu;
- postupci pod c) i d) se uzajamno smenjuju dok se ne dođe do označenih redova bez zavisne nule ili precrtanih kolona bez nezavisne nule;
- e) posebno označiti (precrtati) sve redove koji nisu označeni po postupcima pod a) i c);
 - ovo omogućuje da se najmanjim brojem linija precrtaju sve nezavisne nule, tj. broj linija je jednak broju nezavisnih nula;
 - f) pronaći najmanji neprecrtani element;
 - g) vrednost najmanjeg elementa, utvrđenog pod f), dodati elementima koji se nalaze na preseku precrtanih kolona i redova;
 - h) vrednost najmanjeg elementa oduzeti od svih neprecrtanih elemenata;
 - i) svi ostali precrtani elementi se ne menjaju;
 - j) u novodobijenoj matrici izvršiti razvrstavanje nula na nezavisne i zavisne.
- Primenu ovoga algoritma ilustrovaćemo našim primerom.

Tabela 2.

RADNICI \ POSLOVI	POSLOVI				
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
R ₁	0	7	10	1	5
R ₂	5	9	0	0	0
R ₃	30	0	11	5	2
R ₄	11	7	17	6	6
R ₅	6	2	8	10	8

1) Od svih elemenata kolone (tabela 1) oduzet je najmanji element te kolone i dobijena je nova matrica (tabela 2).

2) Kako u četvrtom i petom redu ne postoji nula, to najmanje elemente ovih redova oduzimamo od ostalih. Tako smo dobili matricu datu tabelom 3.

Tabela 3.

POSLOVI	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
RADNICI					
R₁	0	7	10	1	5
R₂	5	0	11	∅	∅
R ₃ *	30	0	11	5	2
R₄	5	1	11	0	∅
R ₅ *	4	∅	6	8	6

3) U tabeli 3 razvrstali smo nule na zavisne i nezavisne. Pošli smo od prvog reda i proglasili njegovu nulu u prvoj koloni za nezavisnu (uokvirena), jer je to jedina nula u ovom redu. Treći i peti red imaju po jednu nulu ali u istoj – drugoj koloni, pa smo uzeli da je nula u trećem redu nezavisna. To je uslovalo da nulu u petom redu svrstamo u zavisne (precrtana). Drugi i četvrti red imaju više nula, pa smo odabrali da u drugom redu i trećoj koloni, odnosno u četvrtom redu i četvrtoj koloni bude nezavisna nula.

4) Ustanovili smo da rešenje nije optimalno, jer ima 4 nezavisne nule, a matrica je dimenzije 5 x 5.

- Označili smo red bez nezavisne nule (R₅).
- Precrtali smo kolonu sa zavisnom nulom u označenom redu (P₂).
- Označili smo red (R₃) sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni.
- Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u trećem redu, te je završeno obeležavanje redova i precrtavanje kolona.
- Precrtali smo neobeležene redove (R₁, R₂ i R₄). Broj linija je jednak broju nezavisnih nula – četiri.
- Najmanji neprecrtani elemenat je 2 u polju (3; 5).
- Dodali smo vrednost ovog elementa vrednostima svih dvostruko precrtanih elemenata.
- Oduzeli smo vrednost ovog elementa od svih neprecrtanih elemenata. Tako smo dobili matricu datu tabelom 4.

j) Pošto u prvom redu postoji jedna nula, uzeli smo je za nezavisnu. Takođe u petom redu postoji jedna nula i svrstali smo je u nezavisne. To je uslovalo da se nula u polju (3; 2) proglasi zavisnom. Potom smo morali nulu u polju (3; 5) uzeti za nezavisnu, a nule u istoj koloni za zavisne. Dalje je bilo uslovljeno da uzmemo

nulu u polju (4; 4) za nezavisnu, odnosno u polju (2; 1) za zavisnu i u polju (2; 3) za nezavisnu.

Tabela 4.

POSLOVI	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
RADNICI					
R ₁	0	9	10	1	5
R ₂	5	11	0	∅	∅
R ₃	28	∅	9	3	0
R ₄	5	3	11	0	∅
R ₅	2	0	4	6	4

Pošto smo dobili pet nezavisnih nula, dobijeno rešenje je optimalno. Znači, u optimalnom rešenju su:

$$x_{11} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{35} = 1, \quad x_{44} = 1 \quad \text{i} \quad x_{52} = 1,$$

a sve ostale promenljive imaju vrednost nula. Optimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi

$$\begin{aligned} \min F(X) &= c_{11}x_{11} + c_{23}x_{23} + c_{35}x_{35} + c_{44}x_{44} + c_{52}x_{52} = \\ &= c_{11} + c_{23} + c_{35} + c_{44} + c_{52} = 3 + 2 + 7 + 11 + 16 \\ &= 39 \text{ norma časova.} \end{aligned}$$

Konstatujemo, najbolja efikasnost se postiže (najkraće: ukupno vreme izvršenja zadatka) ako se prvom radniku poveri prvi posao, drugom radniku treći posao, trećem radniku peti posao, četvrtom radniku četvrti posao i petom radniku drugi posao. Najkraće vreme za koje ovi radnici mogu obaviti ove poslove je 39 norma časova.

51. Zadatak

Radna organizacija je nabavila 4 mašine, specijalizovane za proizvodnju pojedinog sastavnog dela složenog proizvoda. Potrebno je zaposliti 4 radnika na ove mašine, s obzirom da jedan radnik može raditi istovremeno samo na jednoj

mašini. Konkursna komisija radne organizacije je odlučila da osnovni kriterijum za izbor radnika bude škart na proizvodima. Svaki radnik je proizveo isti broj proizvoda na svakoj mašini. Pri tome je bio procenat škarta na proizvodima kao što je dato u tabeli 1. Kako rasporediti radnike na mašine da bi ukupni procenat škarta na proizvodima bio najmanji?

Tabela 1.

MAŠINE \ RADNICI	MAŠINE			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁	3	6	7	8
R ₂	2	3	1	4
R ₃	4	10	6	9
R ₄	1	9	4	8

Rešenje. Matematički model ovoga problema se sastoji u određivanju

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij},$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } i\text{-ti radnik radi na } j\text{-toj mašini} \\ 0, & \text{ako } i\text{-ti radnik ne radi na } j\text{-toj mašini.} \end{cases}$$

Primena algoritma metode raspoređivanja.

- c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R₁).
- d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, te je završeno

Tabela 2.

MAŠINE \ RADNICI	MAŠINE			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁	2	3	6	4
R ₂	1	0	0	0
R ₃	3	7	5	5
R ₄	0	6	3	4

- 2. U prvom i trećem redu nema nule, pa se najmanji elemenat ovih redova oduzima od ostalih elemenata. Tako se dobija tabela 3.
- 3. U tabeli 3 razvrstane su nule na nezavisne i zavisne.

Tabela 3.

MAŠINE \ RADNICI	MAŠINE			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁ *	0	1	4	2
R₂	1	0	0	0
R ₃ *	3	4	2	2
R ₄ *	0	6	3	4

- 4. Rešenje nije optimalno, jer postoje samo dve nezavisne nule.
 - a) Označeni su redovi bez nezavisnih nula (R₃ i R₄).
 - b) Precrtana je kolona sa zavisnom nulom u označenom redu (M₁).
 - c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R₁).
 - d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, te je završeno obeležavanje redova i precrtavanje kolona.

- e) Precrtani su neobeleženi redovi (R_2).
 f) Najmanji neprecrtani elemenat je 1 u polju (1; 2).
 g) Dodat je najmanji elemenat dvostruko precrtanom elementu.
 h) Oduzet je ovaj elemenat od svih neprecrtanih elemenata
 i) Prepisivanjem jednostruko precrtanih elemenata dolazi se do tabele 4.

Tabela 4.

MAŠINE \ RADNICI	MAŠINE			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁	∅	0	3	1
R ₂	2	∅	0	∅
R ₃ *	0	5	3	3
R ₄ *	∅	7	4	5

j) Izvršeno je razvrstavanje nula u tabeli 4.

Dobijeno rešenje nije optimalno, jer postoje samo tri nezavisne nule, pa se postupak ponavlja od a) do j).

Tabela 5.

MAŠINE \ RADNICI	MAŠINE			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁	3	0	3	1
R ₂	5	∅	0	∅
R ₃	∅	2	∅	0
R ₄	0	4	1	2

Rešenje dato tabelom 5 je optimalno rešenje. Pri razvrstavanju nula proizvoljno smo uzeli da su nezavisne nule u drugom redu i trećoj koloni i u trećem redu i četvrtoj koloni. Mogli smo uzeti za nezavisne nule u drugom redu i četvrtoj koloni i trećem redu i trećoj koloni.

Ovo ukazuje da su optimalna rešenja:

prvo

$$x_{12} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{34} = 1, \quad x_{41} = 1, \quad i$$

drugo

$$x_{12} = 1, \quad x_{24} = 1, \quad x_{33} = 1, \quad x_{41} = 1.$$

Minimalna vrednost funkcije kriterijuma je

$$\min F(X) = c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{41} = 6 + 1 + 9 + 1 = 17,$$

odnosno

$$\min F(X) = c_{12} + c_{24} + c_{33} + c_{41} = 6 + 4 + 6 + 1 = 17.$$

Najbolje je rasporediti prvog radnika na drugu mašinu, drugog radnika na treću (ili četvrtu), trećeg radnika na četvrtu (ili treću) i četvrtog na prvu. Tada će škart na drugom proizvodu iznositi 6 procenata, na trećem 1 (ili 6) procenat, na četvrtom 9 (ili 4) procenata i na četvrtom 1 procenat. Prosečan škart na svim delovima će iznositi $17 : 4 = 4,25$ procenata.

52. Zadatak

U mašinskom odeljenju radne organizacije potrebno je obaviti četiri posla. Ovi poslovi se mogu obavljati na šest mašina. Na svakoj mašini može se raditi svaki posao, ali istovremeno samo jedan. Na ovim poslovima treba angažovati četiri mašine a dve izdvojiti za druge poslove. Vreme za obradu poslova na mašinama (u norma časovima) dato je u tabeli 1.

Kako rasporediti poslove na mašine, pa da utrošeno vreme za obavljanje svih poslova bude što manje?

Rešenje. Matematički model ovoga problema ima sledeći oblik

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

uz zadovoljenje ograničenja

$$\sum_{i=1}^6 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad i$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } j\text{-ti posao dodeljen } i\text{-toj mašini} \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Tabela 1.

POSLOVI MAŠINE	POSLOVI			
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
M ₁	9	12	7	12
M ₂	14	10	9	11
M ₃	8	15	11	15
M ₄	12	13	8	14
M ₅	10	11	10	10
M ₆	11	14	12	9

Ovo je otvoreni problem raspoređivanja, te da bi se njegov matematički model sveo na matematički model zatvorenog problema raspoređivanja potrebno je dodati dva fiktivna posla P₅ i P₆, sa vremenom obrade $c_{i5} = c_{i6} = 0$ $i = 1, 2, \dots, 6$. Za ovakve se probleme kaže da su problemi sa *nekvadratnom matricom* efikasnosti.

Posle dodavanja dva fiktivna posla dobija se sledeća kvadratna matrica (tabela 2).

Tabela 2.

POSLOVI MAŠINE	POSLOVI					
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
M ₁	9	12	7	12	0	0
M ₂	14	10	9	11	0	0
M ₃	8	15	11	15	0	0
M ₄	12	13	8	14	0	0
M ₅	10	11	10	10	0	0
M ₆	11	14	12	9	0	0

1. Najmanji element svake kolone oduzet je od svih ostalih elemenata te kolone i dobijena je tabela 3.

Tabela 3.

POSLOVI MAŠINE	POSLOVI					
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
M ₁	1	2	0	3	8	12
M ₂	6	0	2	2	10	11
M ₃	0	5	4	6	15	15
M ₄	4	3	1	5	0	14
M ₅	2	1	3	1	11	0
M ₆	3	4	5	0	14	9

2. U svakom redu postoji bar jedna nula, pa nema potrebe za oduzimanje najmanjeg od ostalih elemenata bilo koga reda.

3. Posle razvrstavanja nula na zavisne i nezavisne dobilo se da ima 6 nezavisnih nula, što je dokaz da je iznađeno optimalno rešenje.

Optimalno rešenje je:

$$x_{13} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{45} = 1, \quad x_{56} = 1, \quad x_{64} = 1.$$

Drugim rečima, prvi posao treba obradivati na trećoj mašini, drugi na drugoj, treći na prvoj i četvrti na šestoj. Mašine M₄ i M₅ neće biti upotrebljene za obavljanje ovih poslova. Promenljive x_{45} i x_{56} sudopunskepromenljive i one ovde ukazuju koje mašine neće biti angažovane.

Minimalno vreme za koje je moguće obaviti ove poslove iznosi:

$$\begin{aligned} \min F(X) &= c_{13}x_{13} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{45}x_{45} + c_{56}x_{56} + c_{64}x_{64} = \\ &= 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 34 \text{ norma časova.} \end{aligned}$$

53. Zadatak

Radna organizacija treba da otvori četiri nova radna mesta. Raspisan je konkurs. U užu izbor je ušlo pet kandidata. Izvršena je provera njihove stručne sposobnosti za obavljanje poslova. Broj osvojenih poena dat je u tabeli 1.

Tabela 1.

RADNA MESTA	RADNICI			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
R ₁	5	6	5	1
R ₂	4	6	4	1
R ₃	8	6	7	6
R ₄	2	4	4	4
R ₅	6	10	9	4

Kako rasporediti radnike na radna mesta, pa da ukupna efikasnost bude najveća? Koji radnik neće biti primljen?

Rešenje. Matematički model ovog problema je:

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i\text{-ti radnik određen na } j\text{-to mesto} \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Karakteristično svojstvo ovoga problema raspoređivanja je *iznalaženje maksimalne vrednosti funkcije kriterijuma*. Ovaj problem spada takođe u otvorene probleme, jer je manji broj radnih mesta nego kandidata. Svođenje ovoga matematičkog modela na zatvoreni matematički model vrši se dodavanjem fiktivnog radnog mesta (M₅), kao što je urađeno u tabeli 2.

Tabela 2.

RADNA MESTA	RADNICI				
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁	5	6	5	1	0
R ₂	4	6	4	1	0
R ₃	8	6	7	6	0
R ₄	2	4	4	4	0
R ₅	6	10	9	4	0

Kako se traži maksimalna vrednost funkcije F(X) postupak za rešavanje je sledeći:

1. U svakoj koloni se od svih elemenata oduzima najveći element. Tako je dobijena tabela 3.

Tabela 3.

RADNA MESTA	RADNICI				
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁	-3	-4	-4	-5	0
R ₂	-4	-4	-5	-5	0
R ₃	0	-4	-2	0	0
R ₄	-6	-6	-5	-2	0
R ₅	-2	0	0	-2	0

2. Znajući da je $\max F(X) = C \cdot X = \min F_1(X) = -CX$ množe se elementi tabele 3 sa (-1) i dalje rešavanje se nastavlja po postupku za iznalaženje minimalne vrednosti funkcije kriterijuma.

Tabela 4.

RADNA MESTA \ RADNICI	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁ *	3	4	4	5	0
R ₂ *	4	4	5	5	∅
R ₃ - - -	0	4	2	∅	∅
R ₄ *	6	6	5	2	∅
R ₅	2	0	∅	2	∅

3. U tabeli 4 razvrstane su nule na zavisne i nezavisne.
4. Rešenje nije optimalno, jer postoje samo tri nezavisne nule.
 - a) Označeni su redovi bez nezavisnih nula (R₂ i R₄).
 - b) Precrtane su kolone sa zavisnom nulom u označenom redu (M₅).
 - c) Označen je red sa nezavisnom nulom u precrtanoj koloni (R₁).
 - d) Ne postoji kolona sa zavisnom nulom u prvom redu, pa je precrtavanje kolona i obeležavanje redova završeno.
 - e) Precrtani su neobeleženi redovi.
 - f) Najmanji neprecrtani elemenat je 2 u polju (4; 4).
 - g) Najmanji elemenat je dodat dvostruko precrtanim elementima.
 - h) Oduzet je najmanji elemenat od svih neprecrtanih elemenata.
 - i) Prepisani su precrtani elementi i dobijena je tabela 5.

Tabela 5.

RADNA MESTA \ RADNICI	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁ *	1	2	2	3	0
R ₂ *	2	2	3	3	∅
R ₃ - - -	0	4	2	∅	2
R ₄ - - -	4	4	3	0	∅
R ₅ - - -	2	0	∅	2	2

Pošto rešenje dato tabelom 5 nije optimalno ponovljen je postupak pod a) do i) i dobijena tabela 6.

Tabela 6.

RADNA MESTA \ RADNICI	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁ *	0	1	1	2	∅
R ₂ *	1	1	2	2	0
R ₃ *	∅	4	2	0	3
R ₄ *	4	4	3	∅	1
R ₅ - - -	2	0	∅	2	3

Kako rešenje dato tabelom 6 nije optimalno postupak je ponovljen i dobijena je tabela 7.

Tabela 7.

RADNA MESTA	RADNICI				
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁	0	0	0	2	0
R ₂	1	0	1	2	0
R ₃	0	3	1	0	3
R ₄	4	3	2	0	1
R ₅	3	0	0	3	4

Tabela 8.

RADNA MESTA	RADNICI				
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
R ₁	0	0	0	2	0
R ₂	1	0	1	2	0
R ₃	0	3	1	0	3
R ₄	4	3	2	0	1
R ₅	3	0	0	3	4

Razvrstavanjem nula na zavisne i nezavisne dobijena su optimalna rešenja:

– prvo (tabela 7)

$$x_{13} = 1, \quad x_{25} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{44} = 1, \quad x_{52} = 1$$

$$F(X_2^*) = c_{13}x_{13} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{44}x_{44} + c_{52}x_{52} = \\ = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 27$$

– drugo (tabela 8)

$$x_{13} = 1, \quad x_{25} = 1, \quad x_{31} = 1, \quad x_{41} = 1, \quad x_{52} = 1$$

$$F(X_2^*) = c_{13}x_{13} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{44}x_{44} + c_{52}x_{52} = \\ = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 27.$$

Na osnovu prvog optimalnog rešenja konstatujemo da na prvo-radno mesto treba rasporediti treceg radnika, na drugo drugog, na trece petog i na cetvrto cetvrtog. Prvi radnik nece biti zaposlen.

Na osnovu drugog optimalnog rešenja treba na radna mesta (M₁, M₂, M₃ i M₄) rasporediti treceg, petog, prvog i cetvrtog radnika, respektivno. Drugi radnik nece biti zaposlen.

Znaci, konkursna komisija mora iznaci novi kriterijum na osnovu koga ce odluciti da li da zaposli prvog ili drugog radnika.

53. Zadatak

Preduzeće proizvodi n različitih tipova mašina. Za realizaciju proizvodnje potrebno je m različitih vrsta resursa sa kojima se raspolaze u ograničenim količinama $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_m$. Poznato je:

a_{ij} – normativ utroška i -tog resursa za proizvodnju jedne j -te mašine,

c_j – dobit ostvarena isporukom jedne mašine j -tog tipa ($j = 1, 2, \dots, n$).

Pretpostavlja se da na kraju planskog perioda nije poželjno imati nedovršenih mašina.

Formirati matematički model problema, pod uslovom da preduzeće želi ostvariti maksimalnu dobit od proizvodnje.

Rešenje. Matematički model sačinjava funkcija cilja koja definiše ukupnu dobit koja će se ostvariti u planskom periodu,

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

koja zavisi od raspoloživih resursa, tj. uslovi u kojima se ostvaruje proizvodnja definisani su sistemom jednačina

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Brojne vrednosti promenljivih mogu biti samo celi brojevi.

54. Zadatak

Proizvodni proces karakteriše se sa n različitih vrsta poslova ($j = 1, 2, \dots, n$), odnosno radnih operacija. U planskom periodu kvantitativne mere za pojedine operacije su $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n$. Takođe, zadata je matrica $\|r_{ij}\|$ gde je r_{ij} – produktivnost i -tog tipa mašine na j -tom poslu, zatim, matrica $\|c_{ij}\|$, gde su c_{ij} – troškovi obavljanja j -tog posla na mašini i -tog tipa, kao i cene c_j jedne mašine i -tog tipa.

2.6.3. Celobrojno programiranje

Problemi celobrojnog programiranja u opštem slučaju svode se na rešavanje zadataka linearnog i nelinearnog programiranja gde se kao poseban uslov postavlja da brojne vrednosti promenljivih moraju biti celi nenegativni brojevi. Kao posebna klasa zadataka celobrojnog programiranja izdvajaju se zadaci kombinatornog karaktera, gde promenljive u matematičkom modelu mogu uzeti samo vrednost "1" ili "0".

Problem celobrojnosti promenljivih nameće se vrlo često kod određene klase realnih problema. U sledećim primerima biće data opšta formulacija nekih tipičnih zadataka celobrojnog programiranja.

Formirati matematički model zadatka iznalaženja optimalnog mašinskog parka, (tj. brojni iznos mašina za svaki tip), kao i određivanja optimalne raspodele mašina na određene poslove pod uslovom da se ostvare minimalni ukupni troškovi realizacije proizvodnog procesa.

Rešenje. Matematički model problema formira se tako što se uvode promenljive:

y_i – ukupan broj mašina i-tog tipa, $i = 1, 2, \dots, m$.

x_{ij} – broj mašina i-tog tipa koje se koriste za izvršenje j-te vrste posla.

Očigledno je da promenljive y_i moraju biti celi brojevi, dok promenljive x_{ij} ne moraju ako se produktivnost mašina r_{ij} nije deljiva bez ostatka sa odgovarajućim vrednostima b_j .

Polazeći od navedenih oznaka ukupne troškove u planskom periodu možemo definisati sledećim izrazom

$$(\min) F(X, Y) = \sum_{i=1}^m c_i y_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} x_{ij}.$$

Potrebne količine mašina definisane su sledećim sistemom jednačina

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

gde su promenljive $x_{ij} \geq 0$, dok su $y_i \geq 0$ i celobrojne vrednosti.

Zadatak se sastoji u tome da se odrede takve celobrojne vrednosti promenljivih y_i i vrednosti promenljivih x_{ij} za koje će funkcija $F(X, Y)$ imati minimalnu vrednost, a ograničenja neće biti narušena.

55. Zadatak

Planskom organu pomorskog transporta stoje na raspolaganju m različitih tipova brodova u količinama od $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m$. Na svakom od brodova postoji n različitih prostora za utovar robe ($j = 1, 2, \dots, n$), čiji su kapaciteti u

odnosu na vrstu robe d_{ijk} (podrazumeva se da za određene vrednosti indeksa $i - j$ veličina d_{ijk} može biti jednaka nuli). Potrebno je prevesti r različitih vrsta robe u količinama $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_r$.

Formirati matematički model zadatka određivanja optimalnog sastava brodova, ako su troškovi eksploatacije jednog broda i-tog tipa c_i .

Rešenje. Optimalni sastav brodova formira se na bazi minimizacije ukupnih troškova eksploatacije, tj. treba odrediti brojne vrednosti skupa promenljivih $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$, za koje funkcija

$$F(Y) = \sum_{i=1}^m c_i y_i$$

ima minimalnu vrednost.

Ako sa x_{jk} označimo broj jedinica robe k-te vrste utovarene u j-ti prostor, tada se ograničenja mogu definisati na sledeći način

$$\sum_{i=1}^m d_{ijk} y_i - x_{jk} > 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jk} = b_k$$

$$0 < y_i < q_i \text{ i } x_{jk} > 0$$

gde indeksi uzimaju vrednosti: $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r$.

Promenljive u modelu y_i i x_{jk} moraju biti celi brojevi

56. Zadatak

Problem planiranja upotrebe transportnih sredstava može se definisati na sledeći način. Postoji m različitih vrsta transportnih sredstava, koja se mogu koristiti u ograničenom broju časova, $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$. Ova sredstva treba upotrebiti na n različitih marš-ruta, pri čemu se na svakoj marš-ruti mora ostvariti određeni broj putovanja, što se definiše vrednostima $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$. Za izvršenje jednog putovanja i-tom mašinom na j-toj marš-ruti potrebno je t_{ij} časova, uz troškove c_{ij} .

Formirati matematički model celobrojnog programiranja, ako se želi optimalno raspodeliti transportna sredstva tako da troškovi transporta budu minimalni.

Rešenje. Ako se sa x_{ij} označi broj izvršenih putovanja od strane i -tog transportnog sredstva upotrebljenog na j -toj marš-ruti, tada će ukupni troškovi transporta biti definisani izrazom,

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Pri upotrebi transportnih sredstava moraju biti zadovoljena ograničenja

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \leq a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i opšti uslov da sve promenljive u modelu moraju biti veće od nule i celobrojne.

2.6.4. Metode rešavanja zadataka celobrojnog programiranja

Za rešavanje zadataka celobrojnog programiranja postoje različite metode koje baziraju na svojstvima pojedinih klasa zadataka celobrojnog programiranja.

Metoda odsečaka – bazira na sukcesivnom rešavanju konačnog broja specijalno formiranih zadataka linearnog programiranja. Svaki od zadataka formuliše se na osnovi prethodnog, dodajući već postojećim ograničenjima novo linearno ograničenje – "odsečak". Ovaj metod biće ilustrovan na konkretnim primerima.

57. Zadatak

Zadatak celobrojnog programiranja svodi se na matematički model sa funkcijom cilja

$$(\max) F(X) = x_1 + 4x_2$$

i uslovima definisanim linearnim ograničenjima,

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Potrebno je naći celobrojne vrednosti promenljivih x_1 , x_2 , x_3 i x_4 koje obezbeđuju maksimum funkcije $F(X)$, a istovremeno zadovoljavaju i ograničenja, definisana sistemom jednačina.

Rešenje. Algoritam za rešavanje postavljenog zadatka definisan je sa tri nezavisna koraka.

1. korak. U ovom koraku zanemaruje se uslov celobrojnosti i rešava se zadatak linearnog programiranja L_0 .

Primenom simpleks metode dobija se traženo rešenje, koje je prikazano tabelama 1, 2 i 3.

Tabela 1.

C_0	B	X_0	1	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	2	-1	2	1	0
0	x_4	6	3	2	0	1
$F_j - c_j$		0	-1	-4	0	0

Tabela 2.

C_0	B	X_0	1	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_2	1	-1/2	1	1/2	0
0	x_4	4	4	0	-1	1
$F_j - c_j$		4	-3	0	2	0

Tabela 3.

C ₀	X	X ₀	1	4	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
4	x ₂	3/2	0	1	3/8	1/8
1	x ₁	1	1	0	-1/4	1/4
F _j - c _j		7	0	0	5/4	3/4

Dobijeno rešenje zadatka L₀ je

$$X^0 = (1; \frac{3}{2}; 0; 0) \text{ i } F(X) = 7.$$

Kako ovo rešenje nije celobrojno, prelazi se na drugi korak.

2. korak. Na osnovu poslednje simpleks tabele u 1. koraku formira se "odsečak" – novo linearno ograničenje sa kojim se proširuje simpleks tabela i formira novi zadatak linearnog programiranja L₁.

U opštem slučaju novo ograničenje se formira na sledeći način. Ako se uvedu oznake:

- { a } – decimalni deo broja a,
- [a] – najveći ceo broj manji ili jednak datom broju a,
- k – indeksi promenljivih koje u poslednjoj simpleks tabeli ne pripadaju bazi,
- s – broj reda u poslednjoj simpleks tabeli sa najvećom vrednošću a_{s0},

tada se novo ograničenje (Gomory-jev odsečak) može pisati u obliku

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} \cdot x_k \leq 0.$$

U gornjem primeru je:

$$\{a_{s0}\} = \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2}, \quad k = 3 \text{ i } 4,$$

$$\{a_{s3}\} = \left\{ \frac{3}{8} \right\} = \frac{3}{8} \text{ i } \{a_{s4}\} = \left\{ \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8}.$$

Prema tome, ograničenje je oblika

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4 \leq 0,$$

a uvođenjem nove izravnavajuće promenljive dobija se

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - u_1 = \frac{1}{2},$$

ili ako jednačinu pomnožimo sa -1 dobija se izraz

$$-\frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4 + u_1 = -\frac{1}{2}.$$

3. korak. Dodajući novo dobijeno ograničenje u poslednju simpleks tabelu dobija se početna simpleks tabela zadatka L₁.

Tabela 4.

C	B	X ₀	1	4	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁
4	x ₂	3/2	0	1	3/8	1/8	0
1	x ₁	1	1	0	-1/4	1/4	0
0	u ₁	-1/2	0	0	-3/8	-1/8	1
F _j - c _j		7	0	0	5/4	3/4	0

Tabela 4 ne sadrži moguće rešenje problema (jer je u₁ = -1/2). Cilj dalje transformacije je dobijanje početnog mogućeg rešenja. Zato se u redu u₁ bira kolona r sa najvećim negativnim brojem i proverava se da li se dobija

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} \right\}$$

Za ono i koje odgovara negativnoj promenljivoj u_1 . Ako je uslov ispunjen tada u novu bazu ulazi promenljiva x_1 . U slučaju da ovo nije ispunjeno ide se na novu kolonu sa negativnim brojem.

U ovom primeru promenljiva x_3 ulazi u sledeće bazno rešenje, koje je istovremeno i moguće rešenje (tabela 5).

Tabela 5.

C ₀	B	X ₀	1	4	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁
4	x ₂	1	0	1	0	0	1
1	x ₁	4/3	1	0	0	1/3	-2/3
0	x ₃	4/3	0	0	1	1/3	-8/3
F _j - c _j		16/3	0	0	0	1/3	10/3

U tabeli 5 dobijeno je optimalno rešenje problema koje nije celobrojno. Prema tome, vraćamo se na korak 2.

2. korak. Formira se novo ograničenje i novi zadatak L₂. Ograničenje se formira na bazi reda x₁, otuda je

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \cdot x_4 - \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cdot u_1 < 0.$$

$$\text{Kako je } \left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} \quad \text{i}$$

$$\left\{-\frac{2}{3}\right\} = -\frac{2}{3} - \left\{-\frac{2}{3}\right\} = -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}$$

to će ograničenje biti sledećeg oblika

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}u_1 + u_2 = 0,$$

gde je u₂ nova izravnavajuća promenljiva. Prema tome, konačna forma ograničenja je

$$-\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}u_1 + u_2 = -\frac{1}{3}.$$

Napomena. Pri određivanju decimalnog dela negativnog mešovitog broja treba imati u vidu opšti izraz

$$\{-a\} = -a - [-a].$$

3. korak. Dodajući napred formirano ograničenje iz prethodnog koraka u poslednju simpleks tabelu (tabela 5) dobija se početna simpleks tabela za ovaj korak.

Tabela 6.

C ₀	B	X ₀	1	4	0	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁	u ₂
4	x ₂	1	0	1	0	0	0	0
1	x ₁	4/3	1	0	0	1/3	-2/3	0
0	x ₃	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0
0	u ₂	-1/3	0	0	0	-1/3	-1/3	1
F _j - c _j		16/3	0	0	0	1/3	10/3	0

Bazno rešenje u tabeli 6 nije moguće, otuda se za kolone x₄ određuje

$$(\min) \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} : \frac{1}{3} = 4 \\ \frac{4}{3} : \frac{1}{3} = 4 \\ -\frac{1}{3} : -\frac{1}{3} = 1 \end{array} \right\} = 1.$$

Kako minimum odgovara redu u₂ to se u sledećoj iteraciji može dobiti moguće rešenje zadatka, koje je dato u tabeli 7.

Tabela 7.

C ₀	B	X ₀	1	4	0	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁	u ₂
4	x ₂	1	0	1	0	0	1	0
1	x ₁	1	1	0	0	0	-1	1
0	x ₃	1	0	0	1	0	-3	1
0	x ₄	1	0	0	0	1	1	-3
F _j - c _j		5	0	0	0	0	3	1

Novo dobijeno moguće rešenje je optimalno u smislu kriterijuma simpleks metoda. Takođe, dobijeno rešenje je optimalno za napred postavljeni zadatak celobrojnog programiranja, jer su vrednosti bazni promenljivih celobrojne, tj.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 \text{ i } x_4 = 1.$$

Vrednost funkcije F(X) je

$$\max F(X) = 5.$$

58. Zadatak

Naći rešenje zadatka celobrojnog programiranja:

$$\text{a) } (\max) F(X) = 10 + 2x_1 + 2x_2,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9.$$

$$\text{b) } (\max) F(X) = 3x_1 + 4x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 10.$$

$$\text{c) } (\max) F(X) = 21x_1 + 11x_2$$

$$7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13,$$

gde sve promenljive u modelima moraju biti veće ili jednake nuli i celi brojevi.

Rešenje. Primenom metoda odsečaka dobijaju se rešenja:

a) Zadatak ima višestruko optimalno celobrojno rešenje:

$$1. \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0.$$

$$2. \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.$$

$$3. \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2.$$

$$(\max) F(X) = 16.$$

b) Optimalno celobrojno rešenje je:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \text{ i } (\max) F(X) = 11.$$

c) Optimalno celobrojno rešenje je:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1,$$

$$(\max) F(X) = 33.$$

59. Zadatak

Rešiti zadatak celobrojnog programiranja, ako se traži

$$(\max) F(X) = 6x_1 + x_2$$

pod uslovom da je

$$-2,9x_1 + 6x_2 \leq 17,4$$

$$3x_1 - x_2 \leq 1,$$

a promenljive $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ i celi brojevi.

Rešenje. Ako se uvedu izravnavajuće promenljive matematički model se svodi na oblik

$$(\max) F(X) = 6x_1 + x_2$$

$$-2,9x_1 + 6x_2 + x_3 = 17,4$$

$$3x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Iz dobijenog modela vidi se da promenljiva x_3 ne mora biti celobrojna da bi promenljive x_1 i x_2 bile celobrojne. U ovom slučaju postupak rešavanja zadatka ima neke specifičnosti u odnosu na prethodni postupak rešavanja zadataka celobrojnog programiranja.

1. korak. U ovom koraku se rešava zadatak zanemarujući uslov celobrojnosti. Rešenje problema dato je u sledećim simpleks tabelama.

Tabela 1.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
0	x ₃	17,4	-2,9	6	1	0
0	x ₄	1	3	-1	0	1
F _j - c _j		0	-6	-1	0	0

Tabela 2.

C ₀	X	X ₀	6	1	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
0	x ₃	$\frac{55,1}{3}$	0	$\frac{15,1}{3}$	1	$\frac{2,9}{3}$
6	x ₁	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
F _j - c _j		2	0	-3	0	2

Tabela 3.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
1	x ₂	3,649	0	1	0,198	0,192
6	x ₁	1,55	1	0	0,066	0,397
F _j - c _j		12,947	0	0	0,594	2,576

U poslednjoj tabeli (3), dobijeno je optimalno rešenje. Međutim, promenljive nisu celobrojne.

2. korak U ovom koraku definiše se drugi Gomory-jev presek, kao novo ograničenje u modelu

$$\{a_{s0}\} - \sum_{k=1}^m \alpha_{sk} x_k \leq 0,$$

gde su α_{sk} - koeficijenti koji se izračunavaju na osnovu sledećih izraza:

1) Za promenljive koje ne moraju biti celobrojne

$$\alpha_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{ako je } a_{sk} \geq 0, \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} \cdot |a_{sk}|, & \text{za } a_{sk} < 0; \end{cases}$$

2) Za promenljive koje moraju biti celobrojne

$$\alpha_{sk} = \begin{cases} \{a_{sk}\}, & \text{ako je } \{a_{sk}\} \leq \{a_{s0}\}, \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} (1 - \{a_{sk}\}), & \text{ako je } \{a_{sk}\} > \{a_{s0}\}. \end{cases}$$

Kako je

$$\{a_{s0}\} = \{3,649\} = 0,649$$

$$\alpha_{13} = 0,198 \quad \text{i} \quad \alpha_{14} = 0,192,$$

to je ograničenje oblika

$$0,649 - 0,198x_3 - 0,192x_4 + u_1 = 0,$$

odnosno, možemo pisati da je

$$-0,198x_3 - 0,192x_4 + u_1 = -0,649.$$

3. korak. Dodajući novo dobijeno ograničenje u poslednju simpleks tabelu dobija se nova početna simpleks tabela zadatka L_1 .

Tabela 4.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁
1	x ₂	3,649	0	1	0,198	0,192	0
6	x ₁	1,55	1	0	0,066	0,397	0
0	u ₁	-0,649	0	0	-0,198	-0,192	1
F _j - c _j		12,947	0	0	0,594	2,576	0

Kako je

$$(\min) \begin{bmatrix} \frac{3,649}{0,198} = 18,43 \\ \frac{1,55}{0,066} = 23,48 \\ \frac{-0,649}{-0,198} = 3,28 \end{bmatrix} = 3,28,$$

$$\min \begin{bmatrix} \frac{3,649}{0,192} = 19,005 \\ \frac{1,55}{0,397} = 3,9 \\ \frac{-0,649}{-0,192} = 3,38 \end{bmatrix} = 3,38,$$

to se uvođenjem promenljive x_3 ili x_4 u bazu može dobiti moguće rešenje. Novo moguće rešenje je prikazano u sledećoj simpleks tabeli (tabela 5).

Tabela 5.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁
1	x ₂	3	0	1	0	0	1
6	x ₁	1,33	1	0	0	0,333	0,333
0	x ₃	3,28	0	0	1	0,97	-5,05
F _j - c _j		10,99	0	0	0	2	3

Dobijeno rešenje je optimalno. Međutim, kako promenljiva x_1 nije celobrojna, vraćamo se na korak 2.

2. korak. Formira se novo ograničenje i novi zadatak L_2 . Ograničenje se formira na osnovu reda x_1 u prethodnoj tabeli 5. Otuda se dobija

$$0,33 - 0,333x_4 - 0,333u_1 + u_2 = 0,$$

odnosno, ako se jednačina sredi

$$-0,333x_4 - 0,333u_1 + u_2 = -0,33.$$

3. korak. Proširena simpleks tabela je

Tabela 6.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁	u ₂
1	x ₂	3	0	1	0	0	1	0
6	x ₁	1,33	1	0	0	0,333	0,333	0
0	x ₃	3,28	0	0	1	0,97	-5,05	0
0	u ₂	-0,33	0	0	0	-0,333	-0,333	1
F _j - c _j		10,99	0	0	0	2	2	0

Kako je

$$\min \left[\begin{array}{l} \frac{1,33}{0,333} = 3,99 \\ \frac{3,28}{0,97} = 3,38 \\ \frac{-0,33}{-0,333} = 1 \end{array} \right] = 1$$

to se moguće rešenje može dobiti uvođenjem u bazu promenljive x₄, kao što je to pokazano u tabeli 7.

Tabela 7.

C ₀	B	X ₀	6	1	0	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	u ₁	u ₂
1	x ₂	3	0	1	0	0	1	0
6	x ₁	1	1	0	0	0	0	1
0	x ₃	2,31	0	0	1	0	-6,02	-15,15
0	x ₄	1	0	0	0	1	1	-3
F _j - c _j		9	0	0	0	0	1	6

U tabeli 7 dobijeno je optimalno rešenje zadatka celobrojnog programiranja,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_4 = 1 \quad \text{i} \quad (\max) F(X) = 9.$$

Za promenljivu x₃ nije se tražilo da ima celobrojnu vrednost.

60. Zadatak

Rešiti zadatke celobrojnog programiranja definisane matematičkim modelima:

a) $(\max) F(X) = x_1 + 8x_2$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$0,16x_1 + x_2 \leq 1,9$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{i celi brojevi.}$$

b) $(\max) F(X) = 0,25x_1 + x_2$

$$0,5x_1 + x_2 \leq 1,75$$

$$x_1 + 0,3x_2 \leq 1,5$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{i celi brojevi.}$$

c) $(\max) F(X) = 8x_1 + 6x_2$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{i celobrojno,} \quad x_2 \geq 0.$$

Rešenje. Primenom napred izloženog metoda celobrojnog programiranja (zadatak 58.) dobijaju se rešenja:

a) $x_1 = 2, x_2 = 1$ i $(\max) F(X) = 10$. Izravnavajuće promenljive su: $x_3 = 2$ i $x_4 = 0,58$;

b) $x_1 = 1, x_2 = 1$ i $(\max) F(X) = 1,25$. Izravnavajuće promenljive su: $x_3 = 0,25$ i $x_4 = 0,2$;

c) $x_1 = 1, x_2 = 1,6$ i $(\max) F(X) = 17,62$.

General Cutting Planes

Consider the following integer program:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} && 7x_1 + 9x_2 \\ &\text{subject to} && -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ &&& 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \text{ integer.} \end{aligned}$$

If we ignore integrality, we get the following optimal tableau (with the updated columns and reduced costs shown for nonbasic variables):

Variable	x_1	x_2	s_1	s_2	$-z$	RHS
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
$-z$	0	0	28/11	15/11	1	63

Let's look at the first constraint:

$$x_2 + 7/22s_1 + 1/22s_2 = 7/2$$

We can manipulate this to put all of the integer parts on the left side, and all the fractional parts on the right to get:

$$x_2 - 3 = 1/2 - 7/22s_1 - 1/22s_2$$

Now, note that the left hand side consists only of integers, so the right hand side must add up to an integer. Which integer can it be? Well, it consists of some positive fraction minus a series of positive values. Therefore, the right hand side can only be 0, -1, -2, ...; it cannot be a positive value. Therefore, we have derived the following constraint:

$$1/2 - 7/22s_1 - 1/22s_2 \leq 0.$$

This constraint is satisfied by every feasible integer solution to our original problem. But, in our current solution, s_1 and s_2 both equal 0, which is infeasible to the above constraint. This means the above constraint is a cut, called the *Gomory cut* after its discoverer. We can now add this constraint to the linear program and be guaranteed to find a different solution, one that might be integer.

We can also generate a cut from the other constraint. Here we have to be careful to get the signs right:

$$\begin{aligned} x_1 - 1/22s_1 + 3/22s_2 &= 9/2 \\ x_1 + (-1 + 21/22)s_1 + 3/22s_2 &= 4 + 1/2 \\ x_1 - s_1 - 4 &= 1/2 - 21/22s_1 - 3/22s_2 \end{aligned}$$

gives the constraint

$$1/2 - 21/22s_1 - 3/22s_2 \leq 0.$$

In general, let $\lfloor a \rfloor$ be defined as the largest integer less than or equal to a . For example, $\lfloor 3.9 \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, and $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$.

If we have a constraint

$$x_k + \sum a_i x_i = b$$

with b not an integer, we can write each $a_i = \lfloor a_i \rfloor + a'_i$, for some $0 \leq a'_i < 1$, and $b = \lfloor b \rfloor + b'$ for some $0 < b' < 1$. Using the same steps we get:

$$x_k + \sum \lfloor a_i \rfloor x_i - \lfloor b \rfloor = b' - \sum a'_i x_i$$

to get the cut

$$b' - \sum a'_i x_i \leq 0.$$

This cut can then be added to the linear program and the problem resolved. The problem is guaranteed not to get the same solution.

This method can be shown to guarantee finding the optimal integer solution. There are a couple of disadvantages:

1. Round-off error can cause great difficulties: Is that 3.000000001 really a 3, or should I generate a cut? If I make the wrong decision I could either cut off a feasible solution (if it is really a 3 but I generate a cut) or I could end up with an infeasible solution (if it is not a 3 but I treat it as one).
2. The number of constraints that are generated can be enormous. Just like branch and bound can generate a huge number of subproblems, this technique can generate a huge number of constraints.

The combination of these makes this cutting plane technique impractical by itself. Recently however, more powerful techniques have been discovered for special problem structure. This is the subject of the next section.

9.4 SOME CHARACTERISTICS OF INTEGER PROGRAMS—A SAMPLE PROBLEM

Whereas the simplex method is effective for solving linear programs, there is no single technique for solving integer programs. Instead, a number of procedures have been developed, and the performance of any particular technique appears to be highly problem-dependent. Methods to date can be classified broadly as following one of three approaches:

- i) enumeration techniques, including the branch-and-bound procedure;
- ii) cutting-plane techniques; and
- iii) group-theoretic techniques.

In addition, several composite procedures have been proposed, which combine techniques using several of these approaches. In fact, there is a trend in computer systems for integer programming to include a number of approaches and possibly utilize them all when analyzing a given problem. In the sections to follow, we shall consider the first two approaches in some detail. At this point, we shall introduce a specific problem and indicate some features of integer programs. Later we will use this example to illustrate and motivate the solution procedures. Many characteristics of this example are shared by the integer version of the custom-molder problem presented in Chapter 1.

The problem is to determine z^* where:

$$z^* = \max z = 5x_1 + 8x_2,$$

subject to:

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer.}$$

The feasible region is sketched in Fig. 9.8. Dots in the shaded region are feasible integer points.

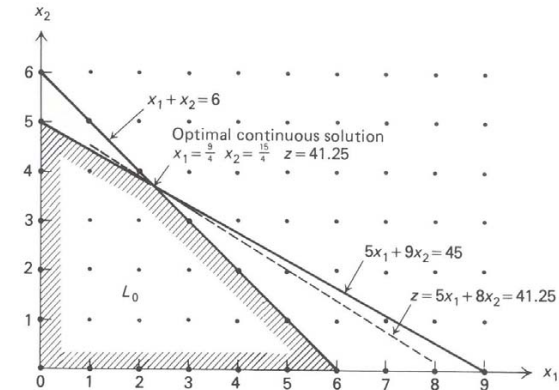


Figure 9.8 An integer programming example.

If the integrality restrictions on variables are dropped, the resulting problem is a linear program. We will call it the *associated linear program*. We may easily determine its optimal solution graphically. Table 9.1 depicts some of the features of the problem.

Table 9.1 Problem features.

	Continuous optimum	Round off	Nearest feasible point	Integer optimum
x_1	$\frac{9}{4} = 2.25$	2	2	0
x_2	$\frac{15}{4} = 3.75$	4	3	5
z	41.25	Infeasible	34	40

Observe that the optimal integer-programming solution is not obtained by *rounding* the linear-programming solution. The closest point to the optimal linear-program solution is not even feasible. Also, note that the nearest feasible integer point to the linear-program solution is far removed from the optimal integer point. Thus, it is not sufficient simply to round linear-programming solutions. In fact, by scaling the righthand-side and cost coefficients of this example properly, we can construct a problem for which the optimal integer-programming solution lies as far as we like from the rounded linear-programming solution, in either z value or distance on the plane.

In an example as simple as this, almost any solution procedure will be effective. For instance, we could easily enumerate all the integer points with $x_1 \leq 9$, $x_2 \leq 6$, and select the best feasible point. In practice, the number of points to be considered is likely to prohibit such an exhaustive enumeration of potentially feasible points, and a more sophisticated procedure will have to be adopted.

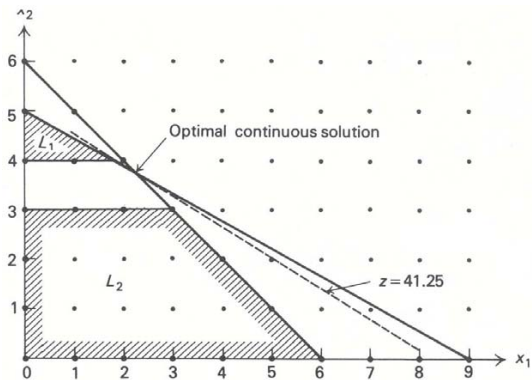


Figure 9.9 Subdividing the feasible region.

9.5 BRANCH-AND-BOUND

Branch-and-bound is essentially a strategy of “divide and conquer.” The idea is to partition the feasible region into more manageable subdivisions and then, if required, to further partition the subdivisions. In general, there are a number of ways to divide the feasible region, and as a consequence there are a number of branch-and-bound algorithms. We shall consider one such technique, for problems with only binary variables, in Section 9.7. For historical reasons, the technique that will be described next usually is referred to as *the* branch-and-bound procedure.

Basic Procedure

An integer linear program is a linear program further constrained by the integrality restrictions. Thus, in a maximization problem, the value of the objective function, at the linear-program optimum, will always be an upper bound on the optimal integer-programming objective. In addition, any integer feasible point is always a lower bound on the optimal linear-program objective value.

The idea of branch-and-bound is to utilize these observations to systematically subdivide the linear-programming feasible region and make assessments of the integer-programming problem based upon these subdivisions. The method can be described easily by considering the example from the previous section. At first, the linear-programming region is not subdivided: The integrality restrictions are dropped and the associated linear program is solved, giving an optimal value z^0 . From our remark above, this gives the upper bound on z^* , $z^* \leq z^0 = 41\frac{1}{4}$. Since the coefficients in the objective function are integral, z^* must be integral and this implies that $z^* \leq 41$.

Next note that the linear-programming solution has $x_1 = 2\frac{1}{4}$ and $x_2 = 3\frac{3}{4}$. Both of these variables must be integer in the optimal solution, and we can divide the feasible region in an attempt to *make* either integral. We know that, in any integer programming solution, x_2 must be either an integer ≤ 3 or an integer ≥ 4 . Thus, our first subdivision is into the regions where $x_2 \leq 3$ and $x_2 \geq 4$ as displayed by the shaded regions L_1 and L_2 in Fig. 9.9. Observe that, by making the subdivisions, we have excluded the old linear-program solution. (If we selected x_1 instead, the region would be subdivided with $x_1 \leq 2$ and $x_1 \geq 3$.)

The results up to this point are pictured conveniently in an *enumeration tree* (Fig. 9.10). Here L_0 represents the associated linear program, whose optimal solution has been included within the L_0 box, and the upper bound on z^* appears to the right of the box. The boxes below correspond to the new subdivisions; the constraints that subdivide L_0 are included next to the lines joining the boxes. Thus, the constraints of L_1 are those of L_0 together with the constraint $x_2 \geq 4$, while the constraints of L_2 are those of L_0 together with the constraint $x_2 \leq 3$.

The strategy to be pursued now may be apparent: Simply treat each subdivision as we did the original problem. Consider L_1 first. Graphically, from Fig. 9.9 we see that the optimal linear-programming solution

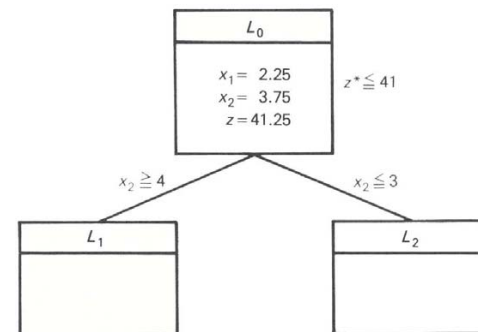


Figure 9.10 Enumeration tree.

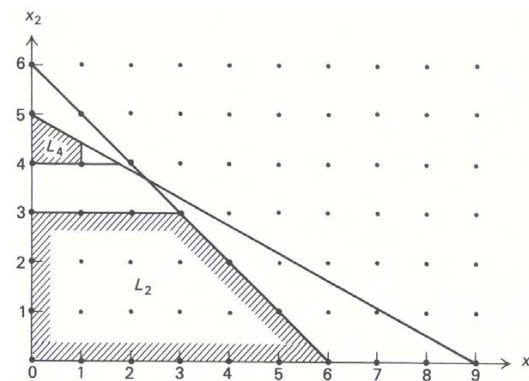


Figure 9.11 Subdividing the region L_1 .

lies on the second constraint with $x_2 = 4$, giving $x_1 = \frac{1}{5}(45 - 9(4)) = \frac{9}{5}$ and an objective value $z = 5(\frac{9}{5}) + 8(4) = 41$. Since x_1 is not integer, we subdivide L_1 further, into the regions L_3 with $x_1 \geq 2$ and L_4 with $x_1 \leq 1$. L_3 is an infeasible problem and so this branch of the enumeration tree no longer needs to be considered.

The enumeration tree now becomes that shown in Fig. 9.12. Note that the constraints of any subdivision are obtained by tracing back to L_0 . For example, L_4 contains the original constraints together with $x_2 \geq 4$ and $x_1 \leq 1$. The asterisk (*) below box L_3 indicates that the region need not be subdivided or, equivalently, that the tree will not be extended from this box.

At this point, subdivisions L_2 and L_4 must be considered. We may select one arbitrarily; however, in practice, a number of useful heuristics are applied to make this choice. For simplicity, let us select the subdivision most recently generated, here L_4 . Analyzing the region, we find that its optimal solution has

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{9}(45 - 5) = \frac{40}{9}.$$

Since x_2 is not integer, L_4 must be further subdivided into L_5 with $x_2 \leq 4$, and L_6 with $x_2 \geq 5$, leaving L_2 , L_5 and L_6 yet to be considered.

Treating L_5 first (see Fig. 9.13), we see that its optimum has $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, and $z = 37$. Since this is the best linear-programming solution for L_5 and the linear program contains every integer solution in L_5 , no integer point in that subdivision can give a larger objective value than this point. Consequently, other points

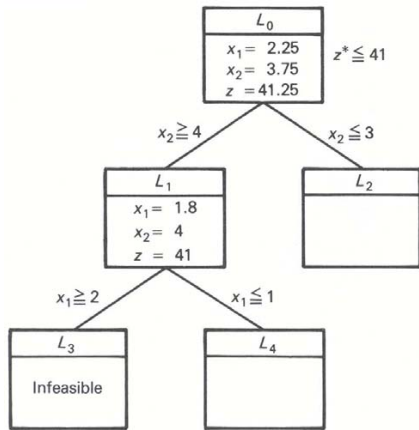


Figure 9.12

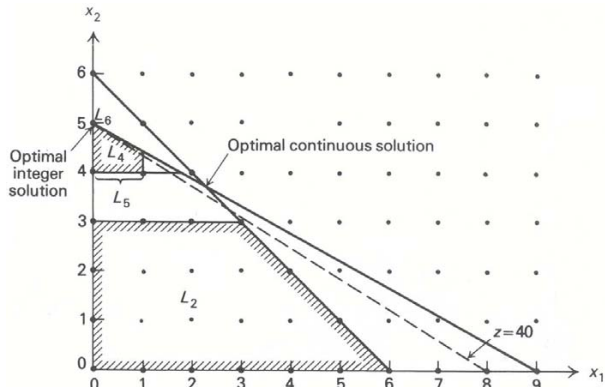


Figure 9.13 Final subdivisions for the example.

in L_5 need never be considered and L_5 need not be subdivided further. In fact, since $x_1 = 1, x_2 = 4, z = 37$, is a feasible solution to the original problem, $z^* \geq 37$ and we now have the bounds $37 \leq z^* \leq 41$. Without further analysis, we could terminate with the integer solution $x_1 = 1, x_2 = 4$, knowing that the objective value of this point is within 10 percent of the true optimum. For convenience, the lower bound $z^* \geq 37$ just determined has been appended to the right of the L_5 box in the enumeration tree (Fig. 9.14).

Although $x_1 = 1, x_2 = 4$ is the best integer point in L_5 , the regions L_2 and L_6 might contain better feasible solutions, and we must continue the procedure by analyzing these regions. In L_6 , the only feasible point is $x_1 = 0, x_2 = 5$, giving an objective value $z = +40$. This is better than the previous integer point and thus the lower bound on z^* improves, so that $40 \leq z^* \leq 41$. We could terminate with this integer solution knowing that it is within 2.5 percent of the true optimum. However, L_2 could contain an even better integer solution.

The linear-programming solution in L_2 has $x_1 = x_2 = 3$ and $z = 39$. This is the best integer point in L_2 but is not as good as $x_1 = 0, x_2 = 5$, so the later point (in L_6) must indeed be optimal. It is interesting to note that, even if the solution to L_2 did not give x_1 and x_2 integer, but had $z < 40$, then no feasible (and, in particular, no integer point) in L_2 could be as good as $x_1 = 0, x_2 = 5$, with $z = 40$. Thus, again $x_1 = 0, x_2 = 5$ would be known to be optimal. This observation has important computational implications,

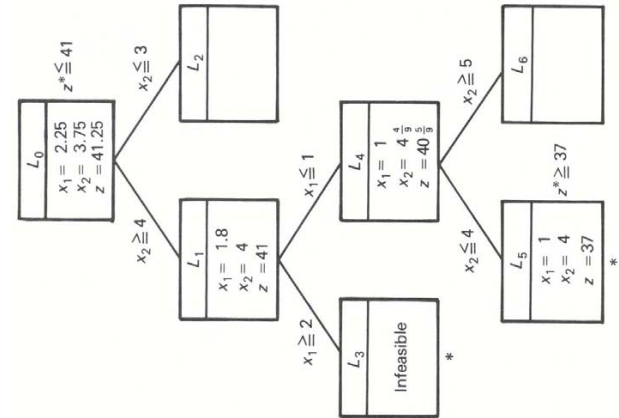


Figure 9.14

since it is not necessary to drive every branch in the enumeration tree to an integer or infeasible solution, but only to an objective value below the best integer solution.

The problem now is solved and the entire solution procedure can be summarized by the enumeration tree in Fig. 9.15.

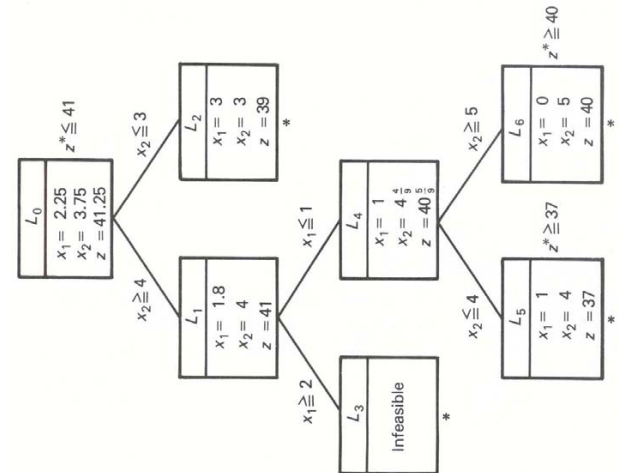


Figure 9.15

Further Considerations

There are three points that have yet to be considered with respect to the branch-and-bound procedure:

- i) Can the linear programs corresponding to the subdivisions be solved efficiently?
- ii) What is the best way to subdivide a given region, and which unanalyzed subdivision should be considered next?

iii) Can the upper bound ($z = 41$, in the example) on the optimal value z^* of the integer program be improved while the problem is being solved?

The answer to the first question is an unqualified *yes*. When moving from a region to one of its subdivisions, we add one constraint that is not satisfied by the optimal linear-programming solution over the parent region. Moreover, this was one motivation for the dual simplex algorithm, and it is natural to adopt that algorithm here.

Referring to the sample problem will illustrate the method. The first two subdivisions L_1 and L_2 in that example were generated by adding the following constraints to the original problem:

$$\begin{aligned} \text{For subdivision 1 : } & x_2 \geq 4 & \text{or} & & x_2 - s_3 = 4 & (s_3 \geq 0); \\ \text{For subdivision 2 : } & x_2 \leq 3 & \text{or} & & x_2 + s_4 = 3 & (s_4 \geq 0). \end{aligned}$$

In either case we add the new constraint to the optimal linear-programming tableau. For subdivision 1, this gives:

$$\begin{array}{rcl} (-z) & -\frac{5}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 & = -41\frac{1}{4} \\ x_1 & +\frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 & = \frac{9}{4} \\ \textcircled{x_2} & -\frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 & = \frac{15}{4} \\ & -x_2 & + s_3 = -4, \quad \text{Added constraint} \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0, & \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Constraints from the} \\ \text{optimal canonical} \\ \text{form} \end{array} \right\}$$

where s_1 and s_2 are slack variables for the two constraints in the original problem formulation. Note that the new constraint has been multiplied by -1 , so that the slack variable s_3 can be used as a basic variable. Since the basic variable x_2 appears with a nonzero coefficient in the new constraint, though, we must pivot to isolate this variable in the second constraint to re-express the system as:

$$\begin{array}{rcl} (-z) & -\frac{5}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 & = -41\frac{1}{4}, \\ x_1 & +\frac{9}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 & = \frac{9}{4}, \\ x_2 & -\frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 & = \frac{15}{4}, \\ \textcircled{-\frac{5}{4}s_1} & +\frac{1}{4}s_2 + s_3 & = -\frac{1}{4}, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0. & \end{array}$$

These constraints are expressed in the proper form for applying the dual simplex algorithm, which will pivot next to make s_1 the basic variable in the third constraint. The resulting system is given by:

$$\begin{array}{rcl} (-z) & -s_2 - s_3 & = -41, \\ x_1 & +\frac{1}{5}s_2 + \frac{9}{5}s_3 & = \frac{9}{5}, \\ x_2 & -s_3 & = 4, \\ s_1 & -\frac{1}{5}s_2 - \frac{4}{5}s_3 & = \frac{1}{5}, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0. & \end{array}$$

This tableau is optimal and gives the optimal linear-programming solution over the region L_1 as $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = 4$, and $z = 41$. The same procedure can be used to determine the optimal solution in L_2 .

When the linear-programming problem contains many constraints, this approach for recovering an optimal solution is very effective. After adding a new constraint and making the slack variable for that constraint basic, we always have a starting solution for the dual-simplex algorithm with only one basic variable negative. Usually, only a few dual-simplex pivoting operations are required to obtain the optimal solution. Using the primal-simplex algorithm generally would require many more computations.

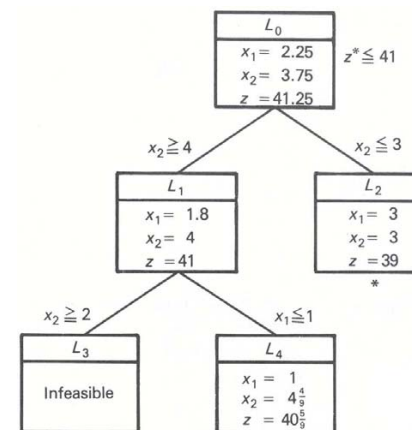


Figure 9.16

Issue (ii) raised above is very important since, if we can make our choice of subdivisions in such a way as to rapidly obtain a good (with luck, near-optimal) integer solution \hat{z} , then we can eliminate many potential subdivisions immediately. Indeed, if any region has its linear programming value $z \leq \hat{z}$, then the objective value of no integer point in that region can exceed \hat{z} and the region need not be subdivided. There is no universal method for making the required choice, although several heuristic procedures have been suggested, such as selecting the subdivision with the largest optimal linear-programming value.[†]

Rules for determining which fractional variables to use in constructing subdivisions are more subtle. Recall that any fractional variable can be used to generate a subdivision. One procedure utilized is to look ahead one step in the dual-simplex method for every possible subdivision to see which is most promising. The details are somewhat involved and are omitted here. For expository purposes, we have selected the fractional variable arbitrarily.

Finally, the upper bound \bar{z} on the value z^* of the integer program can be improved as we solve the problem. Suppose for example, that subdivision L_2 was analyzed before subdivisions L_5 or L_6 in our sample problem. The enumeration tree would be as shown in Fig. 9.16.

At this point, the optimal solution must lie in either L_2 or L_4 . Since, however, the largest value for any feasible point in either of these regions is $40\frac{5}{9}$, the optimal value for the problem z^* cannot exceed $40\frac{5}{9}$. Because z^* must be integral, this implies that $z^* \leq 40$ and the upper bound has been improved from the value 41 provided by the solution to the linear program on L_0 . In general, the upper bound is given in this way as the largest value of any “hanging” box (one that has not been divided) in the enumeration tree.

Summary

The essential idea of branch-and-bound is to subdivide the feasible region to develop *bounds* $\underline{z} < z^* < \bar{z}$ on z^* . For a maximization problem, the lower bound \underline{z} is the highest value of any feasible integer point encountered. The upper bound is given by the optimal value of the associated linear program or by the largest value for the objective function at any “hanging” box. After considering a subdivision, we must *branch* to (move to) another subdivision and analyze it. Also, if *either*

[†] One common method used in practice is to consider subdivisions on a last-generated–first-analyzed basis. We used this rule in our previous example. Note that data to initiate the dual-simplex method mentioned above must be stored for each subdivision that has yet to be analyzed. This data usually is stored in a list, with new information being added to the top of the list. When required, data then is extracted from the *top* of this list, leading to the last-generated–first-analyzed rule. Observe that when we subdivide a region into two subdivisions, one of these subdivisions will be analyzed next. The data required for this analysis already will be in the computer core and need not be extracted from the list.

- i) the linear program over L_j is infeasible;
- ii) the optimal linear-programming solution over L_j is integer; or
- iii) the value of the linear-programming solution z^j over L_j satisfies $z^j \leq \underline{z}$ (if maximizing),

then L_j need not be subdivided. In these cases, integer-programming terminology says that L_j has been *fathomed*.[†] Case (i) is termed fathoming by infeasibility, (ii) fathoming by integrality, and (iii) fathoming by bounds.

The flow chart in Fig. 9.17 summarizes the general procedure.

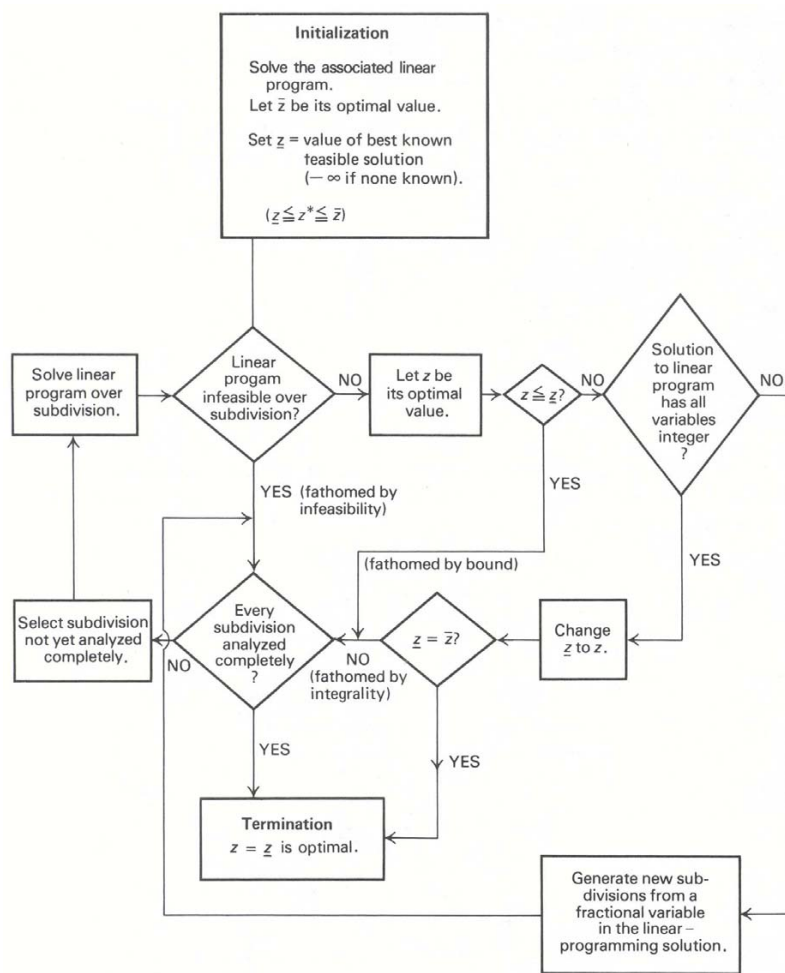


Figure 9.17 Branch-and-bound for integer-programming maximization.

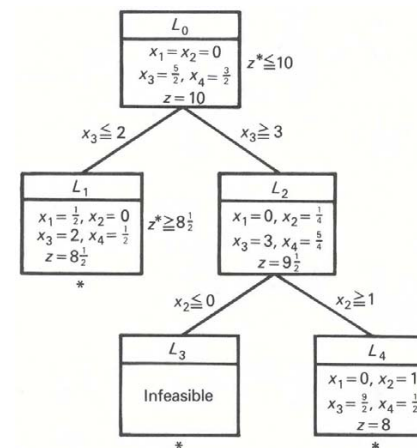


Figure 9.18

[†] To *fathom* is defined as “to get to the bottom of; to understand thoroughly.” In this chapter, *fathomed* might be more appropriately defined as “understood enough or already considered.”

Branch and Bound

We will explain branch and bound by using the capital budgeting example from the previous section. In that problem, the model is

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} && 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ &\text{subject to} && 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ &&& x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

The linear relaxation solution is $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0$ with a value of 22. We know that no integer solution will have value more than 22. Unfortunately, since x_3 is not integer, we do not have an integer solution yet.

We want to force x_3 to be integer. To do so, we *branch* on x_3 , creating two new problems. In one, we will add the constraint $x_3 = 0$. In the other, we add the constraint $x_3 = 1$. This is illustrated in Figure 2.

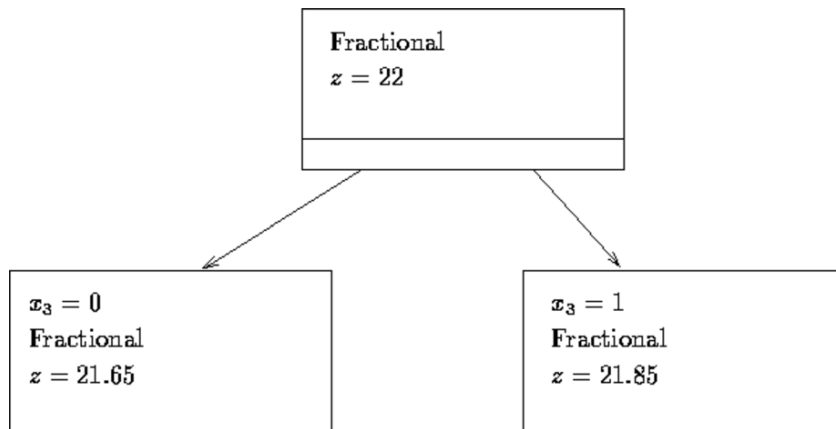


Figure 2: First Branching

Note that any optimal solution to the overall problem must be feasible to one of the subproblems. If we solve the linear relaxations of the subproblems, we get the following solutions:

- $x_3 = 0$: objective 21.65, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0.667$;
- $x_3 = 1$: objective 21.85, $x_1 = 1, x_2 = 0.714, x_3 = 1, x_4 = 0$.

At this point we know that the optimal integer solution is no more than 21.85 (we actually know it is less than or equal to 21 (Why?)), but we still do not have any feasible integer solution. So, we will take a subproblem and branch on one of its variables. In general, we will choose the subproblem as follows:

- We will choose an *active* subproblem, which so far only means one we have not chosen before, and
- We will choose the subproblem with the highest solution value (for maximization) (lowest for

minimization).

In this case, we will choose the subproblem with $x_3 = 1$, and branch on x_2 . After solving the resulting subproblems, we have the branch and bound tree in Figure 3.

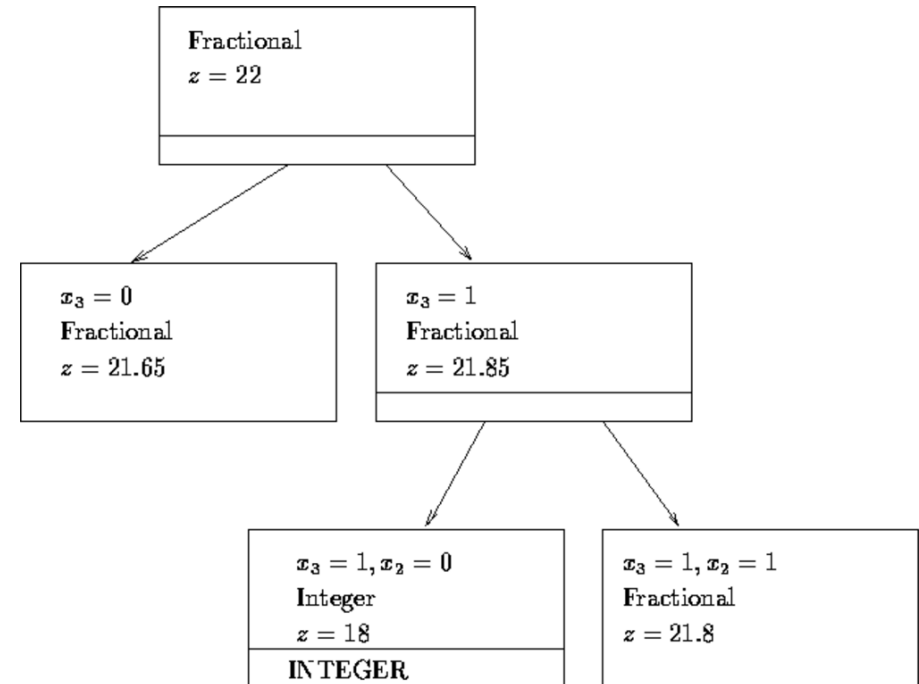


Figure 3: Second Branching

The solutions are:

- $x_3 = 1, x_2 = 0$: objective 18, $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$;
- $x_3 = 1, x_2 = 1$: objective 21.8, $x_1 = 0.6, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$.

We now have a feasible integer solution with value 18. Furthermore, since the $x_3 = 1, x_2 = 0$ problem gave an integer solution, no further branching on that problem is necessary. It is not active due to integrality of solution. There are still active subproblems that might give values more than 18. Using our rules, we will branch on problem $x_3 = 1, x_2 = 1$ by branching on x_1 to get Figure 4.

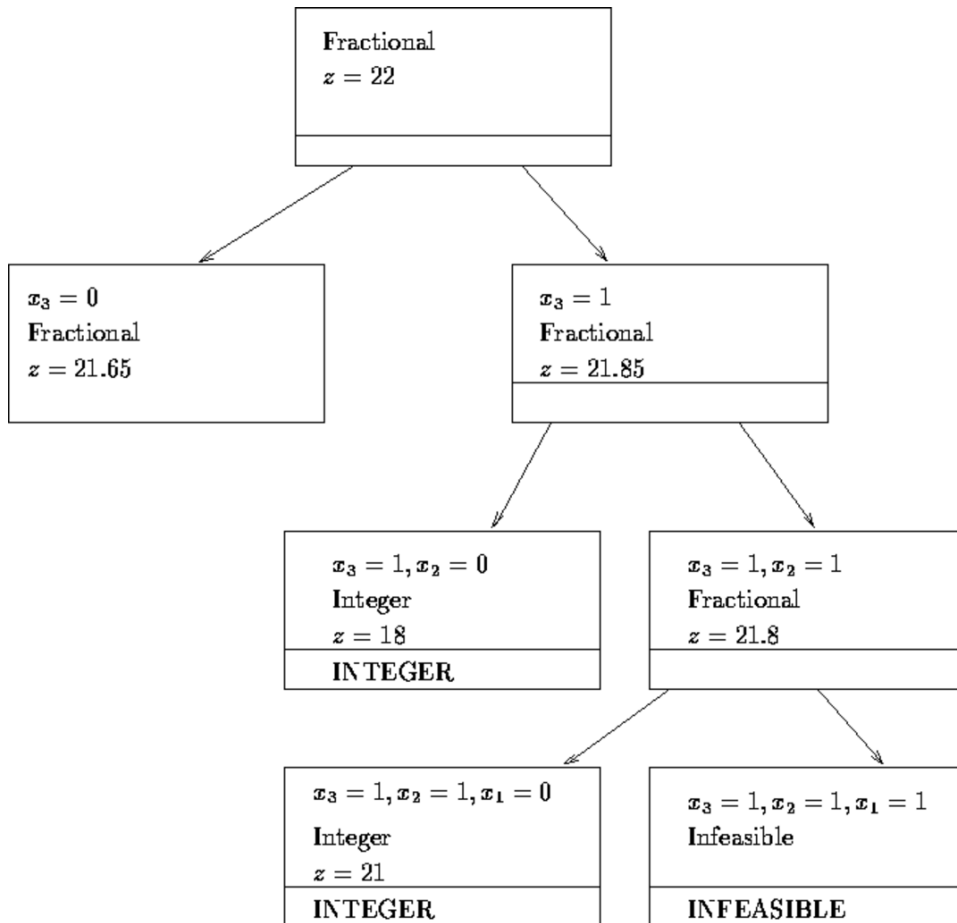


Figure 4: Third Branching

The solutions are:

- $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 0$: objective 21, $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$;
- $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$: infeasible.

Our best integer solution now has value 21. The subproblem that generates that is not active due to integrality of solution. The other subproblem generated is not active due to infeasibility. There is still a subproblem that is active. It is the subproblem with solution value 21.65. By our "round-down" result, there is no better solution for this subproblem than 21. But we already have a solution with value 21. It is not useful to search for another such solution. We can *fathom* this subproblem based on the above bounding argument and mark it not active. There are no longer any active subproblems, so the optimal solution value is 21.

We have seen all parts of the branch and bound algorithm. The essence of the algorithm is as follows:

1. Solve the linear relaxation of the problem. If the solution is integer, then we are done. Otherwise

- create two new subproblems by branching on a fractional variable.
2. A subproblem is not active when any of the following occurs:
 1. You used the subproblem to branch on,
 2. All variables in the solution are integer,
 3. The subproblem is infeasible,
 4. You can fathom the subproblem by a bounding argument.
3. Choose an active subproblem and branch on a fractional variable. Repeat until there are no active subproblems.

That's all there is to branch and bound! Depending on the type of problem, the branching rule may change somewhat. For instance, if x is restricted to be integer (but not necessarily 0 or 1), then if $x=4.27$ you would branch with the constraints $x \leq 4$ and $x \geq 5$ (not on $x=4$ and $x=5$).

In the worst case, the number of subproblems can get huge. For many problems in practice, however, the number of subproblems is quite reasonable.

For an example of a huge number of subproblems, try the following in LINGO:

```

model:
sets:
  a /1..17/: x;
endsets

max = -x0 + @sum(a: 2 * x);
x0 + @sum(a: 2 * x) < 17;
@for (a: @bin(x));
end

```

Note that this problem has only 18 variables and only a single constraint. LINDO looks at 48,619 subproblems, taking about 20 minutes on a Sun Sparc workstation, before deciding the optimal objective is 16. LINGO on a 16MHz 386 PC (with math coprocessor) looks at 48,000+ subproblems and takes about five hours. CPLEX on a Sun SPARC 10 takes about 50 seconds to examine 61,497 subproblems (counting those that are fathomed without solving the LP). The 100 variable version of this problem would take about 10^{29} subproblems or about 3×10^{18} years (at 1000 subproblems per second). Luckily, most problems take far less time.

Exercise 5 (Optional) Solve the following problem by the branch and bound algorithm. For convenience, always select x_1 as the branching variable when both x_1 and x_2 are fractional.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} && x_1 + x_2 \\
 & \text{subject to} && 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\
 & && 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & && x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer.}
 \end{aligned}$$

Exercise 6 (Optional) Repeat the preceding exercise assuming that x_1 only is restricted to integer values.

Exercise 7 (Optional) Consider the following cargo-loading problem, where five items are to be loaded on a vessel. The weights w_i and the volume v_i per unit of the different items as well as their corresponding values r_i are tabulated as follows.

Item i	w_i	v_i	r_i
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

The maximum cargo weight and volume are given by $W = 112$ and $V = 109$, respectively. It is required to determine the most valuable cargo load in discrete units of each item. Formulate the problem as an integer program and solve by LINDO.

6. TEORIJA IGARA

6.1. OPŠTI POJMOVI I DEFINICIJE IZ DOMENA MATRIČNIH IGARA

U oblasti operacionih istraživanja postoji značajna klasa upravljačkih zadataka koji su vezani za rešavanje problema donošenja odluka u uslovima nedovoljne definisanosti. Ako je reč o upravljanju nekom operacijom, nedefinisanost se može ogledati kako u uslovima izvođenja operacije tako i u svesnim akcijama protivnika ili drugih učesnika od kojih zavisi ishod operacije. Osim toga, nedefinisanost se može takođe, u manjoj ili većoj meri, odnositi i na ciljeve operacije, čiji se ishod samo ponekad može u potpunosti okarakterisati jednim jedinim parametrom, koji tada nazivamo pokazateljem efikasnosti.

Pr. rešavanju upravljačkih zadataka, u uslovima odsustva potrebnih informacija, neophodno je imati u vidu da će uvek biti prisutan element neizvesnosti u pogledu ishoda upravljačke akcije. Drugim rečima, biće prisutan određeni rizik, koji možemo izraziti kvantitativno kao neki gubitak.

Matematičke metode kojima se rešavaju ovakvi upravljački zadaci poznate su kao posebne discipline: **teorija igara** i **statističke metode odlučivanja**.

U rešavanju niza praktičnih zadataka operacionih istraživanja (u oblasti ekonomije, ratne veštine itd.), susrećemo se sa potrebom analize situacije, u kojoj dejstvuju dve (ili više) protivničke strane koje imaju različite ciljeve, pri čemu rezultat bilo kakve akcije nekog od učesnika zavisi od toga kakav će vid dejstva odabrati protivnik. Ovakve situacije u kojima treba donositi upravljačke odluke, nazivaju se konfliktnim situacijama.

Polazeći od definicije konfliktnih situacija možemo reći da je teorija igara matematička teorija konfliktnih situacija.

Problemi konflikata su stari toliko koliko je staro i ljudsko društvo. Međutim, teorija igara je mlada matematička disciplina. Njen nastanak je vezan za ime američkog matematičara John von Neumann-a (1903–1957), koji je 1928. godine objavio svoj prvi rad iz teorije igara. Za prvo fundamentalno delo iz teorije igara smatra se knjiga: John von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, New York, 1944.

U ovom poglavlju Zbirke zadataka biće razmatrani oni problemi iz teorije konfliktnih situacija gde u konfliktu učestvuju samo dve protivničke strane.

Ako samo jedan protivnik može uticati na ishod događaja, igra se svodi na takozvanu igru jednog lica. Na primer, ako igrač A ima niz alternativa (strategija) a_1, a_2, \dots, a_m , tj.

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m),$$

sa ishodom (cenom) koji se može proceniti kao dobit koja će zavisi od odabrane alternative,

$$C(a_1), C(a_2), \dots, C(a_m),$$

tada se za igrača A može tražiti optimalna alternativa a^* u skupu mogućih alternativa A, tako da bude ispunjen uslov

$$C(a^*) \geq C(a_i),$$

za $i = 1, 2, \dots, m$.

Situacija postaje znatno složenija ako imamo dva igrača koji mogu da utiču na ishod igre.

Skup mogućih alternativa za igrača A je

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m),$$

dok je skup mogućih alternativa za igrača B,

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Tada je ishod igre (dobit) funkcija dve promenljive,

$$C = C(a_i, b_j).$$

Igra odražava sukob interesa i oba protivnika žele da izaberu optimalne strategije s obzirom na cenu igre.

U slučaju kada odluke donosi samo jedno lice, a ishod igre se ne određuje samo izborom jedne alternative od strane donosioca odluke, tada na ishod igre utiče slučajna promenljiva θ , tako da je

$$C = C(a, \theta).$$

Na osnovu izloženog mogu se definisati neki osnovni pojmovi iz teorije igara.

Pojam igre. Pod pojmom igre podrazumevaćemo model realne konfliktnih situacije. Pored toga, igri se mogu korespondirati pravila čime se definiše ponašanje učesnika u igri.

Pojam hoda. Hod je izbor jedne od mogućih alternativa (strategija) koje stoje na raspoloženju učesnicima u igri. Sam hod može biti lični ili slučajni. Ličnim hodom nazivamo hod kada učesnik u igri sam svesno izabira svoje ponašanje, dok je pri slučajnom hodu ponašanje učesnika u igri vezano za neki slučajni mehanizam.

Pojam strategije. Prema intuitivnom shvatanju igre, strategija je neki plan razvoja igre. Drugim rečima, pod pojmom strategije podrazumevamo skup pravila koja jednoznačno određuju izbor hoda svakog od učesnika u igri.

Pojam igre sa nultom sumom. Igra se naziva "igrom sa nultom sumom" ako jedan od igrača dobija onoliko koliko drugi gubi, tj. zbir dobiti u igri oba igrača jednak je nuli.

Igre dva lica sa nultom sumom nazivaju se antagonističkim igrama. Normalna forma konačne antagonističke igre svodi se na neku matricu A sa brojem redova jednakim broju strategija igrača I i sa brojem kolona jednakim

broju strategija, igrača II. Dobit za igrača I, ako odabere i -tu strategiju, a igrač II odabere j -tu strategiju, definisana je elementom a_{ij} , koji se nalazi u i -tom redu i j -toj koloni matrice A. Matrica A se naziva matricom koštanja ili platežna matrica igre.

Cilj teorije igara je da se egzaktnim matematičkim aparatom analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku konflikta, tj. da se odrede optimalne strategije za svakog od učesnika u igri.

Optimalna strategija. Pod pojmom optimalne strategije igrača podrazumeva se takva strategija koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbeđuje tom igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno, minimalno mogući srednji gubitak.

Pri izboru optimalne strategije polazi se od činjenice da je protivnik potpuno razuman i činiće sve da nas spreči u ostvarenju cilja. Polazeći od ovoga u teoriji igara se formuliše sledeći princip: igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz, za njega, najnepovoljnije delovanje protivnika. Ovaj princip, koji diktira svakoj strani izbor svoje najopreznije strategije, računajući na, za sebe, najnepovoljnije ponašanje protivnika, naziva se principom minimaksa i predstavlja osnovni princip u teoriji igara.

Strategije, koje učesnici u igri biraju na osnovu ovog principa, nazivaju se minimaksnim strategijama

6.2. REŠAVANJE PROSTIH MATRIČNIH IGARA

1. Zadatak

Definicija igre. Posmatramo takvu igru gde svaki igrač, nezavisno od drugog igrača, može da izabere alternative, kako je pokazano u sledećoj tabeli 1.

Igrači	Alternative		
	x_1	x_2	x_3
I	x_1	x_2	x_3
II	y_1	y_2	y_3

Dobit ili funkcija cene igre za igrača I, koja zavisi od izbora mogućih strategija, data je sledećim skupom podataka,

$$\begin{aligned} C(x_1, y_1) &= 4, & C(x_1, y_2) &= -1, & C(x_1, y_3) &= -4, \\ C(x_2, y_1) &= 3, & C(x_2, y_2) &= 2, & C(x_2, y_3) &= 3, \\ C(x_3, y_1) &= -2, & C(x_3, y_2) &= 0, & C(x_3, y_3) &= 8. \end{aligned}$$

(*)

Naći rešenje igre, tj. odrediti:

- optimalni strategijski par (x_i, y_j) , (koji se još naziva i Borel - von Neumann-ovim strategijskim parom)
- naći vrednost matrice igre.

Rešenje. Napred definisanu igru možemo svesti na matičnu formu, kako je to prikazano u tabeli 2, gde redovi odgovaraju mogućim strategijama igrača I a kolone mogućim strategijama igrača II.

Tabela 2.

		Strategija igrača II			minimum po redu
		y_1	y_2	y_3	
Strategija igrača I	x_1	4	-5	-3	-4
	x_2	2	0	6	2
	x_3	-2	-3	8	-2
maximum po koloni		4	2	8	

Analizom matrice cene igre, igrač I utvrđuje da ako odabere strategiju x_1 minimalno što će dobiti je -4 , za strategiju x_2 je 2 , a ako odabere strategiju x_3 minimalna dobit je -2 . Igrač I će nastojati da odabere takvu strategiju kojoj odgovara maksimum među utvrđenim minimalnim dobitima. U našem slučaju je to strategija x_2 . Vrednost dobiti, koja odgovara strategiji x_2 , naziva se donjom vrednošću igre i obeležava se sa α . Prema tome, imamo da je

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) = 2.$$

Analizom matrice cene igre, igrač II utvrđuje da ako odabere strategiju y_1 maksimalno što može da izgubi je 4 , za strategiju y_2 je 2 , a ako odabere strategiju y_3 maksimalno što može da izgubi je 8 . Igrač II će nastojati da odabere takvu strategiju koja odgovara minimumu među utvrđenim maksimalnim gubicima po svakoj koloni. U našem slučaju to je strategija y_2 . Ovako dobijena vrednost se naziva gornjom vrednošću igre i obeležava se sa β . Prema tome, imamo da je

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) = 2.$$

Ako je gornja vrednost igre jednaka donjoj vrednosti igre za takvu matičnu igru se kaže da ima sedlo, a rešenje igre je u domenu čistih strategija. Drugim rečima, ako oba igrača pronađu bar po jednu strategiju, koja je prema predviđanjima najbolja u odnosu na sve strategije njegovog protivnika kaže se da igra za rešenje ima čiste strategije kao optimalne. Ovo je moguće samo onda ako matična igra ima sedlo. U tom slučaju vrednost igre je

$$v = \alpha = \beta.$$

U našem slučaju, matična igra ima sedlo i optimalne strategije su u domenu čistih strategija, to su:

- I igrač - strategija x_2 ,
II igrač - strategija y_2 ,

a donja vrednost igre je jednaka gornjoj vrednosti igre, tj.

(*)
Oba igrača imaju uvid u dobiti protivnika
Cilj igrača je da ostvari maksimalnu dobit dok, gde igrača da se u tome sprejedi

$$v = \alpha = \beta = 2.$$

Elementat $a_{22} = 2$ naziva se sedlom matrice igre.

Ako igrač I primeni bilo koju drugu strategiju, a ne strategiju x_2 , a igrač II ostane pri optimalnoj strategiji, dobit igrača I će biti umanjena. Takođe, ako igrač II primeni bilo koju drugu strategiju a ne y_2 , a igrač I ostane pri svojoj optimalnoj strategiji, gubitak igrača II će biti uvećan.

sport
broj poena
kompa. troškovi

2. Zadatak

Definicija zadatka. U oružanom sukobu lovačke avijacije i bombardera mogućnosti protivničkih strana definisane su na sledeći način: neka su avioni lovačke avijacije, koji pripadaju strani A (odbrana), prema svom naoružanju podeljeni u četiri grupe a_1 , a_2 , a_3 i a_4 . Ovi avioni mogu da se upotrebe kao odbrana protiv bombardera koji pripadaju protivničkoj strani B (napadač). Bombarderi mogu odabrati jednu od sledećih varijanti napada: da lete malim brzinama i da vrše neprekidnu paljbu, da lete srednjim brzinama i da vrše povremenu paljbu ili da lete velikim brzinama bez paljbe.

Odbrana želi da odabere lovačke avione sa najefikasnijim naoružanjem, pri čemu joj na raspolaganju stoje četiri strategije, a napadač želi da odabere najpogodniju varijantu napada, pri čemu mu na raspolaganju stoje tri strategije. Pretpostavimo da je cena igre definisana preko dobiti koju ostvaruje odbrana, a koja se izražava verovatnoćama gubitaka jednog bombardera koji koristi određenu varijantu napada i za neki određeni strategijski izbor odbrane. Ove verovatnoće su poznate za sve kombinacije strategija odbrane (A) i napadača (B). Prema tome, igra je u potpunosti definisana matricom igre C, čije ćemo vrste označiti sa a_i ($i = 1, 2, 3, 4$), kolone sa b_j ($j = 1, 2, 3$), a elemente matrice C sa c_{ij} . Vrednosti elemenata c_{ij} date su u tabeli 1.

a) Rešiti matricnu igru, tj. odrediti optimalne strategije učesnika u oružanom sukobu i naći vrednost igre.

b) Kako će uticati na rešenje problema promena verovatnoće c_{33} od vrednosti 0,12 na vrednost 0,09? U kom opsegu se može menjati ova verovatnoća a da to ne utiče na prvobitno rešenje problema.

Tabela 1.

B \ A	b_1 neprekidna paljba, male brzine	b_2 povremena paljba, sr. brzine	b_3 bez paljbe velike brzine	$\alpha_i = \min_j c_{ij}$
a_1	0.25	0.20	0.10	0.10
a_2	0.13	0.09	0.11	0.09
a_3	0.30	0.17	0.12	0.12
a_4	0.16	0.11	0.05	0.05
$\beta_j = \max_i c_{ij}$	0.30	0.20	0.12	

Rešenje. Polazi se od analize igre sa stanovišta odbrane. Ako odbrana odabere prvu strategiju, naoružanje a_1 , cena igre vezana je za prvi red matrice (a_1). Pod pretpostavkom da napadač zna za odluku odbrane, on će izabrati varijantu napada koja mu obezbeđuje minimalan gubitak, tj. minimalnu verovatnoću uništenja aviona-bombardera, a to je let bombardera velikom brzinom bez paljbe (varijanta napada b_3). Ova vrednost za odbranu je minimum onoga što može dobiti ako primeni strategiju a_1 . Ovom paru strategija (a_1 , b_3) odgovara verovatnoća uništenja bombardera, tj. vrednost igre

$$\alpha_1 = c_{13} = \min_j c_{ij} = 0.10 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Ako odbrana odabere lovce sa naoružanjem a_2 , napadač će se odlučiti za srednje brzine i povremenu paljbu, što odgovara minimumu dobiti za protivničku stranu A (odbrana). Prema tome, imamo da je

$$\alpha_2 = \min_j c_{2j} = c_{22} = 0.09 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Na isti način se može rezonovati i dalje, pri čemu se određuju minimalne dobiti za odbranu i to za svaki red, tj.

$$\alpha_i = \min_j c_{ij}$$

za svako fiksirano $i = 1, 2, 3, 4$ i promenljivo $j = 1, 2, 3$.

Ovako dobijene vrednosti igre upisane su u tabeli 1, kao vektor-kolona. Prema tome, transponovani vektor ovih vrednosti je

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T = (0.10; 0.09; 0.12; 0.05)^T.$$

Imajući u vidu da napadač postupa prema principu opreznosti, tj. garantovanih "dobitaka", odbrana će sa svoje strane nastojati da odabere onu strategiju kojoj odgovara maksimalna verovatnoća uništenja protivnika. Drugim rečima, odbrana nastoji da vrednost igre bude

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 0.12 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dakle, ovu maksimalnu garantovanu dobit odbrana će ostvariti primenom strategije a_3 , što odgovara upotrebi lovačke avijacije naoružane vrstom naoružanja a_3 .

Na sličan način ovu matricnu igru možemo analizirati sa stanovišta napadača. Naime, ako napadač odabere varijantu b_1 (neprekidna paljba pri malim brzinama), odbrana će tada odabrati strategiju koja joj obezbeđuje maksimalnu dobit. Drugim rečima, odbrana se suprotstavlja lovačkom avijacijom naoružanom vrstom naoružanja a_3 , pri čemu će verovatnoća uništenja protivnika biti najveća. Pri tome, vrednost igre za ove strategijske izbore je

$$\beta_1 = \max_i c_{i1} = c_{31} = 0.30 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Rezonujući na isti način, mogu se dobiti i ostali parovi strategija, koji odgovaraju maksimumima kolona. Ovi maksimumi se računavaju prema izrazu

$$\beta_j = \max_i c_{ij},$$

za svako fiksirano $j = 1, 2, 3, 4$ i promenljivo $i = 1, 2, 3, 4$.

Ovako dobijene vrednosti igre upisane su u tabeli 1 kao vektor red

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0.30; 0.20; 0.12).$$

Imajući u vidu da odbrana postupa prema principu opreznosti, tj. garantovanih dobitaka, napadač će sa svoje strane nastojati da odabere onu varijantu napada kojoj odgovara minimalna verovatnoća gubitaka. Drugim rečima, napadač nastoji da vrednost igre bude

$$\beta = \min_j \beta_j = 0.12.$$

Vrednost za β naziva se gornjom vrednošću igre, a vrednost za α naziva se donjom vrednošću igre.

Kako je u ovom slučaju

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \beta = \min_j \beta_j = 0.12,$$

to znači da su gornja i donja vrednost igre jednake i prema Borel-von-Nejmanovom kriterijumu igra ima sedlastu tačku $c_{33} = 0.12$, kojoj odgovara par čistih optimalnih strategija (a_3^*, b_3^*) . Na osnovu ovoga proizilazi da odbrana treba upotrebiti lovce sa naoružanjem a_3 , a bombarderi napadača treba da lete velikim brzinama bez paljbe. Vrednost igre je

$$\alpha = \beta = V = 0.12.$$

Rešenje zadatka pod b) Promena elementa matrice c_{33} može uticati i na rešenje matricne igre. Ako element c_{33} ima vrednost 0.09, u ovom slučaju donja vrednost igre je

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij} = 0.10,$$

a gornja vrednost igre je

$$\beta = \min_j \max_i c_{ij} = 0.11.$$

Prema tome, imamo da su gornja i donja vrednost igre različite, što znači da će vrednost igre ležati u granicama

$$\alpha < V < \beta,$$

U ovom slučaju rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija, tj. optimalne strategije biće takve da će igrači (protivničke strane) morati da biraju svoje čiste strategije sa određenim verovatnoćama.

Stabilnost prvobitnog optimalnog rešenja u kome igrači imaju čiste optimalne strategije zavisi od elemenata matrice cene igre i to u koloni i redu koji odgovaraju optimalnim strategijama. U našem slučaju rešenje igre će ostati nepromenjeno ako vrednost elementa c_{33} leži u granicama

$$0.11 \leq c_{33} \leq 0.17,$$

tj. mora biti veći ili najmanje jednak najvećem elementu u koloni, a manji ili najviše jednak najmanjem elementu u svome redu.

3. Zadatak

Definicija zadatka. Brigada radnika koja radi na elektrocentrali, koja će biti završena sledećeg proleća, stanuje u radničkom naselju nedaleko od gradilišta. Sredinom jeseni razmatra se problem nabavke uglja za zagrevanje naselja. Zavisno od toga kakva će biti nastupajuća zima, potrebe za ugljem biće različite. Ukoliko zima bude normalna trebaće 150 tona uglja, za blagu zimu – 120 tona, a za ostru zimu trebaće 180 tona uglja. Pošto se radnici sledećeg proleća sele na novo gradilište, višak uglja, koji ostane posle zime, neće biti moguće iskoristiti. Ako se ugalj nabavlja sredinom jeseni njegova cena će biti 100 novčanih jedinica po toni. Zavisno od toga da li će zima biti blaga, normalna ili oštra, tona uglja koja se bude nabavljala po zimi koštaće 100, 120 ili 140 novčanih jedinica po toni.

Sredinom jeseni, u vezi nabavke uglja za predstojeću zimu, pred upravom naselja stoje tri moguće strategije, tj. mogu nabaviti 120 t, 150 t, ili 180 t a preostalu količinu nabaviće u toku zime ukoliko bude potrebno.

a) Problem izbora optimalne strategije formulisati kao matricnu igru i formirati matricu cene igre.

b) Naći rešenje matricne igre, tj. odrediti optimalne strategije i vrednost matricne igre.

c) Ispitati stabilnost optimalnog rešenja igre.

Rešenje. Izbor strategije obezbeđenja ogreva posmatramo kao problem konflikta, pri čemu se rešavanje problema izbora strategije obezbeđenja ogreva svodi na rešavanje matricne igre. Učesnici u igri su, sa jedne strane – uprava naselja, a sa druge strane priroda. Ovakve matricne igre nazivaju se i igrama protiv prirode.

a) Matrica cene igre može se formirati tako što će se izračunati troškovi uprave gradilišta u zavisnosti od "strategije" prirode i odabrane strategije obezbeđenja ogreva. Iz postavke zadatka proizilazi da prirode može odabrati sledeće "strategije":

1) blaga zima sa cenom uglja u toku zime od 100 novčanih jedinica po toni

2) normalna zima sa cenom uglja u toku zime od 120 novčanih jedinica po toni i

3) Oštra zima sa cenom uglja u toku zime od 140 novčanih jedinica po toni.

Ovi troškovi sračunati su za sve kombinacije strategija, a rezultati su prikazani u tabeli 1.

Vrednosti cena plaćanja u prvom redu tabele 1 sračunate su na sledeći način. Polazi se od toga da je uprava gradilišta sredinom jeseni nabavila 120 tona uglja kada je cena uglja po toni 100 novčanih jedinica. Ako zima bude blaga uprava gradilišta imaće ukupne troškove ogreva $120 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} = 12.000 \text{ n.j.}$ Ovako sračunata vrednost sa promenjenim znakom uzima se da je jednaka koeficijentu c_{11} . Prema tome, imamo da je

$$c_{11} = -12.000,$$

a ostali elementi su,

$$c_{12} = -120 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} - 30 \text{ t} \times 120 \text{ n.j./t} = -15.600,$$

$$c_{13} = -120 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} - 60 \text{ t} \times 140 \text{ n.j./t} = -20.400.$$

Tabela 1.

Prroda Uprava gradilišta	Blaga zima cena uglja 100 din./t	Normalna zima, cena uglja 120 din./t.	Jaka zima, cena uglja 140 din./t	Minimum po redu
120 tona	-12.000	-15.600	-20.400	20.400
150 tona	-15.000	-15.000	-19.200	-19.200
180 tona	-18.000	-18.000	-18.000	-18.000
Maximum po koloni	-12.000	-15.000	-18.000	

Vrednosti elemenata matrice plaćanja u drugom redu tabele 1 sračunati su na sledeći način,

$$c_{21} = -150 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} = -15.000,$$

$$c_{22} = -150 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} = -15.000,$$

$$c_{23} = -150 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} - 30 \text{ t} \times 140 \text{ n.j./t} = -19.200$$

Elementi u trećem redu tabele 1 imaju svi iste vrednosti, tj.

$$c_{31} = c_{32} = c_{33} = -180 \text{ t} \times 100 \text{ n.j./t} = -18.000.$$

b) Rešenje matrice igre treba tražiti pre svega u domenu čistih strategija. Prema tome, treba izračunati donju vrednost igre, za koju imamo da je

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max(-20.400; -19.200; -18.000) = -18.000$$

dok je gornja vrednost igre

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(-12.000; -15.000; -18.000) = -18.000.$$

Kako je $\alpha = \beta$ matricna igra ima sedlo, a vrednost matrice igre (V) je

$$V = \alpha = \beta.$$

Rešenje igre se nalazi u domenu čistih strategija. Čiste optimalne strategije odgovaraju elementu c_{33} koji predstavlja sedlo ove matrice igre: Prema tome, za upravu gradilišta optimalna strategija je da sredinom jeseni obezbedi 180 tona uglja.

c) Stabilnost optimalnog rešenja merena promenom elemenata c_{33} , pri nepromenljivosti ostalih elemenata matrice cene igre, može se izraziti opsegom

promena elementa c_{33} za koje optimalno rešenje ostaje nepromenjeno. U ovom slučaju taj opseg je

$$-19.200 < c_{33} < -15.000.$$

4. Zadatak

Definicija zadatka. Konfliktna situacija predstavlja oružani sukob dveju protivničkih strana "Crvenih" i "Plavih". Za nanošenje udara po protivniku "Crveni" raspolaže sa četiri tipa oružja: K_1, K_2, K_3 i K_4 . U cilju smanjenja efikasnosti primene oružja od strane "Crvenih", "Plavi" mogu da primene četiri tipa sredstava za elektronsko ometanje: E_1, E_2, E_3 i E_4 . Efikasnost oružja "Crvenih" izražava se kao procenat uništenja tučenog cilja. Kako preciznost gađanja zavisi od efikasnosti elektronskih sredstava ometanja, to će ovi procenti biti različiti za različite strategijske izbore protivničkih strana.

Matrica cene igre data je u Tabeli 1. Potrebno je:

- naći optimalne strategije protivničkih strana;
- izračunati vrednost igre i objasniti značenje te vrednosti

„Plavi” „Crveni”	E_1	E_2	E_3	E_4
K_1	60	60	60	70
K_2	90	50	40	80
K_3	80	70	60	90
K_4	70	30	50	70

Rešenje. Da bi odredili domen u kome se nalazi rešenje matrice igre, pri čemu se misli na domen čistih strategija i domen mešovityh strategija, potrebno je pronaći donju i gornju vrednost igre.

Ako sa α označimo donju vrednost igre, tada je

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m),$$

gde je

$$\alpha_i = \min_j c_{ij},$$

a c_{ij} odgovarajući element iz tabele 1.

Prema tome, iz tabele 1 imamo da je:

$$\alpha_1 = \min(60, 60, 60, 70) = 60,$$

$$\alpha_2 = \min(90, 50, 40, 80) = 40,$$

$$\alpha_3 = \min(80, 70, 60, 90) = 60,$$

$$\alpha_4 = \min(70, 30, 50, 70) = 30.$$

Otuda, za donju vrednost matricne igre, dobija se da je

$$\alpha = \max(60, 40, 60, 30) = 60.$$

Ako sa β označimo gornju vrednost matricne igre, tada je

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_n),$$

gde je

$$\beta_j = \max_i c_{ij}.$$

Prema tome, iz tabele 1 imamo da je:

$$\beta_1 = \max(60, 90, 80, 70) = 90,$$

$$\beta_2 = \max(60, 50, 70, 30) = 70,$$

$$\beta_3 = \max(60, 40, 60, 50) = 60,$$

$$\beta_4 = \max(70, 80, 90, 70) = 90.$$

na osnovu čega, za gornju vrednost matricne igre, dobijamo da je

$$\beta = \min(90, 70, 60, 70) = 60.$$

Kako je $\alpha = \beta = 60$, to znači da igra ima sedlo i da se rešenje igre nalazi u domenu čistih strategija.

U ovom slučaju igra ima dva sedla. Tačke sedla su c_{13} i c_{33} . Prema tome, "Crveni" ima dve optimalne čiste strategije K_1 i K_3 , dok "Plavi" ima optimalnu čistu strategiju E_3 .

Tačke sedla nalaze se na preseku ovih optimalnih strategija.

Vrednost igre je

$$V = \alpha = \beta = 60,$$

što znači, da bez obzira na strategijski izbor "Plavog", ako "Crveni" primeni optimalne strategije K_1 ili K_3 postići će uništenje cilja sa 60 procenata. Međutim, ako protivnik ne primeni svoju optimalnu strategiju taj procenat će biti još veći.

5. Zadaci za vežbu

1. Naći rešenje matricnih igara ako je dobit igrača I u odnosu na igrača II definisana matricom cene.

a)

Igrač I \ Igrač II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	3	1	5	6
A ₂	0	-1	1	3
A ₃	-3	-5	1	0

b)

Igrač I \ Igrač II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	2	9	3	5
A ₂	7	6	5	8
A ₃	2	3	4	7
A ₄	5	6	5	6

c)

Igrač I \ Igrač II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	-1	-1	3	-1
A ₂	2	-2	-1	-1
A ₃	-1	-1	2	5

Rešenja problema nalaze se u domenu čistih strategija. Optimalne strategije su: a) $S_{Op} = \{(A_1, B_2)\}$; b) $S_{Op} = \{(A_2, B_3) \text{ ili } (A_4, B_3)\}$; c) $S_{Op} = \{(A_1, B_2) \text{ ili } (A_3, B_2)\}$.

2. Pokazati da matricna igra definisana matricom $A = \|a_{ij}\|$, čije su dimenzije $n \times m$, ima rešenje u domenu čistih strategija ako je $a_{ij} = i - j$. Pokazati da će vrednost igre biti $V = a_{nm}$.

a) vektor mešovite strategije za igrača I,

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n), \text{ gde je } p_1 + p_2 + \dots + p_j + \dots + p_n = 1;$$

b) vektor mešovite strategije za igrača II,

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_m), \text{ gde je } q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_m = 1; i$$

c) vrednost matrice igre koja je definisana sledećim izrazom

$$C(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j, \text{ gde su}$$

- p_i — verovatnoća izbora i-te čiste strategije igrača I;
- q_j — verovatnoća izbora j-te čiste strategije igrača II;
- a_{ij} — dobit u igri igrača I u odnosu na igrača II za strategijski par (i, j).

6.3.1. Rešavanje matrice igara 2 x 2

Za matrice igre kod kojih svakom od igrača stoje na raspolaganju samo po dve čiste strategije kažemo da spadaju u grupu matrice igara čija je matrica cene dimenzija 2 x 2. Ako ovakva matrice igra nema sedlo tada je rešenje matrice igre u domenu mešovite strategije, tj. verovatnoće p_1, p_2, q_1 i q_2 su veće od nule. Postupak rešavanja ovih matrice igara ilustrovan je sledećim primerima:

6. Zadatak

U nekoj sportskoj igri

dvije vrste formacija odbrane

Definicija zadatka. U konfliktnoj situaciji učestvuju dve protivničke strane. Prvoj strani na raspolaganju stoje dve vrste oružja: A_1 i A_2 , a drugoj strani dva tipa aviona B_1 i B_2 . Cilj protivničke strane A je da odabere takvo oružje koje je efikasnije u odnosu na upotrebljeni avion. Međutim, protivnik nastoji da smanji verovatnoću pogađanja izborom pogodnijeg aviona.

Verovatnoće za sve kombinacije strategija protivničkih strana date su u tabeli 1, koja predstavlja matricu cene igre, tako da je konfliktna situacija definisana kao antagonistička igra.

Tabela 1

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	0,4	0,2
	A_2	0,2	0,6

- a) Naći gornju i donju vrednost matrice igre.
- b) Odrediti optimalne strategije i vrednost igre.

6.3. REŠAVANJE MEŠOVITIH MATRIČNIH IGARA

Rešiti matrice igru znači odrediti optimalne strategije koje obezbeđuju najbolji očekivani ishod igre, pod uslovom da se te strategije sistematski primenjuju u toku igre.

Optimalna strategija može biti čista strategija (matrice igre sa sedlom) ili mešovita strategija. Čistih strategija ima onoliko koliko igrač ima alternativa ponašanja u igri.

Mogućnosti izbora mešovite strategije su daleko veće. Ukoliko je veći broj čistih strategija to su i ove mogućnosti veće. Za dve čiste strategije u igri, ako igrač želi da primenjuje mešovite strategije, on će se nekom verovatnoćom p_1 koristiti jednu čistu strategiju ili sa verovatnoćom $1 - p_1$ drugu čistu strategiju. Njegove mogućnosti, u ovom slučaju, su ograničene na vrednosti verovatnoće p_1 u intervalu od 0 do 1.

U opštem slučaju, rešiti matrice igru znači odrediti:

Rešenje

a) Donja vrednost igre definisana je izrazom

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

gde su a_{ij} elementi matrice cene, koji su dati u tabeli 1.

Prema tome, imamo da je

$$\alpha_1 = \min(0,4; 0,2) = 0,2,$$

$$\alpha_2 = \min(0,2; 0,6) = 0,2.$$

Otuda je

$$\alpha = \max(\alpha_1; \alpha_2) = \max(0,2; 0,2) = 0,2$$

$$\alpha = 0,2.$$

Gornja vrednost igre definisana je izrazom

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Prema tome, za date brojne vrednosti imamo da je:

$$\beta_1 = \max(0,4; 0,2) = 0,4$$

$$\beta_2 = \max(0,2; 0,6) = 0,6,$$

$$\beta = \min(\beta_1; \beta_2) = \min(0,4; 0,6) = 0,4$$

$$\beta = 0,4.$$

Kako je $\alpha \neq \beta$ matricna igra nema sedlo i optimalne strategije igrača nalaze se u domenu mešovitih strategija.

b) Vektor mešovite strategije protivničke strane A je

$$P = (p_1, p_2), \text{ gde je } p_1 + p_2 = 1,$$

što znači da će protivnička strana A odabirati strategijsku mogućnost A_1 sa verovatnoćom p_1 a strategijski izbor A_2 sa verovatnoćom p_2 .

Vektor mešovite strategije protivničke strane B je

$$Q = (q_1, q_2), \text{ gde je } q_1 + q_2 = 1$$

Vrednost matricne igre je definisana sledećim izrazom

$$C(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j.$$

Za dati brojni primer imamo da je

$$C(P, Q) = 0,4 p_1 q_1 + 0,2 p_1 q_2 + 0,2 p_2 q_1 + 0,6 p_2 q_2,$$

ili možemo pisati da je

$$C(P, Q) = p_1 \underbrace{(0,4 q_1 + 0,2 q_2)}_{\bar{A}} + p_2 \underbrace{(0,2 q_1 + 0,6 q_2)}_{\bar{A}}.$$

Ako je rešenje igre za igrača B u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće q_1 i q_2 veće od nule i ispunjavaju uslov mešovitih strategija igrača B, da je $q_1 + q_2 = 1$. tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$C(P, Q) = 0,4 q_1 + 0,2 q_2,$$

$$C(P, Q) = 0,2 q_1 + 0,6 q_2.$$

Ovome se dodaje da je $q_1 + q_2 = 1$, pri čemu se dobijaju tri jednačine sa tri nepoznate, čije je rešenje

$$q_1 = \frac{2}{3}; q_2 = \frac{1}{3} \text{ i } C(P, Q) = \frac{1}{3}.$$

Ako izraz za $C(P, Q)$ uradimo po verovatnoćama q_1 i q_2 , dobija se

$$C(P, Q) = q_1 (0,4 p_1 + 0,2 p_2) + q_2 (0,2 p_1 + 0,6 p_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača A u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće p_1 i p_2 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $p_1 + p_2 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$C(P, Q) = 0,4 p_1 + 0,2 p_2,$$

$$C(P, Q) = 0,2 p_1 + 0,6 p_2$$

i kako je $p_1 + p_2 = 1$, dobijaju se sledeća rešenja za p_1, p_2 i $C(P, Q)$.

$$p_1 = \frac{2}{3}; p_2 = \frac{1}{3} \text{ i } C(P, Q) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$$

Dakle, optimalne strategije su

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

a vrednost igre je

$$C(P, Q) = \frac{1}{3}.$$

7. Zadatak

Ako je matricna igra definisana matricom 2×2 , pokazati da se komponente vektora mešovitih strategija mogu sračunati na osnovu sledećih opštih izraza za komponente vektora i vrednost matricne igre.

	B	B_1	B_2
A		q_1	q_2
A_1	p_1	a_{11}	a_{12}
A_2	p_2	a_{21}	a_{22}

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}; p_2 = 1 - p_1;$$

$$C(P, Q) = a_{11} p_1 + a_{21} p_2;$$

$$q_1 = \frac{C(P, Q) - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2 = 1 - q_1.$$

8. Zadatak

Definicija zadatka. Dva preduzeća koja dele jedno tržište mogu reklamirati svoje proizvode preko TV i preko novina. Svakog meseca organi upravljanja preduzeća donose odluku o svom budžetu za reklamu. Pretpostavimo da su organi upravljanja preduzeća A preko svojih stručnih službi uspeli da odrede:

1. da, ako u jednom mesecu njihovo preduzeće reklamira posmatrani proizvod samo na TV, oni će imati dodatnu dobit od:

a) 100 novčanih jedinica, ako se konkurentsko preduzeće B odluči na istu strategiju, i

b) 0 novčanih jedinica, ako se preduzeće B odluči na strategiju reklamiranja preko novina.

2. da, ako reklamiraju svoj proizvod samo preko novina:

a) izgubiće 100 novčanih jedinica, ako preduzeće B reklamira svoj proizvod preko TV, a

b) zaradiće 200 novčanih jedinica, ako se preduzeće B odluči na reklamu preko novina.

Potrebno je:

- 1) Formirati matricu cene igre; i
- 2) Naći rešenje matrice igre.

Rešenje

Matrica cene može biti prikazana na sledeći način

		q_1	q_2
	II pred.		
	I pred.	TV	N
p_1	TV	100	0
p_2	N	-100	200

		N	TV
	II pred.		
	I pred.		
N		200	-100
TV		0	100

Vektor mešovite strategije za preduzeće II dobijamo rešavanjem sledećeg sistema jednačina

$$100 q_1 + 0 q_2 = V$$

$$-100 q_1 + 200 q_2 = V$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

odakle proizilazi da je

$$q_1 = \frac{1}{2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ i}$$

$$C(P, Q) = V = 50.$$

Vektor mešovite strategije za igrača I određuje se na sličan način rešavajući sistem jednačina:

$$100 p_1 - 100 p_2 = V$$

$$200 p_2 = V$$

$$p_1 + p_2 = 1,$$

odakle je

$$p_1 = \frac{3}{4}; \quad p_2 = \frac{1}{4}; \quad \text{tj. } P = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

9. Zadatak

Definicija zadatka. Matrična igra 2×2 definisana je matricom cene u kojoj elementi predstavljaju dobit igrača I u odnosu na igrača II.

		II	
		B_1	B_2
	I		
	A_1	-1	2
	A_2	3	1

Dati grafičku interpretaciju matrične igre i naći njeno rešenje.

Rešenje. Pošto ovmatrična igra nema sedlo rešenje problema se nalazi u domenu mešovitih strategija.

Vektor mešovite strategije za igrača I, $P = (p_1, p_2)$, određuje se preko očekivanih dobiti

$$C(P, B_1) = -p_1 + 3 p_2;$$

$$C(P, B_2) = 2 p_1 + p_2.$$

Kako je $p_1 + p_2 = 1$ to se gornji izrazi mogu pisati u sledećem obliku

$$C(P, B_1) = 4 p_2 - 1$$

$$C(P, B_2) = 2 - p_2.$$

Igrač I biraće vektor mešovite strategije P tako da očekivane dobiti $C(P, B_1)$ i $C(P, B_2)$ budu veće ili najmanje jednake vrednosti matrične igre.

Ako očekivane dobiti predstavimo grafički, dobija se sledeći dijagram (slika 1) promene minimalne očekivane dobiti u zavisnosti od verovatnoće p_2 .

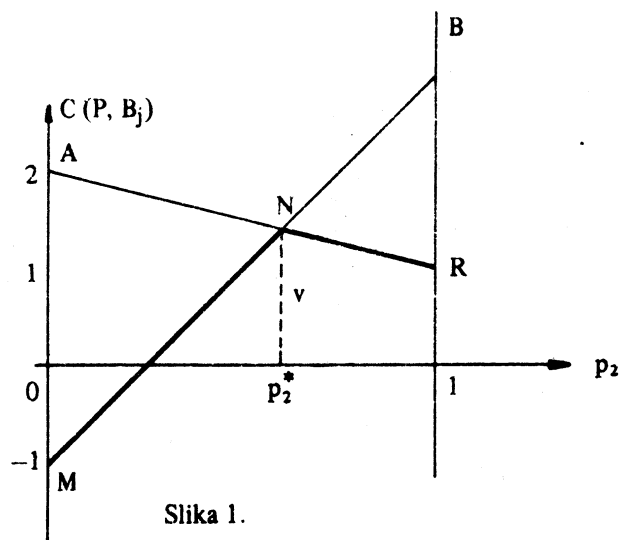
Za igrača I određivanje optimalne mešovite strategije p^* sastoji se u iznalaženju veovatnoće p_2 , koja će omogućiti najveću minimalnu dobit. Ako to analitički izrazimo, znači da će igrač I ispitivati funkciju $f(p_2)$ definisanu izrazom

$$f(p_2) = \min \{4p_2 - 1; \quad 2 - p_2\}.$$

Ova funkcija definisana je u intervalu $0 < p_2 < 1$ i njoj na grafikonu odgovara izlomljena linija MNR.

Optimalna verovatnoća p_2^* određuje se na osnovu izraza

$$f(p_2^*) = \max_{p_2} f(p_2) = v,$$



Slika 1.

gde je v vrednost matrice igre. Vrednosti za v i p_2^* određujemo iznalaženjem koordinata tačke preseka N duži AR i BM , tj.

$$4p_2^* - 1 = 2 - p_2^*$$

$$p_2^* = \frac{3}{5}; p_1^* = 1 - p_2^* = \frac{2}{5}.$$

Ovim je određen vektor mešovite strategije igrača I

$$P^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

i vrednost matrice igre

$$C(P^*, Q^*) = v = \frac{7}{5}.$$

Vektor mešovite strategije za igrača II, Q^* , može se odrediti na sličan način – grafički ili pak rešavajući sistem jednačina

$$\begin{aligned} -q_1 + 2q_2 &= v \\ 3q_1 + q_2 &= v \\ q_1 + q_2 &= 1. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je

$$q_1 = \frac{1}{5} \quad i \quad q_2 = \frac{4}{5}.$$

Prema tome rešenje ove matrice igre je

$$P = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right); Q = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right) \quad i$$

$$C(P, Q) = \frac{7}{5}.$$

10 Zadatak

Definicija zadatka. Dati grafičku ilustraciju matrice igara i naći njihova rešenja.

	B		
A		B ₁	B ₂
A ₁		0	5
A ₂		1	8

	B		
A		B ₁	B ₂
A ₁		2	3
A ₂		7	1

	B		
A		B ₁	B ₂
A ₁		4	2
A ₂		1	3

Rešenje:

$$a) P = \left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14}\right) \quad b) P = (0,85; 0,15) \quad c) P = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

$$Q = \left(\frac{13}{14}; \frac{1}{14}\right) \quad Q = (0,3; 0,7) \quad Q = \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$$

$$C(P, Q) = -\frac{5}{14} \quad C(P, Q) = 2,7 \quad C(P, Q) = \frac{7}{4}.$$

6.3.2. Rešavanje matrice igara $n \times 2$

Matrične igre kod kojih igraču I stoji na raspolaganju n čistih strategija a igraču II samo dve mogu se rešavati grafički svodenjem na matricu dimenzija 2×2 .

Postupak rešavanja ovih matrice igara ilustrovan je sledećim primerima.

11. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra definisana je matricom cene

	B	B ₁	B ₂
A			
A ₁		10	-4
A ₂		5	7
A ₃		-5	13

gde elementi matrice cene definišu dobit učesnika u igri A u odnosu na učesnika B.

Odrediti optimalne strategije igrača i vrednost matrice igre.

Rešenje. Rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija, a vrednost igre u granicama

$$\alpha = 5 \leq v \leq \beta = 10.$$

U ovakvim slučajevima neophodno je prvo odrediti vektor optimalne strategije za igrača B. U tom cilju definišu se očekivani gubici za igrača B za svaki mogući izbor čiste strategije igrača A. Tako imamo da je

$$\begin{aligned} C(A_1, Q) &= 10 q_1 - 4 q_2 \\ C(A_2, Q) &= 5 q_1 + 7 q_2 \\ C(A_3, Q) &= -5 q_1 + 13 q_2. \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je $q_1 + q_2 = 1$, ovaj sistem jednačina se svodi na sledeće

$$\begin{aligned} C(A_1, Q) &= 14 q_1 - 4 \\ C(A_2, Q) &= 7 - 2 q_1 \\ C(A_3, Q) &= 13 - 18 q_1. \end{aligned}$$

Grafički prikaz ovog sistema jednačina dat je na slici 1.

Igrač B nastojao da odabere verovatnoću q_1 tako da minimizira maksimalne moguće gubitke, tj. da ne dozvoli da njegovi gubici budu veći od vrednosti igre. Otuda igrač B ispituje funkciju $f(q_1)$, koja je definisana izrazom

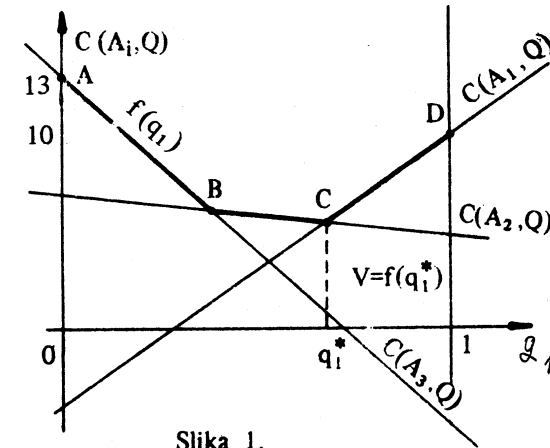
$$f(q_1) = \max \{ 14 q_1 - 4; 7 - 2 q_1; 13 - 18 q_1 \}.$$

Prema tome, optimalna vrednost q_1^* određuje se na osnovu izraza

$$f(q_1^*) = \min_{q_1} \{ f(q_1) \}$$

Iz grafičkog prikaza se vidi da su q_1^* i $f(q_1^*)$ koordinate tačke preseka pravih

$$\begin{aligned} C(A_1, Q) &= 14 q_1 - 4 \\ C(A_2, Q) &= 7 - 2 q_1. \end{aligned}$$



Slika 1.

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se da je

$$q_1^* = \frac{11}{16} \text{ i } q_2^* = \frac{5}{16}, \text{ a}$$

$$f(q_1^*) = \frac{45}{8} = v.$$

Polazeći od ovoga mogu se računati očekivani gubici

$$C(A_1, Q) = \frac{45}{8}$$

$$C(A_2, Q) = \frac{45}{8}$$

$$C(A_3, Q) = \frac{5}{8}.$$

Imajući u vidu opšti izraz za vrednost matrice igre može se pisati da je

$$\begin{aligned} v = C(P, Q) &= \sum_{i=1}^3 C(A_i, Q) p_i, \\ C(P, Q) &= \frac{45}{8} \cdot p_1 + \frac{45}{8} \cdot p_2 + \frac{5}{8} \cdot p_3, \end{aligned}$$

a kako je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, to se može pisati da je

$$C(P, Q) = \frac{45}{8} p_1 + \frac{45}{8} (1 - p_1 - p_3) + \frac{5}{8} p_3 = \frac{45}{8} - \frac{40}{8} p_3.$$

Igrač A će nastojati da odabere vektor mešovite strategije tako da njegov dobitak u igri ne bude manji od vrednosti igre, tj. sledi da je $p_3 = 0$. Za igrača I igra se svodi na matricu cene

		B	
		B ₁	B ₂
A			
A ₁		10	-4
A ₂		5	7

čije je rešenje $p_1 = \frac{1}{8}$ a $p_2 = \frac{7}{8}$. Prema tome, možemo pisati da je rešenje matricne igre

$$P^* = \left(\frac{1}{8}; \frac{7}{8}; 0 \right)$$

$$Q^* = \left(\frac{11}{16}; \frac{5}{16} \right)$$

$$C(P^*, Q^*) = \frac{45}{8}$$

12. Zadatak

Definicija zadatka. Za matricne igre definisane matricama cene odrediti optimalne strategije igrača i vrednost igre,

		B	
		B ₁	B ₂
A			
A ₁		3	0
A ₂		2	3
A ₃		0	4
A ₄		4	-1

		B	
		B ₁	B ₂
A			
A ₁		7	-1
A ₂		5	4
A ₃		1	5
A ₄		3	-2
A ₅		2	1

		B	
		B ₁	B ₂
A			
A ₁		1	-1
A ₂		0	1
A ₃		-1	0
A ₄		2	-3
A ₅		1	2

ako elementi matrica određuju dobit igrača A u odnosu na igrača B za različite parove čistih strategija.

Rešenje

a) $P = (0; 5/6; 0; \frac{1}{6})$

b) $P = (0; 4/5; 1/5; 0; 0)$

$Q = (2/3; 1/3)$

$Q = (1/5; 4/5)$

$C(P, Q) = 7/3$

$C(P, Q) = \frac{21}{5}$

c) $P = (0; 0; 0; 1/6; 5/6)$

$Q = (5/6; 1/6)$

$C(P, Q) = 7/6$.

13. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra svodi se na matricu cene oblika

		B	
		B ₁	B ₂
A			
A ₁		2	2
A ₂		4	-2
A ₃		0	4

Pokazati da rešenje matricne igre nije jednoznačno u pogledu optimalnih mešovutih strategija.

Odrediti vrednost matricne igre i optimalne strategije za igrača A i B.

Rešenje: Vrednost matricne igre nalazi se u granicama $2 < V < 4$. Očekivani gubici igrača B definisani su sistemom jednačina

$$C(A_1, Q) = 2q_1 + 2q_2$$

$$C(A_2, Q) = 4q_1 - 2q_2$$

$$C(A_3, Q) = 4q_2$$

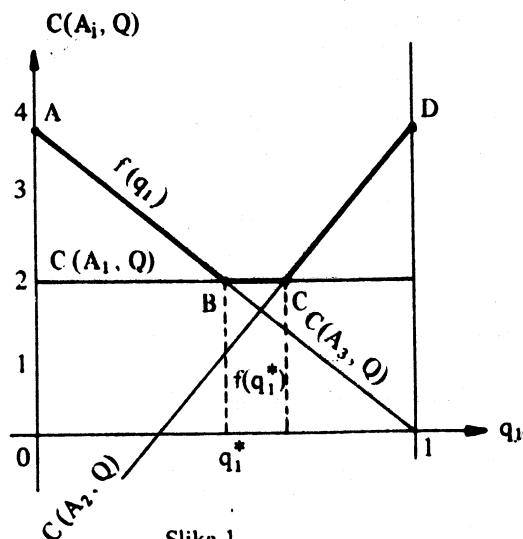
Kako je $q_1 + q_2 = 1$ to se ovaj sistem svodi na sledeće jednačine

$$C(A_1, Q) = 2$$

$$C(A_2, Q) = 6q_1 - 2$$

$$C(A_3, Q) = 4 - 4q_1$$

Ove jednačine koje definišu promenu očekivanog gubitka igrača B, koji primenjuje mešovitu strategiju, u zavisnosti od strategijskog izbora igrača A grafički su prikazane na sledećem dijagramu (slika 1).



Slika 1.

Funkcija najvećih gubitaka za igrača B definisana je izrazom

$$f(q_1) = \max \{ 2; 6q_1 - 2; 4 - 4q_1 \}.$$

$$0 \leq q_1 \leq 1$$

Vrednost matrice igre je

$$C(P, Q) = v = f(q_1^*) = \min_{q_1} \{ f(q_1) \} = 2$$

koja se sračunava određivanjem ordinata tačke B ili C.

Iz ovog proizilazi da rešenje za optimalnu strategiju igrača B nije jednoznačno. Sve optimalne strategije mogu se odrediti analizom dveju pomoćnih matrice igara:

	B		
	B ₁	B ₂	
A			
A ₁	2	2	
A ₃	0	4	

	B		
	B ₁	B ₂	
A			
A ₁	2	2	
A ₂	4	2	

Rešenje ovih matrice igara su

$$\text{I) } P = (1, 0) \quad \text{II) } P = (1, 0)$$

$$Q = (1/2, 1/2) \quad Q = (2/3, 1/3)$$

$$C(P, Q) = 2 \quad C(P, Q) = 2.$$

Vrednost $q_1 = 1/2$ je apscisa tačke B, a vrednost $q_1 = 2/3$ je apscisa tačke C.

Optimalne strategije za igrača B su strategije

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ i } (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

kao i sve strategije dobijene konveksnom kombinacijom ovih, tj.

$$\lambda (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (1 - \lambda) (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6})$$

$$\text{za } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Prema tome, rešenje prvotibne matrice igre je

$$P = (1, 0, 0)$$

$$Q = (\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}) \quad \text{za } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$C(P, Q) = 2.$$

Rešenje igre za igrača A je u domenu čiste strategije,

dok je za igrača B to rešenje u domenu mešovite strategije. Međutim, ako se matrice I i II posmatraju izolovano tada je očigledno da postoji dominacija među čistim strategijama B₁ i B₂, i jedna i druga matrice igra imaju sedlo, ali to ne utiče na rešenje prvotibne matrice igre.

6.3.3. Rešavanje matrice igara 2 x m

Matrice igre kod kojih igraču I stoji na raspolaganju 2 čiste strategije, a igraču II m različitih čistih strategija, mogu se takođe rešavati grafički svođenjem na matricu dimenzije 2 X 2.

Postupak rešavanja ovih matrice igara ilustrovan je sledećim primerima.

14. Zadatak

Definicija zadatka. U matricejnoj igri igraču I stoji na raspolaganju strategije P₁ i P₂, a igraču II strategije Q₁, Q₂ i Q₃. Element a_{ij} u matrici cene predstavlja dobit za igrača I ako odabere i-tu strategiju a njegov protivnik istovremeno odabere j-tu strategiju. Za igrača II ovaj isti element predstavlja gubitak u igri za odgovarajući par strategija. Matrica cene igre data je u tabeli 1.

Tabela 1

Igrač II			
	Q_1	Q_2	Q_3
Igrač I			
P_1	6	5	10
P_2	10	20	3

Potrebno je:

- Odrediti optimalne mešovite strategije oba igrača i vrednost igre;
- Kakve će biti optimalne mešovite strategije igrača ako element a_{13} u matrici cene promeni vrednost, tako da je nova vrednost ovog elementa jednaka 5?

Rešenje. Matrična igra nema sedlo i rešenje igre se nalazi u domenu mešovityh strategija. Matrična igra ima oblik $(2 \times m)$, što znači da ćemo prvo tražiti vektor mešovite strategije za igrača I, tj. traži se

$$P = (p_1, p_2),$$

gde je

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ i } p_i > 0 \text{ za } i = 1, 2.$$

Pre svega, biće potrebno napisati izraze za očekivana plaćanja kada igrač I koristi mešovitu strategiju, a igrač II neki od strategijskih izbora: Q_1 , Q_2 ili Q_3 . U ovom slučaju dobija se, da je

$$\begin{aligned} C(P, Q_1) &= 6p_1 + 10p_2 \\ C(P, Q_2) &= 5p_1 + 20p_2 \\ C(P, Q_3) &= 10p_1 + 3p_2 \end{aligned}$$

pri čemu je

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Kada se u navedenom sistemu jednačina smeni vrednost za $p_2 = 1 - p_1$ dobija se novi sistem jednačina

$$\begin{aligned} C(P, Q_1) &= 10 - 4p_1 \\ C(P, Q_2) &= 20 - 15p_1 \\ C(P, Q_3) &= 3 + 7p_1 \end{aligned}$$

Za igrača I, određivanje optimalne mešovite strategije znači da on treba da odredi takvu vrednost p_1 , koja će omogućiti što je moguće veću minimalnu dobit.

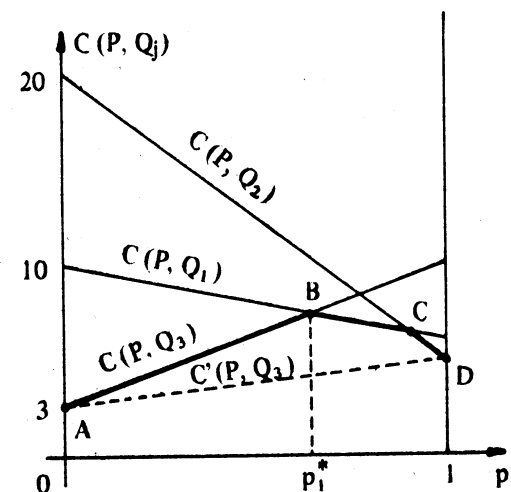
Ako to analitički izrazimo, znači da će igrač I ispitivati funkciju $f(p_1)$ definisanu izrazom

$$f(p_1) = \min \{ 10 - 4p_1; 20 - 15p_1; 3 + 7p_1 \}$$

u intervalu $0 \leq p_1 \leq 1$, pri čemu se traži takvo p_1^* za koje važi relacija

$$f(p_1^*) = \max_{p_1} f(p_1)$$

Da bi odredili funkciju $f(p_1)$, moramo grafički prikazati očekivana plaćanja igrača II u funkciji verovatnoće p_1 , koja su definisana prethodnim sistemom jednačina. Ovaj grafički prikaz dat je na slici 1.



Slika 1.

Izlomljena linija ABCD predstavlja funkciju $f(p_1)$ sa maksimumom u tački B. Prema tome, tačka B odgovara optimalnoj mešovitoj strategiji igrača I, obezbeđujući mu najveću minimalnu dobit, a p_1^* sračunavamo tražeći presek pravih $C(P, Q_3)$ i $C(P, Q_1)$, tj. imamo da je

$$10 - 4p_1^* = 3 + 7p_1^*,$$

odakle proizilazi da je

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{7}{11}, \quad p_2^* = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11} \\ C(P, Q_1) &= \frac{82}{11} \end{aligned}$$

Igrač II mora nastojati da odabere svoju mešovitu strategiju tako da ne dozvoli igraču I da ostvari veću dobit nego što je dobit

$$C(P^*, Q_1) = \frac{82}{11}$$

Naime, na osnovu jednačina za $C(P, Q_1)$, $C(P, Q_2)$ i $C(P, Q_3)$ sračunavaju se prosečna plaćanja, pri čemu se dobija

$$C(P^*, Q_1) = \frac{82}{11},$$

$$C(P^*, Q_2) = \frac{115}{11},$$

$$C(P^*, Q_3) = \frac{82}{11}.$$

Polazeći od opšteg izraza za vrednost matricne igre možemo pisati da je

$$C(P^*, Q) = \sum_{j=1}^3 C(P^*, Q_j) \cdot q_j,$$

te prema tome, imamo da je

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} q_1 + \frac{115}{11} q_2 + \frac{82}{11} q_3,$$

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} q_1 + \frac{115}{11} q_2 + \frac{82}{11} (1 - q_1 - q_2),$$

$$C(P^*, Q) = \frac{82}{11} + \frac{33}{11} q_2.$$

Iz poslednje jednačine očigledno je da igrač II treba da odabere strategiju $q_2 = 0$. Prema tome, optimalna mešovita strategija igrača II je

$$Q^* = (q_1^*, 0, q_3^*),$$

što je ekvivalentno matricnoj igri 2×2 sa matricom cene datom u tabeli 2.

Tabela 2

	II	Q_1	Q_3
I			
P_1		6	10
P_2		10	3

Rešavajući ovu matricnu igru dobijamo rešenje za q_1^* i q_3^*

$$q_1^* = \frac{\frac{82}{11} - 10}{6 - 10} = \frac{7}{11},$$

$$q_3^* = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}.$$

Vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je

$$Q^* = \left(\frac{7}{11}; 0; \frac{4}{11}\right),$$

a vrednost matricne igre je

$$C(P^*, Q^*) = \frac{82}{11}.$$

Ako je vrednost elementa $a_{13} = 5$, problem se svodi na rešavanje nove matricne igre. Međutim, ako na grafikonu (slika 1) ucrtamo novo očekivano plaćanje

$$C(P, Q_3) = 5 p_1 + 3 p_2 = 2 p_1 + 3,$$

s obzirom da je $p_1 + p_2 = 1$, te možemo zaključiti da se u ovom slučaju funkcija $f(p_1)$ svodi na duž AD a p_1^* je jednako jedinici, što znači da se rešenje igre nalazi u domenu čisith strategija, tj. matricna igra ima sedlo i rešenje je

$$P = (1; 0), Q = (0; 0; 1) \text{ i } C(P, Q) = 5.$$

15. Zadatak

Definicija zadatka. Matricne igre definisane su matricama cena, čiji elementi pokazuju dobit igrača I u zavisnosti od svog strategijskog izbora i strategijskog izbora igrača II.

A)

II I	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	0,4	0,5	0,8
A ₂	0,7	0,2	0,1

B)

II I	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	4	7	1	-2
A ₂	0	-3	4	2

C)

II I	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	2	4	0	3	5
A ₂	6	3	8	4	2

D)

II I	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	5	3	6	4	5
A ₂	4	1	8	4	2

Odrediti rešenje matricnih igara.

Rešenje

A) $P = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$

$Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$C(P, Q) = 0,45$

C) $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$Q = (0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

$C(P, Q) = \frac{7}{2}$

B) $P = (\frac{5}{14}, \frac{9}{14})$

$Q = (0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7})$

$C(P, Q) = \frac{4}{7}$

D) $P = (1, 0)$

$Q = (0, 1, 0, 0, 0)$

$C(P, Q) = 3.$

i postoji bar jedno j za koje je elemenat a_{ij} veći od a_{kj} , tada je čista strategija a_k nepovoljna za igrača A i on je neće birati. Drugim rečima kažemo da je strategija a_i dominantna u odnosu na strategiju a_k , što nam pruža mogućnost da u matrici cene zanemarimo red a_k pri rešavanju matrice igre.

Na sličan način na skupu mogućih strategija igrača B možemo definisati uslove za postojanje duplih i dominantnih strategija.

U sledećim primerima ilustrovan je ovaj prilaz u rešavanju matricnih igara.

6.3.4. Rešavanje matricnih igara redukcijom matrice cene

Svođenjem konačne antagonističke igre na matricnu formu ne mora biti uvek jednoznačno, što može biti od interesa pri iznalaženju rešenja matrice igre. Drugim rečima, matrica cene polazne matrice igre može se često transformisati čime se olakšava postupak određivanja optimalnih strategija igrača i vrednosti matrice igre. Ove transformacije baziraju na pojmovima duple strategije i dominacije među strategijama.

Naime, polazeći od opšte definicije matrice igre, na skupu mogućnosti, tj. čistih strategija igrača mogu se definisati:

- duple strategije, i
- dominacija među strategijama.

Za dve čiste strategije igrača A,

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}), \quad i$$

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{kn}), \quad k$$

kome stoji na raspolaganju n strategijskih mogućnosti na suprot igraču B sa m strategijskih mogućnosti, kažemo da su duple ako je ispunjen uslov

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n.$$

U ovom slučaju jedna od čistih strategija može da se zanemari što za rešavanje matrice igre može biti od interesa.

Ako među čistim strategijama a_i i a_k postoji takav odnos da je

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n,$$

16. Zadatak

Definicija zadatka. Dve protivničke strane učestvujući u duelu mogu da biraju, nezavisno jedna od druge, jednu od četiri moguće alternative koje su naznačene u tabeli 1.

Tabela 1.

Igrač	Alternative			
	x_1	x_2	x_3	x_4
I	x_1	x_2	x_3	x_4
II	y_1	y_2	y_3	y_4

Funkcija cene igre za igrača I koja zavisi od strategijskog izbora, tj. od para alternativa (x_i, y_j) , definisana je sledećim podacima:

$$C(x_1, y_1) = 2; C(x_1, y_2) = 0; C(x_1, y_3) = 1; C(x_1, y_4) = 4;$$

$$C(x_2, y_1) = 1; C(x_2, y_2) = 2; C(x_2, y_3) = 5; C(x_2, y_4) = 3;$$

$$C(x_3, y_1) = 4; C(x_3, y_2) = 1; C(x_3, y_3) = 3; C(x_3, y_4) = 2;$$

$$C(x_4, y_1) = 1; C(x_4, y_2) = 2; C(x_4, y_3) = 5; C(x_4, y_4) = 3;$$

- a) Formirati matricu cene igre.
- b) Pronaći dominantne i duple strategije matrice igre.
- c) Izračunavati optimalne strategije igrača i naći vrednost matrice igre.

Rešenje: a) Matrica cene igre ima oblik

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ili ako to tablično predstavimo imaćemo da određenom redu odgovara određena alternativa igrača I, a određenoj koloni odgovara određena alternativa igrača II, kako je to prikazano u tabeli 2.

Tabela 2

	II				
I		y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		2	0	1	4
x_2		1	2	5	3
x_3		4	1	3	2
x_4		1	2	5	3

b) Dominantne i duple strategije. Za igrača I strategije x_2 i x_4 su duple. Prema tome, od te dve alternative on će uvek birati samo jednu. Otuda se matrica cene svodi na oblik koji je prikazan u tabeli 3.

Tabela 3

	II				
I		y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		2	0	1	4
x_2		1	2	5	3
x_3		4	1	3	2

Za igrača II alternativa y_2 je dominantna u odnosu na y_3 i y_4 .

Prema tome, igrač II će uvek birati alternativu y_2 . Otuda će matrica cene biti svedena na oblik dat u tabeli 4.

Tabela 4

	II		
I		y_1	y_2
x_1		2	0
x_2		1	2
x_3		4	1

Za igrača I alternativa x_3 je dominantna u odnosu na alternativu x_1 , jer mu ona uvek obezbeđuje veću dobit bez obzira šta će izabrati igrač II. Prema tome, matrica cene igre redukuje se na dimenzije 2×2 , tj. kao što je to prikazano u tabeli 5.

Tabela 5

	II		
I		y_1	y_2
x_2		1	2
x_3		4	1

c) Optimalne strategije igrača i vrednost igre. Kako ova matrična igra nema sedlo (sedlastu tačku) to će se njeno rešenje nalaziti u domenu mešovitih strategija.

Vektor mešovitih strategija za igrača I je

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

gde smo već utvrdili da je $p_1 = 0$ i $p_4 = 0$.

Vektor mešovitih strategija za igrača II je

$$Q = (q_1, q_2, q_3, q_4),$$

gde smo takođe utvrdili da su strategije $q_3 = 0$ i $q_4 = 0$.

Preostale komponente vektora mešovitih strategija P i Q odredićemo rešavajući matričnu igru

	II		
I		y_1	y_2
p_2	x_2	1	2
p_3	x_3	4	1

Po definiciji očekivana vrednost igre je

$$C(P, Q) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} p_i q_j.$$

Polazeći od vrednosti za a_{ij} redukovane matrice možemo pisati da je

$$C(P, Q) = 1 \cdot p_2 q_1 + 2 \cdot p_2 q_2 + 4 \cdot p_3 q_1 + 1 \cdot p_3 q_2,$$

ili ako razdvojimo mešovite strategije možemo pisati da je

$$C(P, Q) = p_2 (q_1 + 2q_2) + p_3 (4q_1 + q_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača I u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće p_2 i p_3 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $p_2 + p_3 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$q_1 + 2q_2 = C(P, Q), \text{ i } 4q_1 + q_2 = C(P, Q).$$

Sa druge strane, ako razdvajanje mešovitih strategija izvedemo na drugi način možemo pisati da je

$$C(P, Q) = q_1 (p_2 + 4p_3) + q_2 (2p_2 + p_3).$$

Ako je rešenje igre za igrača II u domenu mešovitih strategija, tj. ako su verovatnoće q_1 i q_2 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $q_1 + q_2 = 1$, tada su u važnosti sledeće jednakosti:

$$p_2 + 4p_3 = C(P, Q)$$

$$2p_2 + p_3 = C(P, Q).$$

Ako poslednjem sistemu jednačina dodamo jednačinu

$$p_2 + p_3 = 1,$$

možemo naći rešenje ovog sistema jednačina koje je u opštem slučaju dato sledećim izrazima:

$$p_2 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$$p_3 = 1 - p_2, \text{ i } C(P, Q) = a_{11} p_2 + a_{21} p_3.$$

Kako je $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 4$ i $a_{22} = 1$, zamenom ovih vrednosti u prethodnim jednačinama dobija se da je

$$p_2 = \frac{3}{4}, \text{ } p_3 = \frac{1}{4} \text{ i } C(P, Q) = \frac{7}{4}.$$

Mešovite strategije vektora Q definisane su izrazima

$$q_1 = \frac{C(P, Q) - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = 1 - q_1,$$

odakle proizilazi da je

$$q_1 = \frac{1}{4} \text{ i } q_2 = \frac{3}{4}.$$

Prema tome, rešenje problema je

$$P = (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0),$$

$$Q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0),$$

$$C(P, Q) = \frac{7}{4}.$$

17. Zadatak

Definicija zadatka. Konačna antagonistička igra u kojoj učestvuju dva igrača svodi se na matricnu igru sa matricom cene, koja je data u tabeli 1. Elementi matrice definišu dobit igrača I u odnosu na igrača II.

Tabela 1

Igrač II Igrač I	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	2	4	2
A ₂	4	0	5
A ₃	0	8	1

Odrediti optimalne strategije igrača i naći vrednost igre.

Rešenje. Prvo, utvrđuje se da li matična igra ima rešenje u domenu čistih strategija.

II I	B ₁	B ₂	B ₃	min reda
A ₁	2	4	2	2
A ₂	4	0	5	0
A ₃	0	8	1	0
max kolone	4	8	5	

Kako je

$$\alpha = \max(2; 0; 0) = 2$$

$$\beta = \min(4; 8; 5) = 4,$$

što znači da su gornja i donja vrednost igre zračite; igra nema sedlo i njeno rešenje se nalazi u domenu mešovitih strategija.

Kada se uporede strategije B₁ i B₃ drugog igrača, očigledno je da je strategija B₃ za njega uvek nepovoljnija u odnosu na B₁. Prema tome, kolonu B₃ u matrici cene možemo brisati čime se prethodna igra svodi na igru 3 x 2.

Vektor mešovite strategije za igrača II je

$$Q = (q_1, q_2, 0); q_1 + q_2 = 1; q_j \geq 0, (j = 1, 2, 3).$$

Vektor mešovite strategije za igrača I je

$$P = (p_1, p_2, p_3); p_1 + p_2 + p_3 = 1; p_i \geq 0. (i = 1, 2, 3)$$

Očekivano plaćanje za igrača II, ako igrač I odabere čistu strategiju A₁, je

$$C(A_1, Q) = 2q_1 + 4q_2,$$

a za ostale čiste strategije igrača I možemo pisati

$$C(A_2, Q) = 4q_1 + 0q_2,$$

$$C(A_3, Q) = 0q_1 + 8q_2.$$

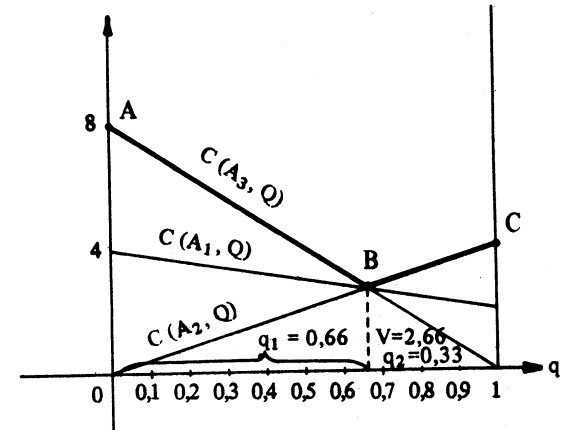
Kako je $q_1 + q_2 = 1$, to se dalje može pisati da je

$$C(A_1, Q) = 4 - 2q_1$$

$$C(A_2, Q) = 4q_1$$

$$C(A_3, Q) = 8 - 8q_1.$$

Poslednji sistem jednačina prikazan je grafički na slici 1, gde su sračunate vrednosti za komponente vektora Q, kao i vrednost igde V.



Slika 1.

Iz slike se vidi da je za igrača I aktivan par strategija bilo koji par: A₁ A₂, A₁A₃, A₂A₃.

Imajući u vidu prethodno dobijene rezultate prvobitnu matičnu igru možemo svesti na matricu 2 x 2. Ako prvi igrač uzme za aktivne strategije A₁ i A₂ matrica cene će biti:

	B ₁	B ₂
A ₁	2	4
A ₂	4	0

Prema tome, komponente vektora mešovite strategije P pronalazimo rešavajući ovu matricu, tj. rešavajući sledeći sistem jednačina

$$2p_1 + 4p_2 = V$$

$$4p_1 + 0p_2 = V$$

$$p_1 + p_2 = 1,$$

odakle sledi da je $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ i $V = \frac{8}{3}$.

Vektor mešovite strategije za početnu matricnu igru je, za igrača I

$$P = (2/3, 1/3, 0),$$

a za igrača II

$$Q = (2/3, 1/3, 0).$$

Vrednost igre je

$$C(P, Q) = V = \frac{8}{3}$$

18. Zadatak

Definicija zadatka. Proveriti da li će rešenje matricne igre u prethodnom zadatku biti isto ako igrač I izabere za aktivne strategije:

- strategijski par A_1, A_3 , ili
- strategijski par A_2, A_3 .

Rešenje. a) Za strategijski par A_1, A_3 matricna igra se svodi na matricu cene

	II			
		B_1	B_2	B_3
I				
	A_1	2	4	2
	A_3	0	8	1

čija je rešenje u domenu čistih strategija, i to parovi (A_1, B_1) i (A_1, B_3) .

b) Za strategijski par A_1, A_3 matricna igra se svodi na matricu cene

	II			
		B_1	B_2	B_3
I				
	A_2	4	0	5
	A_3	0	8	1

Rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija.

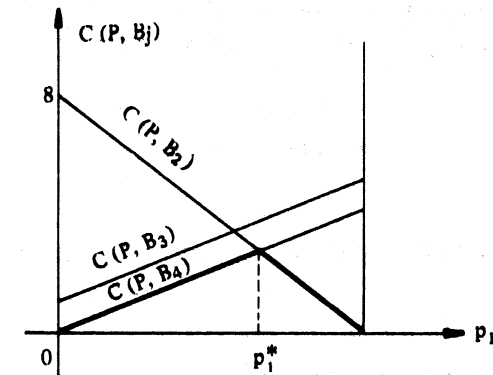
Očekivane dobiti igrača I mogu se prikazati sledećim sistemom jednačina

$$C(P, B_1) = 4p_1$$

$$C(P, B_2) = 8 - 8p_1$$

$$C(P, B_3) = 4p_1 + 1.$$

Ako promene ovih očekivanih dobiti u zavisnosti od promene veličine p_1 prikažemo grafički dobija se sledeći dijagram (slika 1).



Slika 1.

Prema tome,

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ a } v = 8/3.$$

Ovome odgovara vektor mešovite strategije za igrača II,

$$Q = (2/3, 1/3, 0).$$

Prema tome, strategijski par (A_2, A_3) je jednako pogodan za igrača I kao i strategijski par (A_1, A_2) , dok je strategijski par (A_1, A_3) nepovoljan.

19. Zadatak

Definicija zadatka. Koristeći se osobinama duplih strategija i dominacijom među strategijama, naći rešenja matrice igara definisanih matricama cena:

A)

I \ II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	1	2	-1	-3	-2
A ₂	0	7	2	-5	-1
A ₃	2	3	0	-2	-1
A ₄	4	4	1	3	-3
A ₅	-1	1	5	4	3

B)

I \ II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	10	10	2	2
A ₂	2	2	9	9
A ₃	5	10	5	10
A ₄	4	2	4	2

C)

I \ II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	0,3	0,4	0,5	1	0
A ₂	0,2	0,3	0,6	0	1
A ₃	0,1	0,5	0,3	0,1	0

D)

I \ II	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	2	3	5	4
A ₂	1	3	4	3
A ₃	2	3	5	4
A ₄	5	4	2	1

Rešenje:

A) $P = (0, 0, \frac{7}{8}, 0, \frac{1}{8})$

$Q = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$C(P, Q) = -\frac{5}{4}$

B) $P = (\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, 0, 0)$

$Q = (\frac{11}{15}, 0, \frac{4}{15}, 0)$

$C(P, Q) = \frac{86}{15}$

C) $P = (\frac{8}{11}, \frac{3}{11}, 0)$

$Q = (\frac{10}{11}, 0, 0, 0, \frac{1}{11})$

$C(P, Q) = \frac{3}{11}$

D) $P = (\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$

$Q = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$

$C(P, Q) = 3.$

gde se indeks i odnosi na strategijske mogućnosti igrača I, a indeks j na strategijske mogućnosti igrača II.

Ako pretpostavimo da su primenljive svaka od n strategijskih mogućnosti igrača I, odredimo verovatnoće njihovog korišćenja u sklopu optimalne mešovite strategije (ako je neka od strategijskih mogućnosti nekorisna to će odgovarajuća verovatnoća biti jednaka nuli). Označimo ove verovatnoće sa p_1, p_2, \dots, p_m , a vrednost igre sa V . Pošto za optimalnu strategiju očekivana dobit igrača I ne može biti manja od vrednosti igre V za bilo koji strategijski izbor protivnika, ovo matematički možemo izraziti sa n nejednačina

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m \geq V$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m \geq V$$

.....

$$a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{mn} p_m \geq V.$$

Sada uvodimo nove promenljive,

$$x_1 = \frac{p_1}{V}; \quad x_2 = \frac{p_2}{V}; \quad \dots \quad x_m = \frac{p_m}{V}$$

Da bi izbegli mogućnost deljenja sa nulom, možemo se uvek obezbediti da bude $V > 0$. Dovoljno je matricu A transformisati tako da svi elementi novodobijene matrice budu veći od nule. Može se pokazati da će ova transformacija povećati vrednost igre za veličinu d koja se dodaje elementima matrice A da bi postali veći od nule.

Kako je $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, to će zbir novouvedenih promenljivih biti

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V}.$$

Ako se leva i desna strana nejednačine podeli sa V dobija se novi sistem nejednačina

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m \geq 1$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m \geq 1$$

.....

$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{mn} x_m \geq 1.$$

(1)

6.4. REŠAVANJE MATRIČNIH IGARA $n \times m$ PRIMENOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Svaku konačnu antagonističku igru dva lica nultom sumom možemo rešiti primenom linearnog programiranja. Kanonični oblik ove igre je matrica plaćanja igrača II u odnosu na igrača I,

$$A = \|a_{ij}\|, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

Za uvedene uslove sve promenljive x_i su veće od nule.

Kako je cilj optimalne strategije igrača I maksimizacija dobiti, to će za ostvarivanje ovog cilja biti potrebno da se linearna funkcija

$$f(X) = x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V} \quad (2)$$

minimizira. Prema tome, optimalna strategija prvog igrača, tj. skup verovatnoća $p_i = Vx_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), određuje se iznalazenjem minimuma funkcija $f(X)$ za x_i veća od nule a da pri tome bude zadovoljen sistem ograničenja (1).

Vektor optimalne mešovite strategije igrača II, tj. skup verovatnoća q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), može se odrediti na sličan način. Pošto za optimalnu strategiju očekivani gubitak drugog igrača ne može biti veći od V pri bilo kojoj strategiji protivnika, to se može pisati sledeći sistem nejednačina,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Na sličan način, kao u prethodnom slučaju, i ovde se uvode nove promenljive

$$y_j = \frac{q_j}{V}, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

čiji je zbir

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{V} \text{ jer je } q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

Uslov nenegativnosti promenljivih y_j , kao i promenljivih x_i u prethodnom modelu, može se ostvariti transformacijom početne matrice cene igre. Naime, dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja d tako da je $A' = A + d$, postiže se da će vrednost $V' = V + d$ biti uvek veća od nule, a samim tim postiže se i uslov nenegativnosti promenljivih x_i i y_j .

Kako optimalna strategija igrača II ima za cilj minimizaciju gubitaka, to će ovaj cilj biti postignut maksimizacijom funkcije

$$\Phi(Y) = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{V}. \quad (4)$$

Optimalna strategija igrača II, tj. skup verovatnoća $q_j = Vy_j$, može se odrediti iznalazenjem maksimuma funkcije $\Phi(Y)$ za y_j veće od nule, a da pri tome budu zadovoljene ograničenjima koja su definisana sistemom nejednačina (3).

Iz prethodnog razmatranja proizilazi da je

$$(\min) f(X) = (\max) \Phi(Y) = \frac{1}{V}.$$

Prema tome, na preblem iznalazenja rešenja matricne igre primenom linearnog programiranja treba gledati kao na rešavanje jedinstvenog zadatka LP, gde se na osnovu rešenja primarnog zadatka određuje optimalna strategija jednog igrača, a na osnovu rešenja dualnog zadatka određuje optimalna strategija drugog učesnika u igri. Pri iznalazenju optimalnih strategija igrača treba koristiti činjenicu da rešenje primarnog zadatka sadrži i rešenje dualnog zadatka linearnog programiranja.

Bilinearni pristup⁽¹⁶⁾ . – Polazeći od osnovnog matematičkog modela, koji je definisan izrazima (1) i (2), može se izvesti bilinearni model (15) koji direktno daje rešenja oba linearna modela. Bilinearni model ima funkciju cilja oblika

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (5)$$

a ograničenja su

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0.$$

Bilinearna metoda rešavanja zadataka iz oblasti matricnih igara bazirana na matematičkom modelu definisanom izrazima (5) i (6). Lako se može pokazati da je $F(X, Y) = 1/V$, gde je V – vrednost igre, pri čemu se polazi od opšte definicije vrednosti igre, gde je

$$V = C(P, Q) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i q_j.$$

Bilinearni algoritam ilustrovan je na konkretnim numeričkim primerima.

20. Zadatak

Definicija zadatka. Naći rešenje matricne igre, koja je definisana matricom cene

Igrač II		
Igrač I	B ₁	B ₂
A ₁	0,2	0,8
A ₂	0,7	0,3

gde su B_1 i B_2 strategijske mogućnosti igrača II, a A_1 i A_2 strategijske mogućnosti igrača I. Problem rešiti primenom linearnog programiranja.

Rešenje. Matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$$P = (p_1, p_2),$$

gde je $pp_1 + p_2 = 1$ i $p_1 \geq 0$ i $p_2 \geq 0$, ima sledeći oblik

$$(\min) f(X) = x_1 + x_2 = \frac{1}{V}$$

$$0,2x_1 + 0,7x_2 \geq 1$$

$$0,8x_1 + 0,3x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$$Q = (q_1, q_2),$$

gde je $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 \geq 0$ i $q_2 \geq 0$, ima sledeći oblik

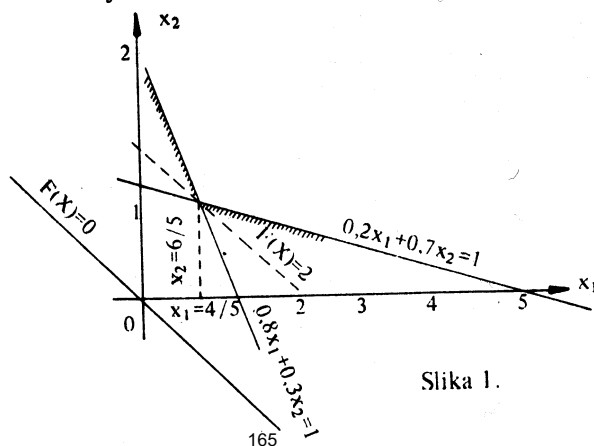
$$(\max) \phi(Y) = y_1 + y_2 = \frac{1}{V}$$

$$0,2y_1 + 0,8y_2 \leq 1$$

$$0,7y_1 + 0,3y_2 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0 \text{ i } y_2 \geq 0.$$

Problem će biti rešen grafičkom metodom. Na slici 1 prikazano je rešenje problema za igrača I, gde su dobijene vrednosti za promenljive x_1 i x_2 .



Slika 1.

Dobijeno rešenje osnovnog problema je $x_1 = 4/5$, $x_2 = 6/5$, a vrednost funkcije cilja je

$$f(X) = x_1 + x_2 = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Prema tome, vrednost igre je $V = 0,5$, a komponente vektora optimalne mešovite strategije P su

$$p_1 = Vx_1 = 0,5 \cdot \frac{4}{5} = 0,4$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Vektor mešovite strategije Q određuje se na osnovu matematičkog modela dualnog zadatka linearnog programiranja. Međutim, ako koristimo već izračunatu vrednost matrice igre vrednosti za y_1 i y_2 mogu se dobiti rešenjem sledećeg sistema jednačina

$$y_1 + y_2 = 2$$

$$0,2y_1 + 0,8y_2 = 1.$$

odakle proizilazi da je $y_1 = 1$ i $y_2 = 1$. Prema tome, za komponente vektora Q možemo pisati da su

$$q_1 = Vy_1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

$$q_2 = Vy_2 = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

tj. možemo pisati da je rešenje date matrice igre

$$Q = (0,5; 0,5) \quad P = (0,4; 0,6) \quad V = 0,5.$$

Zadatak za vežbu. Naći rešenje prethodne matrice igre nekom drugom metodom i uporediti dobijena rešenja.

21. Zadatak

Definicija zadatka. Dva dečaka se igraju tako što nezavisno jedan od drugog pokazuju jedan, dva ili tri prsta. Dobit ili gubitak u igri određuje ukupan broj ispruženih prstiju. Ako je ispruženi broj prstiju paran, onda taj broj označava dobit prvog dečaka (u dinarima), a ako je broj ispruženih prstiju neparan, onda taj broj označava dobit u dinarima drugog dečaka.

- Formirati matricu plaćanja (cene).
- Naći rešenje matrice igre.
- Utvrđiti da li je igra ravnopravna za oba igrača.

Rešenje. Iz same definicije igre proizilazi da će matrica plaćanja imati sledeći oblik:

STR D ₂	I ₁	II ₂	II ₃	Minimum reda
STR D ₁				
I ₁	2	-3	4	-3*
I ₂	-3	4	5	5
I ₃	4	-5	6	5
maksimum kolone	4*	4*	6	

Donja vrednost igre je $\alpha = -3$, a gornja vrednost igre je $\beta = 4$. Kako matricna igra nema sedlo, jer su donja i gornja vrednost igre različite, to ne postoje stabilne minimaksne strategije. Rešenje igre treba tražiti u domenu mešoviti strategija.

Obzirom da oba učesnika u igri imaju isti broj strategijskih mogućnosti – tri, rešenje matricne igre naći ćemo rešavajući sistem jednačina – sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate.

Polazeći od očekivane dobiti prvog igrača u zavisnosti od strategijskog izbora drugog igrača možemo formirati sledeći sistem jednačina

- 1) $2p_1 - 3p_2 + 4p_3 = V$
- 2) $-3p_1 + 4p_2 - 5p_3 = V$
- 3) $4p_1 - 5p_2 + 6p_3 = V$
- 4) $p_1 + p_2 + p_3 = 1.$

U ovom sistemu jednačina p_1 , p_2 , i p_3 predstavljaju relativne učestanosti sa kojima će prvi učesnik u igri upotrebljavati svoje čiste strategije (I₁, I₂ i I₃) respektivno, a V predstavlja vrednost igre.

Gornji sistem jednačina rešavamo tako što iz četvrte jednačine izračunavamo p_3 i dobijeni izraz za p_3 smenjujemo u prethodne tri jednačine. Posle sređivanja dobija se novi sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2p_1 + 7p_2 + V &= 4 \\ 2p_1 + 9p_2 - V &= 5 \\ 2p_1 + 11p_2 + V &= 6. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema doređićemo pomoću determinanti. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 16.$$

Determinante pojedinih promenljivih imaju sledeće vrednosti

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 8;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \\ 2 & 11 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti determinanti određujemo vrednosti promenljivih:

$$p_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad p_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2};$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad V = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{16} = 0.$$

Ako relativne učestanosti primene strategija (II₁, II₂ i II₃) drugog učesnika obeležimo sa q_1 , q_2 i q_3 , možemo postaviti sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2q_1 - 3q_2 + 4q_3 &= V \\ -3q_1 + 4q_2 - 5q_3 &= V \\ 4q_1 - 5q_2 + 6q_3 &= V \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1. \end{aligned}$$

Kako je već određena vrednost igre $V = 0$, to nisu potrebne sve četiri jednačine već samo tri. Prema tome imamo da je

$$\begin{aligned} 2q_1 - 3q_2 + 4q_3 &= 0 \\ -3q_1 + 4q_2 - 5q_3 &= 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rešenjem ovog sistema jednačina dobijamo da je

$$q_1 = \frac{1}{4}; q_2 = \frac{1}{2}; q_3 = \frac{1}{4}$$

Prema tome, optimalne mešovite strategije učesnika u igri su:

$$S_{D_1}^* = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad S_{D_2}^* = \begin{pmatrix} II_1 & II_2 & II_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

pri čemu je vrednost igre $V = 0$.

Zaključak je da oba dečaka u 50% slučajeva treba da pruže dva prsta, a u 25% slučajeva 1 i 3 prsta. Igra je ravnopravna i očekivana dobit u igri je jednaka nuli.

Rešavanje problema primenom linearnog programiranja. U ovom slučaju polazi se od matrice cene koju treba transformisati tako da svi elementi matrice budu veći od nule. Za koeficijent transformacije uzimamo $d = 5$, koji dodajemo svakom elementu matrice plaćanja, posle čega se dobija nova matrica plaćanja. Pri uvođenju nove matrice treba voditi računa da će vrednost igre biti

$$V' = V + d = V + 5.$$

STR D ₂	II ₁	II ₂	II ₃
STR S ₁			
I ₁	7	2	9
I ₂	2	9	0
I ₃	9	0	11

Igrač D₂ nastoji da odabere svoju strategiju tako da, bez obzira na to koju je strategiju izabrao protivnik, njegovo očekivano plaćanje bude manje ili najviše jednako vrednosti igre, što matematički možemo pisati

$$7q_1 + 2q_2 + 9q_3 \leq V$$

$$2q_1 + 9q_2 + 0q_3 \leq V$$

$$9q_1 + 0q_2 + 11q_3 \leq V$$

Uvođenjem novih promenljivih $y_1 = q_1/V, y_2 = q_2/V$ i $y_3 = q_3/V$ i imajući u vidu da je $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, izbor optimalne strategije za igrača D₂ svodi se na rešavanje sledećeg zadatka linearnog programiranja. Maksimizirati linearnu funkciju

$$(\max) \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V}$$

uz ograničenja

$$7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 1$$

$$2y_1 + 9y_2 + 0y_3 \leq 1$$

$$9y_1 + 0y_2 + 11y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Ovaj zadatak linearnog programiranja rešićemo pomoću simpleks tabele. Prethodno, uvođenjem izravnavajućih promenljivih gornji matematički model svodimo na kanonični oblik.

$$(\max) \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6$$

$$7y_1 + 2y_2 + 9y_3 + y_4 = 1$$

$$2y_1 + 9y_2 + 0y_3 + y_5 = 1$$

$$9y_1 + 0y_2 + 11y_3 + y_6 = 1$$

Dalji postupak rešavanja problema prikazan je u sledeće četiri simpleks tabele ST-0, ST-1, ST-2 i ST-3.

ST-0

C ₀	B	X ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	y ₄	1	7	2	9	1	0	0
0	y ₅	1	2	9	0	0	1	0
0	y ₆	1	9	0	11	0	0	1
ϕ - c _j		0	-1	-1	-1	0	0	0

ST 1

C ₀	B	X ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	y ₄	2/9	0	2	4/9	1	0	-7/9
0	y ₅	7/9	0	9	-22/9	0	1	-2/9
1	y ₁	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
φ _j - c _j		1/9	0	-1	2/9	0	0	1/9

ST 2

C ₀	B	X ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	y ₄	4/81	0	0	80/81	1	-2/9	59/81
1	y ₂	7/81	0	1	-22/81	0	1/9	2/81
1	y ₁	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
φ _j - c _j		16/81	0	0	-4/81	0	1/9	7/91

ST 3

C ₀	B	X ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
1	y ₃	1/20	0	0	1	81/80	-9/40	59/80
1	y ₂	1/10	0	1	0	11/40	1/20	9/40
1	y ₁	1/20	1	0	0	99/80	11/40	81/80
φ _j - c _j		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20

Na osnovu dobijenih rezultata u poslednjoj simpleks tabeli možemo pisati da je

$$\phi(Y) = \frac{1}{5} = \frac{1}{V}$$

odakle proizilazi da je $V = 5$, a vrednost igre za prvobitno definisanu matričnu igru je

$$V = V' - d = 5 - 5 = 0.$$

Komponente vektora optimalne mešovite strategije za igrača D₂ su:

$$q_1 = y_1 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}; \quad q_2 = y_2 \cdot V = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2};$$

$$q_3 = y_3 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4},$$

Prema tome, možemo pisati da je

$$Q = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

U poslednjem redu poslednje simpleks table, u kolonama y₄, y₅ i y₆, nalaze se rešenja za realne promenljive primarnog zadatka linearnog programiranja na osnovu kojih se određuju komponente vektora optimalne mešovite strategije za igrača D₁. Naime, imamo da su

$$x_1 = 1/20, \quad x_2 = 1/10, \quad x_3 = 1/20.$$

Otuda je

$$p_1 = x_1 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}; \quad p_2 = x_2 \cdot V = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2};$$

$$p_3 = x_3 \cdot V = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}.$$

Prema tome, možemo pisati da je

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

Zadatak za vežbu. Ako se pođe od toga da igrač D₁ nastoji da odabere svoju strategiju tako da, bez obzira na izbor protivnika, njegova očekivana dobit bude maksimalna ili bar jednaka vrednosti matrične igre, formulisati zadatak linearnog programiranja. Rešavajući ovako formulisani zadatak linearnog programiranja naći rešenje ove matrične igre.

22. Zadatak

Definicija zadatka. Primenom linearnog programiranja rešiti matricnu igru definisanu matricom cene (plaćanja)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Da bi našli rešenje matricne igre, definisane matricom A, primenom linearnog programiranja potrebno je matricu A transformisati u novu matricu A', tako da je

$$A' = A + d,$$

gde je d dovoljno veliki pozitivan broj takav da posle transformacije svi elementi novodobijene matrice A', budu veći od nule.

Ako usvojimo da je $d = 3$, imaćemo

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ovu matricnu igru posmatraćemo kao igru igrača I i igrača II od kojih svaki ima po tri čista strategijska izbora, kako je to pokazano u tabeli 1. Pri ovome se podrazumeva obično, ako se drugačije ne naglasi, da element matricy A pokazuje iznos dobiti za igrača I za odgovarajući par čistih strategija.

Tabela 1

	II	B ₁	B ₂	B ₃
I				
A ₁		4	6	3
A ₂		8	0	4
A ₃		6	2	5

Rešiti matricnu igru znači naći vektor optimalne mešovite strategije za igrača I i za igrača II i vrednost mešovite igre, tj. odrediti

$$P = (p_1, p_2, p_3); p_1 + p_2 + p_3 = 1;$$

$$Q = (q_1, q_2, q_3); q_1 + q_2 + q_3 = 1; i$$

$$C(P, Q) = V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} p_i q_j.$$

a) Određivanje vektora mešovite strategije P

Komponente vektora mešovite strategije P možemo odrediti rešavajući sledeći problem linearnog programiranja. Traži se

$$(\min) f(X) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{V},$$

pri ograničenjima

$$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$6x_1 + 0x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Primenom simpleks metoda može se naći rešenje problema, tj. mogu se odrediti promenljive x_1, x_2 i x_3 . Na osnovu ovih rezultata izračunavamo vrednost igre

$$V = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

kao i komponente vektora mešovite strategije P,

$$p_1 = V \cdot x_1; p_2 = V \cdot x_2 \text{ i } p_3 = V \cdot x_3.$$

b) Određivanje vektora mešovite strategije Q

Komponente vektora mešovite strategije Q možemo odrediti rešavajući sledeći problem linearnog programiranja. Traži se

$$(\max) \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{V}$$

pri ograničenjima

$$4y_1 + 6y_2 + 3y_3 \leq 1$$

$$8y_1 + 0y_2 + 4y_3 \leq 1$$

$$6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \text{ i } y_3 \geq 0.$$

Primenom simpleks metoda može se naći rešenje problema, tj. mogu se odrediti promenljive y_1 , y_2 i y_3 . Na osnovu ovih rezultata izračunavamo komponente vektora mešovite strategije Q,

$$q_1 = V \cdot y_1; q_2 = V \cdot y_2 \text{ i } q_3 = V \cdot y_3.$$

Upoređivanje matematičkog modela pod a) i b) može se uočiti da se radi o primarnom i dualnom modelu zadatka linearnog programiranja. Prema tome, da bi se dobilo rešenje matrice igre potrebno je rešiti dualni problem, čije rešenje istovremeno sadrži i rešenje primarnog problema.

U cilju rešenja problema, tj. rešenja matrice igre, matematički model pod b) svodimo na kanonični oblik, pri čemu dobijamo matematički model pogodan za rešavanje pomoću simpleks tabele.

$$(\max) \phi(Y) = y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6$$

$$4y_1 + 6y_2 + 3y_3 + y_4 = 1$$

$$8y_1 + 0y_2 + 4y_3 + y_5 = 1$$

$$6y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 1$$

Postupak rešavanja problema dat je u sledećim simpleks tabelama ST - 0, ST - 1 i ST - 2.

C ₀	B	Y ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	y ₄	1	4	6	3	1	0	0
0	y ₅	1	8	0	4	0	1	0
0	y ₆	1	6	2	5	0	0	1
Φ _j -c _j		0	-1	1	1	0	0	0

ST 1

C ₀	B	Y ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
0	y ₄	2/5	2/5	24/5	0	1	0	-3/5
0	y ₅	1/5	16/5	-8/5	0	0	1	4/5
1	y ₃	1/5	6/5	2/5	1	0	0	1/5
Φ _j -c _j		1/5	1/5	-3/5	0	0	0	1/5

ST - 2

C ₀	B	Y ₀	1	1	1	0	0	0
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
1	y ₂	1/12	1/12	1	0	5/24	0	-3/24
0	y ₅	1/3	10/3	0	0	1/3	1	-1
1	y ₃	1/6	7/6	0	1	-1/12	0	1/4
Φ _j -c _j		1/4	1/4	0	0	1/8	0	1/8

x₄ x₅ x₆ x₁ x₂ x₃

Simpleks tabela ST - 2 sadrži rešenje matrice igre u celini. Naime, imamo da je

$$(\min) f(X) = (\max) \phi(Y) = \frac{1}{4} = \frac{1}{V},$$

$$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{12}, y_3 = \frac{1}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{8},$$

Na osnovu ovih rezultata sračunavamo

1) Vrednost matrice igre

$$V = V' - d = 4 - 3 = 1;$$

2) Komponente vektora mešovite strategije Q, gde je

$$q_1 = V' \cdot y_1 = 4 \cdot 0 = 0, \quad q_2 = V' \cdot y_2 = 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$q_3 = V' \cdot y_3 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

Prema tome, imamo da je vektor mešovite strategije za igrača II

$$Q = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots); i$$

3) Komponente vektora mešovite strategije P, gde je

$$p_1 = V' \cdot x_1 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad p_2 = V' \cdot x_2 = 4 \cdot 0 = 0,$$

$$p_3 = V' \cdot x_3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, imamo da je vektor mešovite strategije za igrača I

$$P = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

Zadatak za vežbu. Prethodni zadatak rešiti svođenjem matrice A na dimenzije 3 x 2, a zatim grafičkom metodom odrediti vrednost matrične igre i vektore mešovite strategije za igrača I i igrača II.

23. Zadatak

Primenom bilinearne metode naći optimalne strategije i vrednost matrične igre definisane matricom cene

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Pokazati da će u slučaju promene elemenata matrice A, gde se promena odnosi na elemente a_{22} i a_{24} , tako da je $a_{22} = a_{24} \geq 4$, rešenje matrice biti u domenu čistih strategija.

Rešenje. Na osnovu sistema ograničenja u bilarnom modelu formira se početna tabela T - 0.

Tabela T - 0

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_{m+i}	
x_1	3	6	1	4	1	0
x_2	5	2	4	2	1	1
x_3	1	4	3	5	1	0
$-x_{n+1}$	1	1	1	1	F=0	0
	0	0	-1	0	0	

Računski postupak određivanja optimalnih strategija sadrži sledeće korake:

1. Korak. - Vršiti se izbor elemenata transformacije početnog rešenja koje je sadržano u tabeli T - 0. Kriterijum za izbor ovog elementa (pivot element) je maksimalni priraštaj funkcije F (X, Y) po promenljivim Y, pri čemu odgovarajuća ograničenja moraju biti zadovoljena. Ovaj priraštaj sračunava se na osnovu izraza

$$\Delta F(X, Y) = \max_j \min_i \frac{c_j b_i}{a_{ij}}, \quad (1)$$

gde je $c_j = b_i = 1$ kako se to vidi iz table T - 0. Na osnovu ovoga utvrđuje se da je element transformacije rešenja a_{23} .

2. Korak. - Početnoj tabeli T - 0 dopisuju se jedinični vektori, kao što je to napred učinjeno. Na osnovu ovoga vrši se izračunavanje vrednosti elemenata table T-1, koja sadrži novo rešenje, tako da je

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{uj} a_{iv}}{a_{uv}}, \quad (2)$$

gde je $a_{uv} = a_{23}$. Izraz (2) primenjuje se na sve elemente table T - 0. Njegovom primenom na elemente drugog reda i treće kolone ovi elementi postaju jednaki nuli pa se ovaj red i ova kolona izbacuju iz table. Dopisana kolona sadržavaće rešenje za promenljivu x_2 , a dopisani red sadržavaće rešenje za promenljivu y_3 .

Tabela T - 1

	y_1	y_2	y_4	y_{m+i}	x_2	
x_1	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$-x_{n+j}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
y_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
	0	-1	0	0		

3. Korak. – U ovom koraku utvrđuje se da li je dobijeno rešenje optimalno. Rešenje će biti optimalno ukoliko su svi elementi u redu $-x_{n+j}$ manji od nule. Kako to u tabeli T – 1 nije slučaj, dalji postupak određivanja optimalnog rešenja nastavlja se povratkom na korak 1. Naime, određuje se novi elemenat transformacije mogućeg rešenja dobijenog u tabeli T – 1.

Novo moguće rešenje dato je u tabeli T – 2.

Tabela T – 2

	y_1	y_4	y_{m+1}	x_2	x_3	
x_1	$\frac{39}{5}$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	1
$-x_{n+j}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0
y_3	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$			
y_2	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{10}$			
	-1	0	0			

Dobijeno rešenje u tabeli T – 2 nije optimalno jer je u redu $-x_{n+j}$ i koloni y_1 elementat veći od nule. Novo moguće rešenje dato je u tabeli T – 3.

Tabela T – 3

	y_4	y_{m+1}	x_2	x_3	x_1
$-x_{n+j}$	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{26}$	$-\frac{1}{26}$
y_3	$\frac{7}{13}$	$\frac{2}{13}$			
y_2	$\frac{37}{39}$	$\frac{5}{39}$			
y_1	$-\frac{16}{39}$	$\frac{1}{39}$			

Dobijeno rešenje u tabeli T – 3 je optimalno pošto su sve vrednosti u redu $-x_{n+j}$ manje od nule.

Kako je $F(X, Y) = 4/13 = 1/V$, proizilazi da je vrednost igre $V = 13/4$. U redu $-x_{n+j}$ nalaze se vrednosti za promenljive x_i , gde je

$$x_1 = \frac{1}{20}, x_2 = \frac{2}{13} \text{ i } x_3 = \frac{3}{26}.$$

Na osnovu ovih vrednosti proizilazi da je

$$p_1 = Vx_1 = \frac{13}{4} \frac{1}{26} = \frac{1}{8}, \quad p_2 = Vx_2 = \frac{13}{4} \frac{2}{13} = \frac{1}{2},$$

$$\text{ i } p_3 = Vx_3 = \frac{13}{4} \frac{3}{26} = \frac{3}{8}.$$

Prema tome, vektor mešovite strategije za igrača I je

$$P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8} \right).$$

U koloni y_{m+i} nalaze se vrednosti promenljivih y_j , gde je

$$y_1 = \frac{1}{39}, \quad y_2 = \frac{5}{39}, \quad y_3 = \frac{2}{13} \text{ i } y_4 = 0.$$

Na osnovu ovih vrednosti proizilazi da je

$$q_1 = Vy_1 = \frac{13}{4} \frac{1}{39} = \frac{1}{12}, \quad q_2 = Vy_2 = \frac{13}{4} \frac{5}{39} = \frac{5}{12},$$

$$\text{ i } q_3 = \frac{13}{4} \frac{2}{13} = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je

$$Q = \left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2} \right).$$

7. MREŽNO PLANIRANJE

7.1. UVOD

Tehnika primene mrežnog planiranja se sastoji iz zasebnih faza rada: analize strukture, analize vremena, analize troškova i raspodele resursa. Analiza strukture se uvek izvodi, a ostale faze prema potrebi. Naime, analiza vremena se ne može izvršiti dok se ne izvrši analiza strukture, dok je analiza troškova i resursa povezana sa analizom vremena. U ovoj zbirci zadaci nisu mogli biti izdvojeni u posebne skupove po fazama rada. U jednom istom zadatku će biti tretirana i analiza strukture, analiza vremena i analiza troškova ili resursa.

Analiza strukture, tj. određivanje tehnološke i logičke međuzavisnosti aktivnosti u mrežnom planiranju predstavlja početnu i osnovnu fazu rada. U realizaciji ove faze mrežnog planiranja moraju učestvovati odgovorni rukovodioci tehnolozi datog projekta. Ovo nije rutinski rad i mada na prvi pogled izgleda jednostavan, treba mu posvetiti dužnu pažnju, jer greške napravljene u ovoj fazi rada utiču na rezultate rada u svim ostalim fazama primene mrežnog planiranja. Bez obzira na ove činjenice, u ovoj zbirci problemima iz čiste analize strukture neće biti posvećen značajniji prostor. Problematika analize strukture je takve prirode da ju je nepodesno izlagati u zbirci zadataka. Drugi razlog je što je sve što je potrebno za detaljno upoznavanje sa analizom strukture izloženo u knjizi: Operaciona istraživanja II – na stranicama od 99 do 131 profesora Petrića.

7.2. ANALIZA STRUKTURE

Radi ukazivanja na osnovne postavke pri konstruisanju mrežnog dijagrama daćemo nekoliko manjih primera u kojima će biti tretirana samo ova problematika.

1. Zadatak

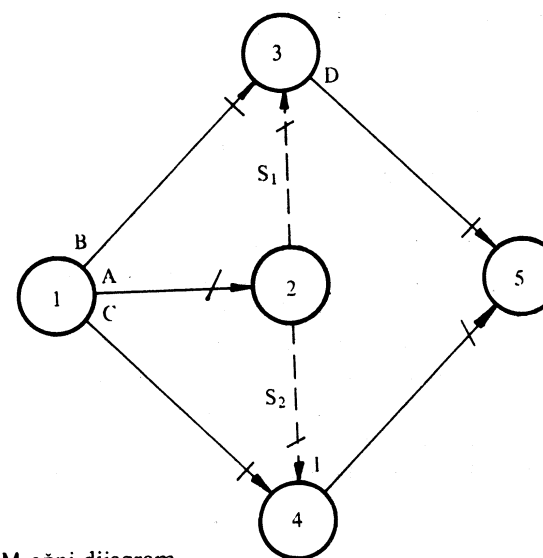
Za aktivnosti date u tabeli 1. nacrtati mrežni dijagram. Simbol (zvezdica) na preseku vrste i kolone u šemi odnosa znači da aktivnost iz vrste prethodi

aktivnosti iz kolone, odnosno da aktivnost navedena u koloni zavisi od aktivnosti navedene u vrsti.

Tabela 1.

Razmatrane aktivnosti	A	B	C	D	E
Prethodne aktivnosti					
A				*	*
B				*	
C					*
D					

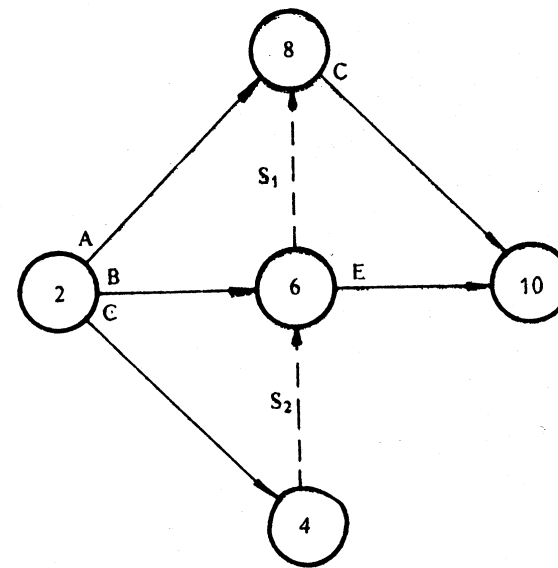
Šema odnosa aktivnosti



Slika 1. Mrežni dijagram

Rešenje. U ovom primeru je bilo neophodno uvesti dve prividne aktivnosti (S_1 i S_2) da bi se pravilno predstavila međuzavisnost realnih aktivnosti. Takođe se, pri crtanju mrežnog dijagrama težilo da bude što manje presecanja aktivnosti (ovde ne postoji nijedan presek). Svi natpisi treba da se vrše na istom mestu u odnosu na svaku aktivnost. Tako su ovde svi simboli aktivnosti pisani na početku orijentisane duži (reprezentativne aktivnosti) sa leve njene strane gledajući od početka ka završetku aktivnosti (u smeru orijentacije duži). Primenjeno je rastuće uzastopno numerisanje događaja po pravilu Fulkersona. Iz skupa celih pozitivnih brojeva $[1, n]$ u prvom koraku najmanji se dodeljuje početnom događaju projekta. U drugom koraku se

obeležavaju sve aktivnosti koje izlaze iz numerisanog događaja (prekrižene crticom kod strelice). U trećem koraku se razmatraju svi događaji u koji ulaze obeležene (prekrižene) aktivnosti (završni događaji aktivnosti A, B i C). Stekli su pravo na numeraciju događaji u koje ulaze samo obeležene aktivnosti. (Samo završni događaji aktivnosti A, dok završni događaji aktivnosti B i C nisu stekli pravo na numeraciju, jer u njih ulaze još neobeležene aktivnosti S_1 i S_2). Potom se ponavlja iteracija dodeljujući naredne brojeve, iz skupa usvojenih brojeva za numeraciju, događajima koji su stekli pravo na numeraciju u prethodnoj iteraciji (završnom događaju aktivnosti A dodeljen je broj 2). Poželjno je da brojevi događaja rastu s leva nadesno i odozgo nadole na mrežnom dijagramu. U drugom koraku obeležavaju se aktivnosti (S_1 i S_2) koje izlaze iz novonumerisanih događaja (2). U trećem koraku razmatraju se završni događaji novoobeleženi aktivnosti (S_1 i S_2). To su završni događaji aktivnosti B i S_1 i aktivnosti C i S_2 . Oba ova događaja su stekla pravo na numeraciju u sledećoj iteraciji, koja započinje dodeljivanjem ovim događajima brojeva 3 i 4. Kome događaju će se dati broj 3, a kome broj 4, po pravilu je svejedno, ali na osnovu napred istaknute preporuke završnom događaju aktivnosti B i S_1 je dodeljen broj 3, a završnom događaju aktivnosti C i S_2 broj 4. Osnovni stav Fulkersonovog pravila rastućeg numerisanja je da uvek početnom događaju aktivnosti bude dodeljen manji broj nego njenom završnom događaju.



Slika 1. Mrežni dijagram

Početni događaj projekta prepoznaje se po tome što u njega ne ulaze aktivnosti, nego samo izlaze. Nasuprot, u završni događaj projekta samo ulaze aktivnosti. Početne ili nezavisne aktivnosti projekta nemaju simbola u kolonama šeme odnosa (u konkretnom primeru aktivnosti A, B i C). Završne aktivnosti projekta nemaju simbola u vrstama šeme odnosa (u konkretnom primeru aktivnosti D i E).

2. Zadatak

Nacrtati mrežni dijagram projekta čija je šema odnosa data tabelom 1. Pri numerisanju upotrebiti rastuće numerisanje sa preskocima, tj. upotrebiti samo parne brojeve [2, 2 n].

Tabela 1.

Razmatrane aktivnosti	A	B	C	D	E
Prethodne aktivnosti					
A			*		
B			*		*
C					
D			*		*
E					

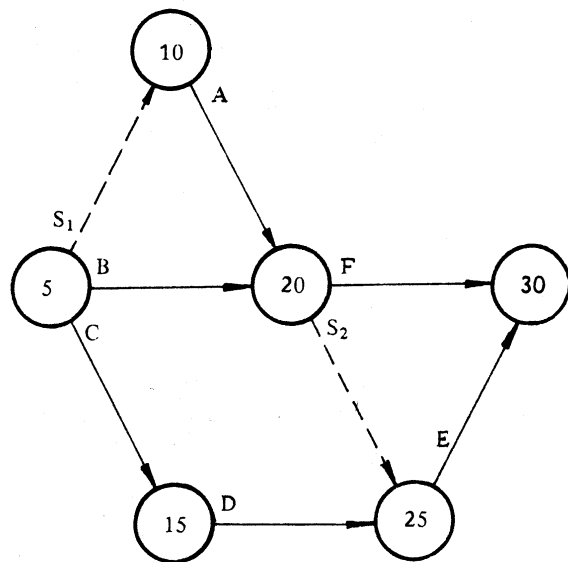
Rešenje. Kod ovoga primera se broj ukupnih događaja određuje deljenjem broja poslednjeg događaja sa korakom preskoka ($10 : 2 = 5$). Ovo je značajno kod velikih mrežnih dijagrama gde je brojanje događaja zametan posao. Mrežni dijagram iz ovoga primera se može konstruisati korišćenjem samo dve prividne aktivnosti, ali se često koristi i treća (naročito od strane početnika), koja počinje u događaju 4 a završava se u događaju 8, te time izražava neposredno zavisnost aktivnosti C od aktivnosti D, mada je ta zavisnost izražena posredno preko prividnih aktivnosti S_1 i S_2 . Drugi način crtanja u principu je tačan, ali uvodi jedr u prividnu aktivnost više u mrežni dijagram, tj. komplikuje ga.

3. Zadatak

Za šemu odnosa aktivnosti datu tabelom 1. nacrtati mrežni dijagram. Numerisati mrežni dijagram po Fulkersonovom pravilu za rastuće numerisanje. Upotrebiti neuzastopno rastuće numerisanje sa korakom preskoka jednakim 5.

Tabela 1

Razmatrane aktivnosti	A	B	C	D	E	F
Prethodne aktivnosti						
A					*	*
B					*	*
C				*		
D					*	
E						
F						



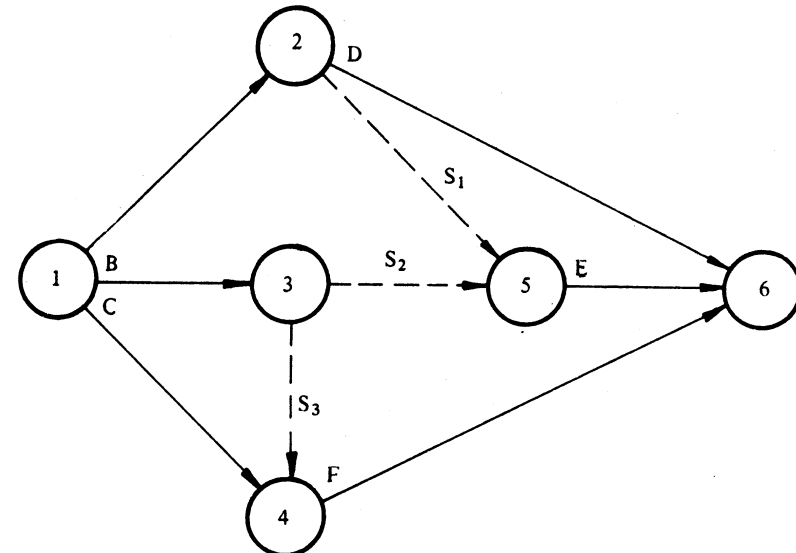
Slika 1. Mrežni dijagram

4. Zadatak

Nacrtati mrežni dijagram projekta čija je šema odnosa aktivnosti data tabelom 1. Izvršiti uzastopno rastuće numerisanje koristeći pravilo Fulkersona.

Tabela 1.

Razmatrane aktivnosti	A	B	C	D	E	F
Prethodne aktivnosti						
A				*	*	
B					*	*
C						*
D						
E						
F						



Slika 1. Mrežni dijagram

Rešenje. U ovom primeru su se pojavile paralelne aktivnosti. Sa logičko-tehnološkog stanovišta njihovom istovremenom odvijanju nema nikakve zamerke, ali, radi jednoznačnog obeležavanja, ne može se dozvoliti da im budu isti i početni i završni događaji. Zato je uvedena prividna aktivnost S_1 . Ovde je korak neuzastopnosti pri numerisanju 5, te ukupan broj događaja je $n = 30 : 5 = 6$.

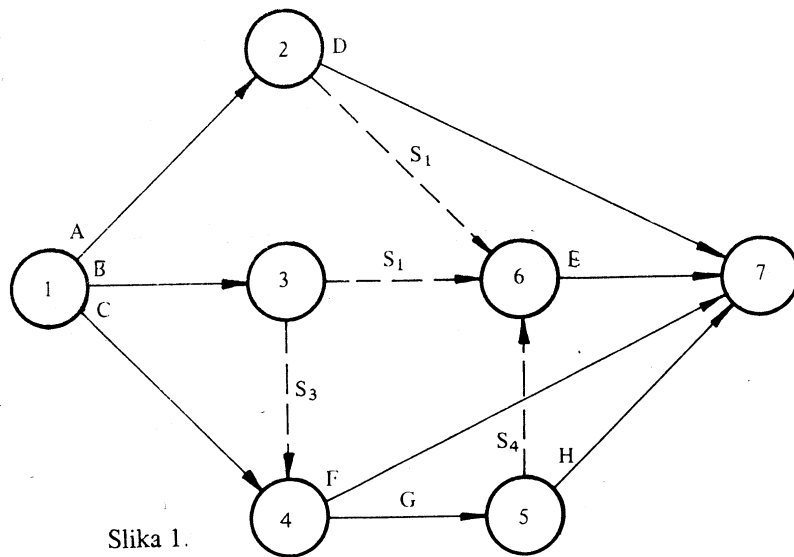
Rešenje. Karakterističnost ovog problema je da se zavisnost aktivnosti E od aktivnosti A i B može pravilno prikazati samo ako se uvede poseban događaj za početni događaj aktivnosti E, odnosno postoji događaj u koji ulaze samo prividne aktivnosti.

5. Zadatak

Naknadno je ustanovljeno da u projektu iz 4. zadatka treba obaviti još dve aktivnosti (G i H), tako da prva od njih (G) može početi čim se završi aktivnost C, ali ne može početi aktivnost E dok se ne završi ova nova aktivnost. Druga od ovih aktivnosti (H) može početi po završetku aktivnosti G, a od nje ne zavisi nijedna aktivnost. Nova šema odnosa data je tabelom 1, a njoj odgovarajući mrežni dijagram slikom 1.

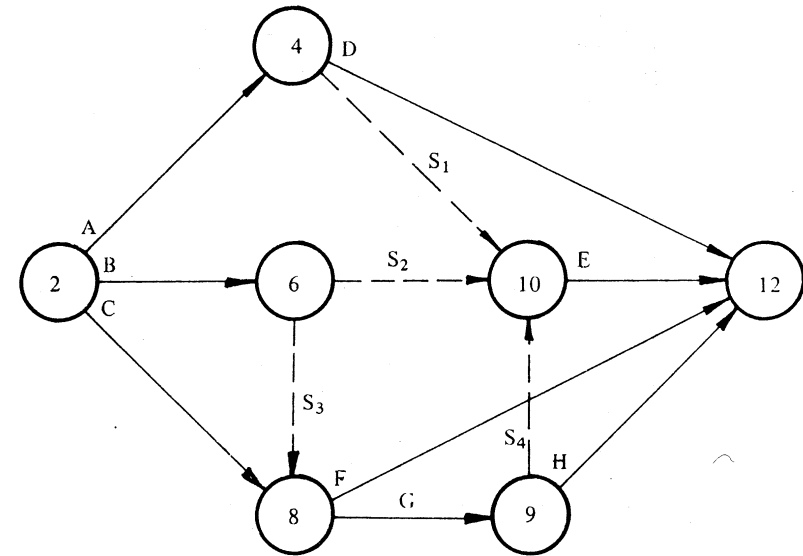
Tabela 1

Razmatrane aktivnosti	Prethodne aktivnosti							
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	/			*	*			
B		/			*	*		
C			/			*	*	
D				/				
E					/			
F						/		
G					*		/	*
H								/



Slika 1.

Rešenje. Da bi bio ispunjen odnos $i < j$ za svaku aktivnost (i-j) morao se crtati novi mrežni dijagram. Međutim, da je mrežni dijagram na slici 1. bio numerisan sa preskocima, recimo samo parnim brojevima, onda bi se mogle naknadno uneti aktivnosti G i H, a da se ne crta novi mrežni dijagram. To je pokazano slikom 2. Ovo je značajno kod naknadne dopune velikih mrežnih dijagrama, gde su za crtanje novog mrežnog dijagrama potrebni značajno vreme i materijalni izdaci. Numerisanjem završnog događaja aktivnosti G sa brojem 9 obezbedilo se da za aktivnosti G, H i S₄ bude početni događaj numerisan manjim brojem nego njihov završni događaj, a da ne bude crtan novi mrežni dijagram. U ovome se ogleda prednost neuzastopnog numerisanja.



Slika 2.

6. Zadatak

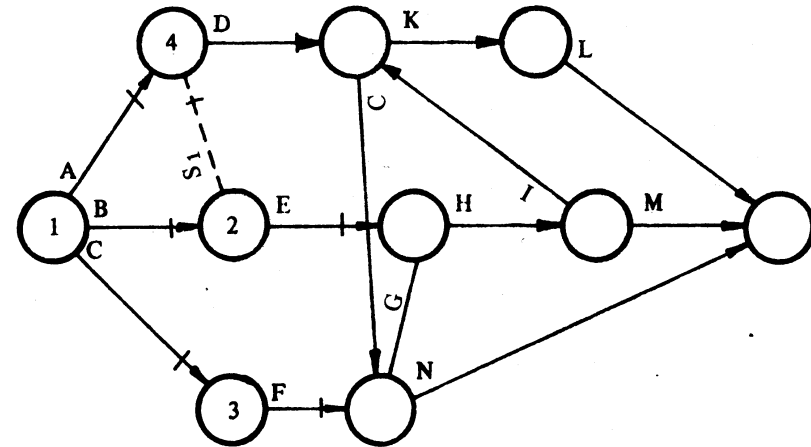
Za šemu odnosa datu tabelom 1. nacrtati mrežni dijagram i numerisati ga uzastopnim rastućim numerisanjem primenjujući pravilo Fulkersona.

Rešenje. Mrežni dijagram je nacrtan na slici 1. bez ikakvih teškoća. Pokušajmo ga numerisati primenom uzastopnog rastućeg numerisanja po pravilu Fulkersona, tj. upotrebimo za numerisanje skup celih pozitivnih brojeva [1, n]. U prvom koraku dodeljuje se početnom događaju projekta broj 1. U drugom koraku obeležavaju se sve aktivnosti koje izlaze iz događaja 1. To su aktivnosti A, B i C.

U trećem koraku razmatraju se završni događaji svih obeleženih aktivnosti. U završne događaje aktivnosti B i C ulaze samo obeležene aktivnosti, te se ti događaji numerišu brojevima 2 i 3. Obeležavaju se sve aktivnosti koje izlaze iz događaja 2 i 3. To su aktivnosti S₁, E i F. Potom se razmatraju događaji u koje ulaze ove

Tabela 1

Razmatrane aktivnosti	Prethodne aktivnosti													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
A				*										
B				*	*									
C						*								
D									*	*				
E								*						
F							*							*
G								*						
H									*				*	
I										*	*			
J							*							*
K												*		
L														
M														
N														



Slika 1.

logičko-tehnološki nemoguće, jer se svaki projekat mora vremenski odvajati unapred ako ima svoj početak i završetak.

Znači, ako se u mrežnom dijagramu pojavi kružni put, onda se ne može do kraja sprovesti rastuće numerisanje po pravilu Fulkerskoga. Drugim rečima, Fulersonovo pravilo rastućeg numerisanja uspešno otkriva kružne puteve u mrežnom dijagramu.

aktivnosti. Jedino je završni događaj aktivnosti S_1 stekao pravo na numeraciju i dodeljen mu je broj 4. Nastavlja se sa obeležavanjem aktivnosti koje izlaze iz događaja 4. To je aktivnost D. Razmatra se završni događaj aktivnosti D. On ne može biti numerisan sledećim brojem, jer u njega ulazi i aktivnost I koja nije još obeležena. Kako nema više događaja koji su stekli pravo na numeraciju, to znači da se ne može do kraja numerisati ovaj mrežni dijagram. To ujedno ukazuje da u ovom mrežnom dijagramu postoji kružni put (petlja), a to je i bio cilj ovoga primera. Taj kružni put sačinjavaju aktivnosti G – H – I – J – G. On se lako uočava na mrežnom dijagramu, jer je ovaj mrežni dijagram relativno mali i aktivnosti kružnog puta predstavljaju približno 30% ukupnog broja aktivnosti. Mnogo teže je vizuelno uočiti kružni put na velikom mrežnom dijagramu. Razmatrajući aktivnosti kružnog puta dolazi se do zaključka da je aktivnost G istovremeno i prethodna i naredna aktivnost aktivnostima H – I – J. Ovo je

Aktivnost		Trajanje (v.j.)		Direktni troškovi	
oznaka	zavisi od	normalno t_n	usiljeno t_u	normalno C_n	usiljeno C_u
A	nezavisna	10	5	150	300
B	A	6	3	170	290
C	A	6	4	270	330
D	A	10	5	350	700
E	B	4	1	150	300
F	C	20	10	700	1200
G	C	3	1	300	360
H	D	14	7	400	820
I	D	22	15	500	990
J	G,H	4	3	300	300
K	G,H	10	5	500	1000
L	E, F, J	8	8	700	700
M	I	5	2	240	480

7.3. ANALIZA VREMENA I TROŠKOVA – METODA KRITIČNOG PUTA –

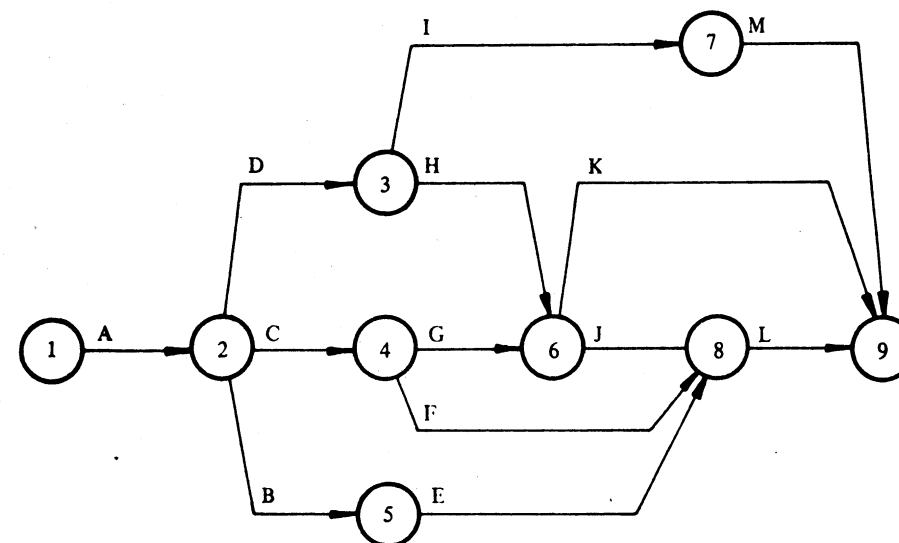
7. Zadatak

Za projekat čija je lista aktivnosti data u tabeli 1:

- nacrtati mrežni dijagram i numerisati isti rastućim uzastopnim numerisanjem po pravilu Fulkersona;
- izvršiti analizu vremena pri normalnom trajanju aktivnosti;
- odrediti kritični put pri usiljenom trajanju aktivnosti;
- odrediti direktne troškove projekta pri normalnom i usiljenom trajanju aktivnosti i jedinični priraštaj direktnih troškova za svaku aktivnost;
- odrediti najmanje moguće direktne troškove projekta pri trajanju projekta jednakom dužini usiljenog kritičnog puta.

Rešenje:

- Mrežni dijagram je dat na slici 1. Isti je numerisan uzastopnim rastućim numerisanjem primenom pravila Fulkersona. Ukupno ima 9 događaja. Sa leve strane aktivnosti (gledano u smeru odvijanja aktivnosti) nanete su oznake aktivnosti.



Slika 1

- Analiza vremena počinje određivanjem najranijeg nastupanja događaja po obrascu

$$t_j^{(0)} = \max_i \{t_i^{(0)} + (t_e)_{ij}\}, \text{ za } j = 2, 3, \dots, n,$$

usvojeno je $t_1^{(0)} = 0$.

Ova vremena su unesena u levim (prednjim) kvadrantima krugova (predstavnik događaja) mrežnog dijagrama na slici 2. Takođe su data u tabeli 2. U donjem kvadrantu kruga upisan je broj početnog događaja aktivnosti na osnovu koje je određeno najranije nastupanje događaja.

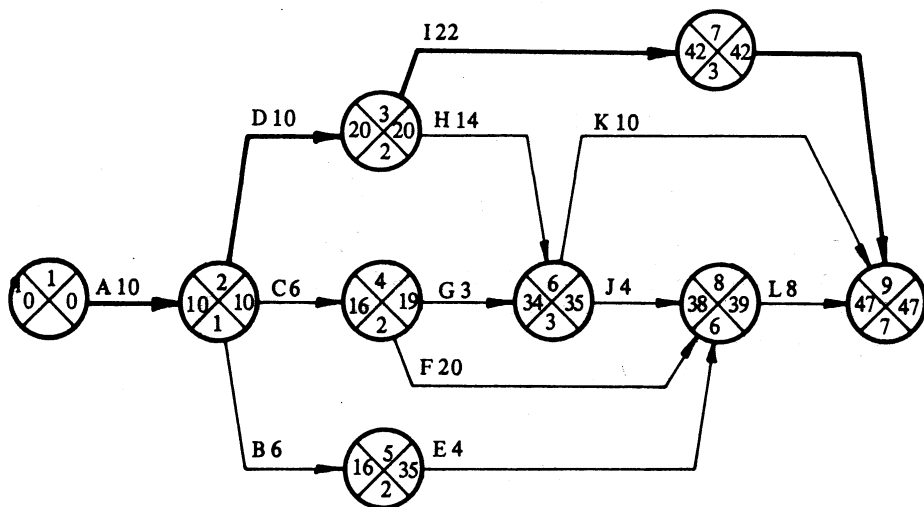
Kao drugi korak u analizi vremena određuje se najkasnije nastupanje događaja koristeći se izrazom

$$t_i^{(1)} = \min_j \{t_j^{(1)} - (t_e)_{ij}\}, \text{ za } i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1,$$

usvojeno je $t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$.

Ova vremena su unesena u desne kvadrante krugova mrežnog dijagrama na slici 2, a takođe su data u zadnjoj koloni tabele 2.

U mrežnom dijagramu na slici 2. sa leve strane orijentisanih duži nanete su oznake aktivnosti i normalno trajanje aktivnosti u vremenskim jedinicama, u gornjim kvadrantima krugova brojevi odgovarajućih događaja. Kritični put pri normalnom trajanju aktivnosti je naznačen punim linijama.



Slika 2.

Kritični put se određuje kao treći korak u analizi vremena. Može se odrediti po određivanju najranijeg nastupanja događaja, na taj način što se polazi od

završnog događaja i ide preko događaja čiji su brojevi upisani u donjim kvadrantima krugova dok se ne stigne do početnog događaja. U našem primeru polazi se od događaja 9 i ide na događaj 7, jer je u donjem kvadrantu kruga koji predstavlja događaj 9 ubeležen broj 7. Od događaja 7 ide se preko događaja 3 i 2 do događaja 1. Znači kritični put sačinjavaju aktivnosti A-D-I-M. Trajanje kritičnog puta iznosi 47 vremenskih jedinica.

Naravno, kada se odredi najkasnije nastupanje događaja, onda to vreme služi za proveru ili određivanje kritičnog puta, jer za događaje na kritičnom putu moraju biti ista vremena najranijeg i najkasnijeg nastupanja.

Vremenske rezerve se određuju na sledeći način.

Ukupna vremenska rezerva aktivnosti (i-j) određuje se korišćenjem izraza

$$(S_t)_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{ij}.$$

Slobodna vremenska rezerva prve vrste ili prethodna slobodna vremenska rezerva određuje se kao

$$(S'_s)_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Slobodnu vremenska rezerva druge vrste ili naredna slobodna vremenska rezerva određuje se po izrazu

$$(S''_s)_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(1)} - t_{ij}.$$

Nezavisna vremenska rezerva određuje se po izrazu

$$(S_n)_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(1)} - t_{ij}.$$

Vremenska rezerva događaja ili uslovna vremenska rezerva određuje se koristeći se izrazom

$$S_i = t_i^{(1)} - t_i^{(0)}.$$

U gornjim izrazima su:

t_{ij} — trajanje aktivnosti (i-j);

$t_i^{(0)}$ — najranije nastupanje događaja i ili najraniji početak aktivnosti (i-j);

$t_i^{(1)}$ — najkasnije nastupanje događaja i, ili najkasniji početak aktivnosti (i-j);

$t_j^{(0)}$ — najranije nastupanje događaja j;

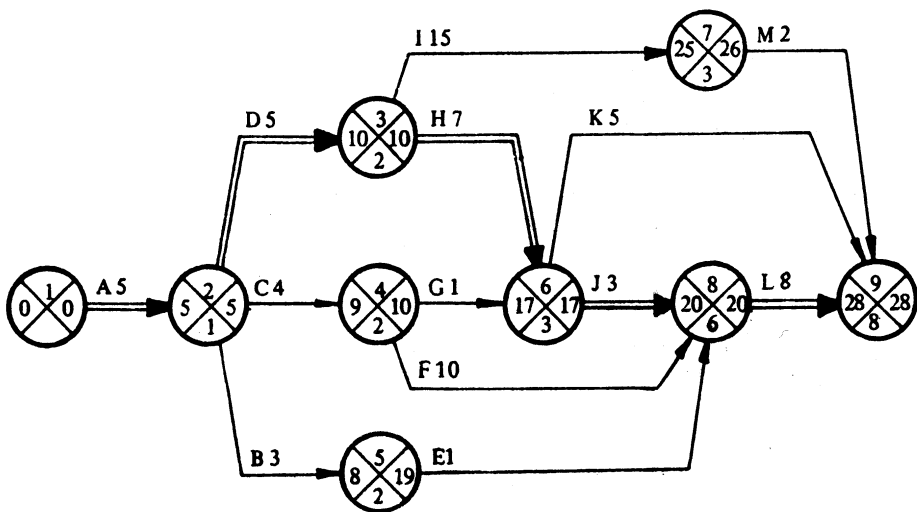
$t_j^{(1)}$ — najkasnije nastupanje događaja j, ili najkasniji završetak aktivnosti (i-j).

Vrednosti svih vremenskih rezervi date su u tabeli 2. U tabeli 2. nije navedena vremenska rezerva završnog (devetog) događaja, ali kako ovaj događaj mora biti na kritičnom putu, to i njegova vremenska rezerva mora biti jednaka nuli.

Tabela 2

Aktivnost	Početni događaj		Završni događaj		Vremenske rezerve							
	oznaka	1-j	trajanje t_j	$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(1)}$	$(S_p)_{ij}$	$(S_s)_{ij}$	$(S_d)_{ij}$	$(S_f)_{ij}$	$(S_n)_{ij}$	S_i
A	1-2	10	0	0	10	16	0	0	0	0	0	0
B	2-5	6	10	10	16	35	19	0	19	0	0	0
C	2-4	6	10	10	16	19	3	0	3	0	0	0
D	2-3	10	10	10	20	20	0	0	0	0	0	0
E	5-8	4	16	35	38	39	19	18	0	-1	19	0
F	4-8	20	16	19	38	39	3	2	0	-1	3	0
G	4-6	3	16	19	34	35	16	15	13	12	3	0
H	3-6	14	20	20	34	35	1	0	1	0	0	0
I	3-7	22	20	20	42	42	0	0	0	0	0	0
J	6-8	4	34	35	38	39	1	0	0	-1	1	0
K	6-9	10	34	35	47	47	3	3	2	2	1	0
L	8-9	8	38	39	47	47	1	1	0	0	1	0
M	7-9	5	42	42	47	47	0	0	0	0	0	0

c) Analiza vremena pri usiljenom trajanju aktivnosti vrši se kao i pri normalnom trajanju. Naravno, primenjuju se isti izrazi i postupci samo se računava sa usiljenim trajanjem aktivnosti. Za ovu analizu smo koristili mrežni dijagram sa slike 3. Sa leve strane aktivnosti date su njihove oznake i usiljeno trajanje. U levim kvadrantima su unešeni najraniji počeci događaja, a u desnim najkasniji počeci. Kritični put pri usiljenom trajanju aktivnosti ucrtan je dvostrukim linijama.



Slika 3.

Kritične aktivnosti pri usiljenom trajanju su A-D-H-J-L, odnosno kritični događaji su 1-2-3-8-9. Kritičan put pri usiljenom trajanju aktivnosti iznosi 28 vremenskih jedinica. Ova vrednost je data u poslednjoj vrsti kolone za t_u u tabeli 3.

Aktivnost	I-j	trajanje t_j	Početni događaj		Završni događaj		Vremenske rezerve					
			$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	$(S_p)_{ij}$	$(S_s)_{ij}$	$(S_d)_{ij}$	$(S_f)_{ij}$	$(S_n)_{ij}$	S_i
A	1-2	10	0	0	10	10	0	19	0	0	0	0
B	2-5	6	10	10	16	35	19	3	0	0	0	0
C	2-4	6	10	10	16	19	3	0	0	0	0	0
D	2-3	10	10	10	20	20	0	0	0	0	0	0
E	5-8	4	16	35	38	39	19	18	0	-1	19	0
F	4-8	20	16	19	38	39	3	2	0	-1	3	0
G	4-6	3	16	19	34	35	16	15	13	12	3	0
H	3-6	14	20	20	34	35	1	0	1	0	0	0
I	3-7	22	20	20	42	42	0	0	0	0	0	0
J	6-8	4	34	35	38	39	1	0	0	-1	1	0
K	6-9	10	34	35	47	47	3	3	2	2	1	0
L	8-9	8	38	39	47	47	1	1	0	0	1	0
M	7-9	5	42	42	47	47	0	0	0	0	0	0

d) Direktni troškovi projekta se dobijaju kada se saberu direktni troškovi svih aktivnosti projekta. Tako za normalno trajanje aktivnosti direktni troškovi projekta iznose 4630 novčanih jedinica, što je dato u poslednjoj vrsti tabele 3. u koloni za C_n . Direktni troškovi projekta pri usiljenom trajanju aktivnosti dobijeni su sabiranjem vrednosti kolone za C_u u tabeli i dati su u poslednjoj vrsti.

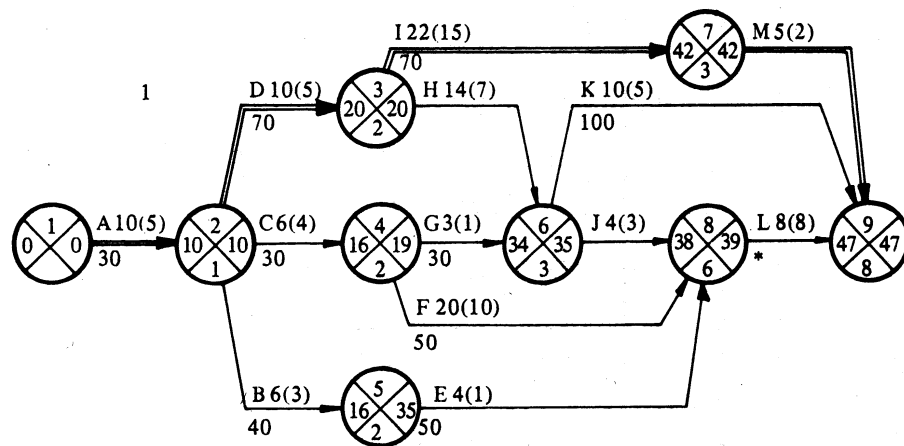
Priraštaj direktnih troškova za jedinicu skraćenja vremena odvijaju aktivnosti (jednačini direktni troškovi aktivnosti) određeni su, uz pretpostavku da linearno rastu pri skraćenju trajanja aktivnosti od normalnog do usiljenog, na osnovu izraza

$$\Delta C = \left| \frac{C_u - C_n}{t_u - t_n} \right|,$$

gde su:

- ΔC – jedinični direktni troškovi aktivnosti;
- C_u – direktni troškovi aktivnosti pri usiljenom trajanju;
- C_n – direktni troškovi aktivnosti pri normalnom trajanju;
- t_u – usiljeno trajanje aktivnosti;
- t_n – normalno trajanje aktivnosti.

Vrednosti jediničnih troškova date su u tabeli 3. i nanese sa desne strane aktivnosti mrežnog dijagrama na slici 4.



Slika 4

Na mrežnom dijagramu sa slike 4. sa leve strane aktivnosti su nanese podaci: oznaka aktivnosti, normalno trajanje aktivnosti i (u malim zagradama) usiljeno trajanje aktivnosti. U pojedinim kvadrantima su uobičajeni podaci.

f) Najmanji mogući direktni troškovi pri usiljenom trajanju projekta određuju se na sledeći način:

Tabela 3.

Aktivnosti		Trajanje		Direktni troškovi		
oznaka	i-j	t_n	t_u	C_n	C_u	ΔC
A	1-2	10	5	150	300	30
B	2-5	6	3	170	290	40
C	2-4	6	4	270	330	30
D	2-3	10	5	350	700	70
E	5-8	4	1	150	300	50
F	4-8	20	10	700	1200	50
G	4-6	3	1	300	360	30
H	3-6	14	7	400	820	60
I	3-7	22	15	500	990	70
J	6-8	4	3	200	300	100
K	6-9	10	5	500	1000	100
L	8-9	8	8	700	700	*
M	7-9	5	2	240	480	80
Projekat		47	28	4630	7770	

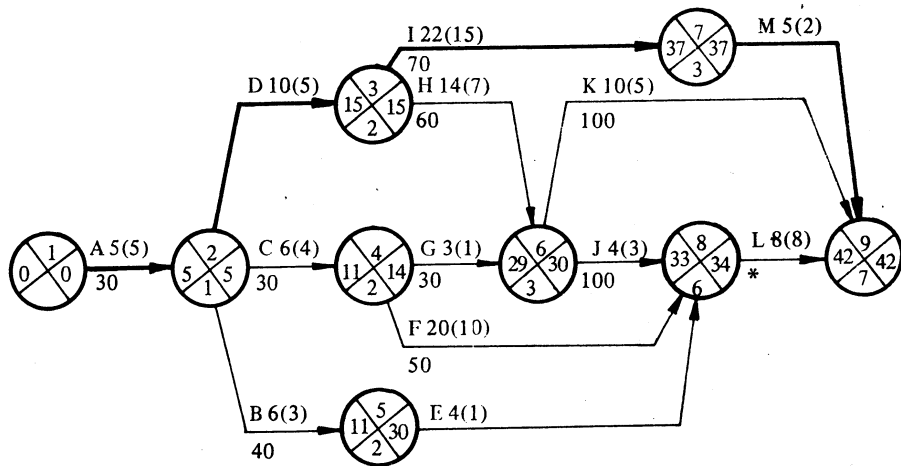
1. iteracija. Bira se na kritičnom putu aktivnost sa najmanjim priraštajem jediničnih troškova i skraćuje se najviše što je moguće, tj. do njenog usiljenog trajanja ili do pojave novog kritičnog puta. Sa mrežnog dijagrama na slici 4. vidi se da je najjeftinije skraćivati kritičnu aktivnost A ($\Delta C_A = 30$ v.j.). Kako je ova aktivnost sastavni element svih puteva, to se može skratiti do njenog usiljenog trajanja, tj. do 5 vremenskih jedinica. Ovo izaziva i skraćenje trajanja projekta za $\Delta t_1 = 5$ v.j, što daje:

- trajanje projekta $T_1 = T_n^{(1)} - \Delta t_1 = 47 - 5 = 42$ v.j.
- troškove projekta $C_1 = C_{np} + \Delta t_1 \cdot \Delta C_A = 4630 + 5 \cdot 30 = 4780$ n.j.

Stanje posle iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 5.

2. iteracija. Kritične aktivnosti D i I imaju iste jedinične troškove, ali se odabira aktivnost D, jer se ona može skratiti za 3 v.j. do pojave novog kritičnog puta preko aktivnosti A-C-F-L, a skraćivanje aktivnosti I za 1 v.j. izaziva pojavu novog kritičnog puta. Znači, u drugoj iteraciji usvaja se $\Delta t_2 = 3$ v.t. To daje:

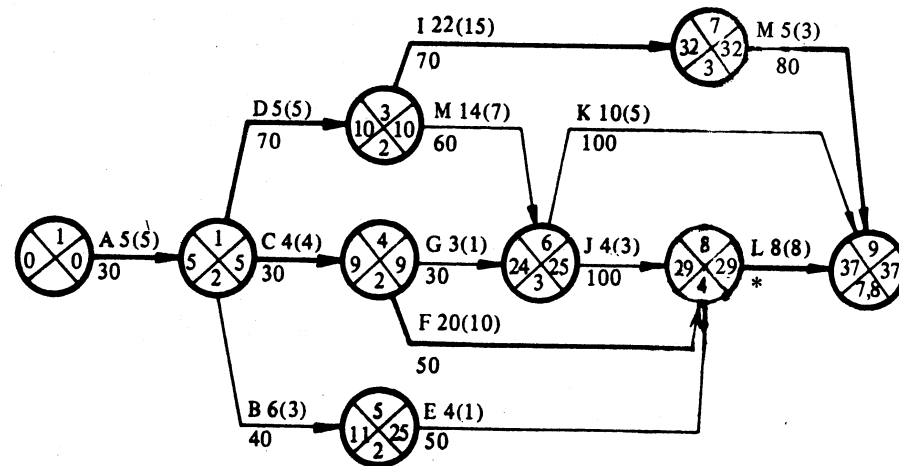
- trajanje projekta $T_2 = T_1 - \Delta t_2 = 42 - 3 = 39$ v. j.
- troškovi projekta $C_2 = C_1 + \Delta t_2 \cdot \Delta C_D = 4780 + 3 \cdot 70 = 4990$ n. j.



Slika 5

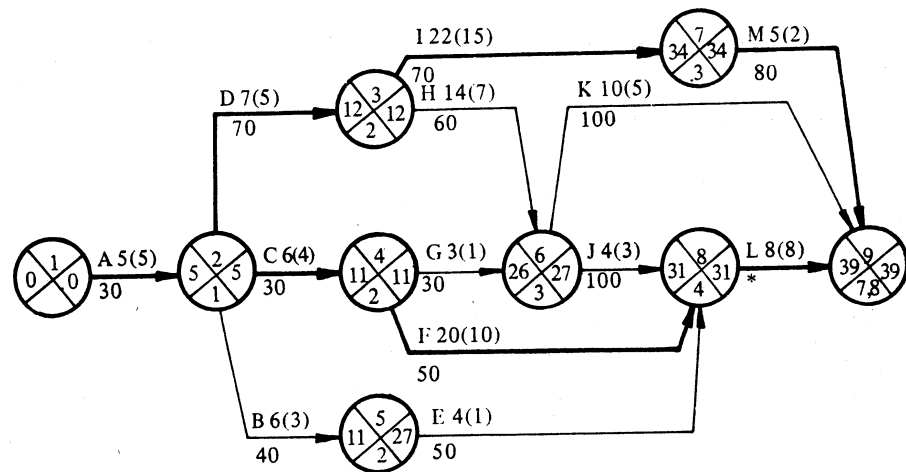
- trajanje projekta $T_3 = T_2 - t_3 = 39 - 2 = 37$ v. j.
- troškovi projekta $C_3 = C_2 + t_3 (C_c + C_D) = 4990 + 2 (70 + 30) = 5190$.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 7.



Slika 7.

Stanje posle ove iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 6.



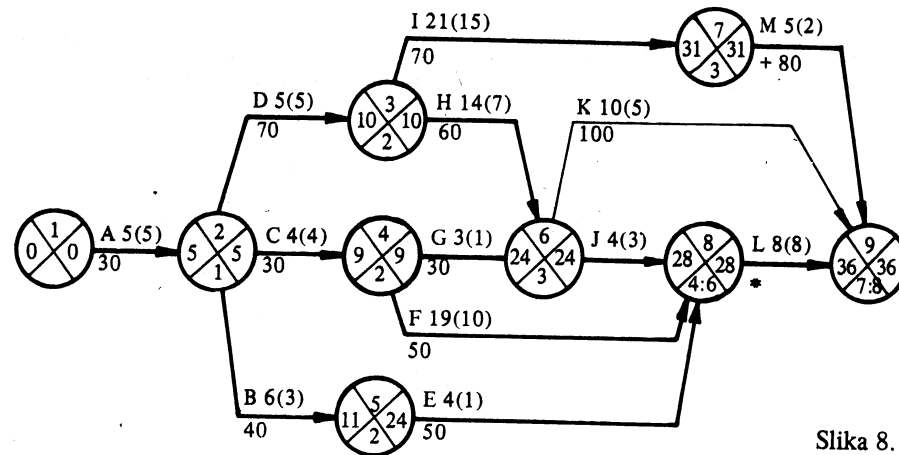
Slika 6.

3. iteracija. Sada se moraju za isti iznos skratiti oba kritična puta. Da bi se skratio novonastali kritični put najjeftinije je skratiti aktivnost C, a za skraćenje već postojećeg kritičnog puta opet je najpodesnije skratiti aktivnost D. Skraćivanje će se izvršiti do usiljenog trajanja i aktivnosti C i aktivnosti D, tj. za 2 vremenske jedinice ($\Delta t_3 = 2$ v.j.). Radi uveravanja da je ovo skraćivanje moguće obaviti, dovoljno je proveriti da se ne pojavljuje ranije kritični put preko aktivnosti B i E. Međutim, očigledno je da se ne pojavljuje. Ovo skraćivanje daje:

4. iteracija. Da bi se dalje skratila oba kritična puta, najpodesnije je skratiti aktivnosti E i I. Mogu se skratiti samo za 1 vremensku jedinicu, jer se preko aktivnosti H-J-L pojavljuje tada novi kritični put. Sada je $\Delta t_4 = 1$ v. j. što daje:

- trajanje projekta $T_4 = T_3 - \Delta t_4 = 37 - 1 = 36$ v. j.
- troškovi projekta $C_4 = C_3 + \Delta t_4 (\Delta C_F + \Delta C_I) = 5190 + 1 (50 + 70) = 5310$ n. j.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 8.

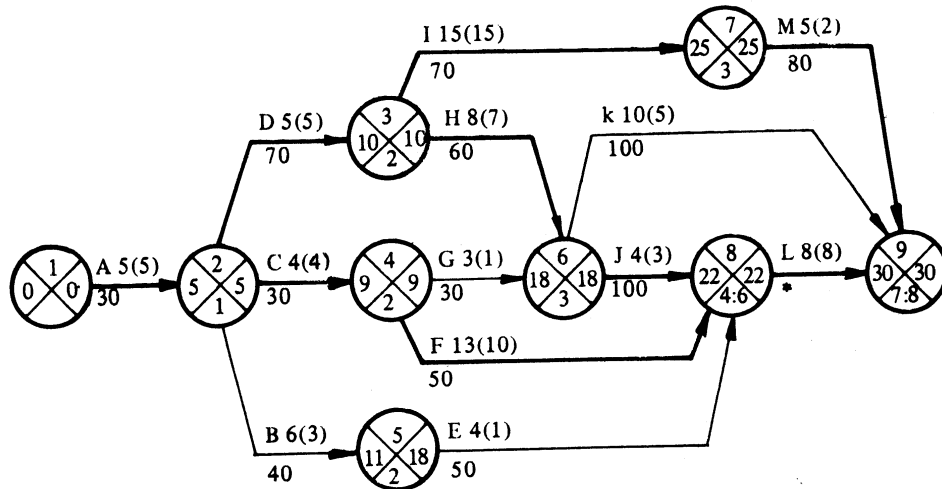


Slika 8.

5. iteracija. Sada postoje tri kritična puta: prvi A–D–I–M, drugi A–D–H–J–L i treći A–C–F–L. Da bi se skratili ovi kritični putevi najpodesnije je skratiti aktivnosti F, H i I. Kada se skraćuje aktivnost F mora se voditi računa o pojavi kritičnog puta preko aktivnosti E ili preko G i J. Kada se skraćuje aktivnost H, mora se voditi računa o pojavljivanju kritičnosti preko G, dok pri skraćivanju aktivnosti I, treba obratiti pažnju na aktivnost K, ali je ona za sada daleko od kritičnosti. Skraćivanje izvršiti do usiljenog trajanja aktivnosti I, tj. za 6 v. j. Sada je $\Delta t_5 = 6$ v. j. što daje:

- trajanje projekta $T_5 = T_4 - \Delta t_5 = 36 - 6 = 30$ v.j.
- troškovi projekta $C_5 = C_4 + \Delta t_5 (\Delta C_H + \Delta C_I) = 5310 + 6(50 + 60 + 70) = 6390$ n.j.

Stanje posle 5. iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 9.

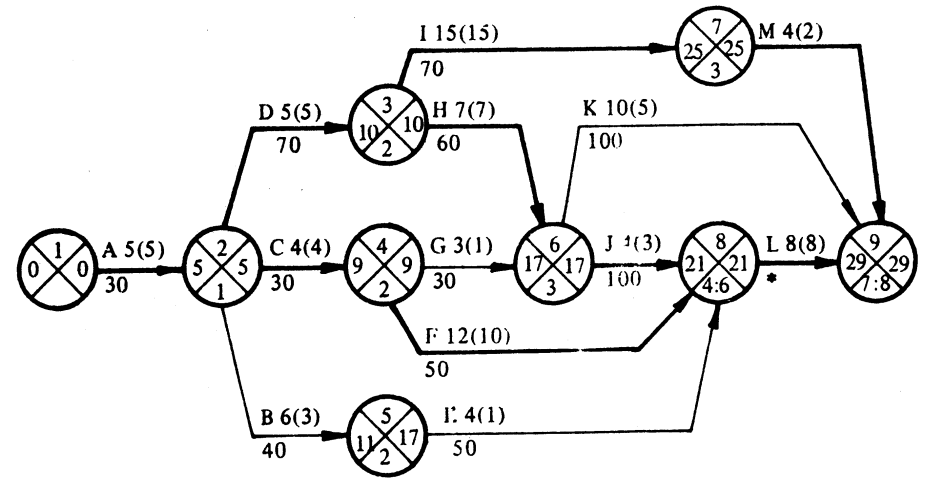


Slika 9.

6. iteracija. Opet su ostala tri ista kritična puta. Skraćuju se aktivnosti F, H i M. Ovde je granicu skraćivanja uslovilo usiljeno trajanje aktivnosti H. Tako imamo $\Delta t_6 = 1$ v. j, što daje:

- trajanje projekta $T_6 = T_5 - \Delta t_6 = 30 - 1 = 29$ v.j.
- troškovi projekta $C_6 = C_5 + \Delta t_6 (\Delta C_F + \Delta C_H + \Delta C_M) = 6390 + 1(50 + 60 + 80) = 6580$ n.j.

Stanje posle ove iteracije je predstavljeno mrežnim dijagramom na slici 10.

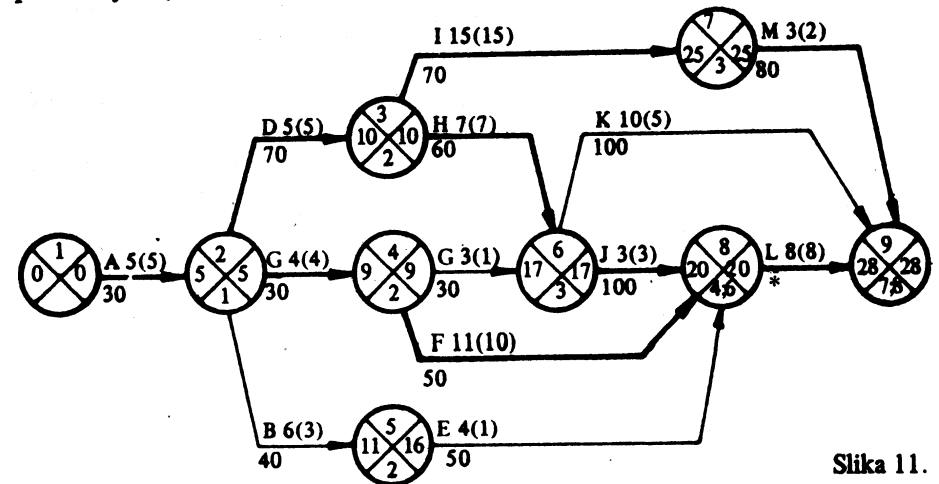


Slika 10.

7. iteracija. U ovoj iteraciji treba skratiti aktivnosti F, J i M i to samo za $\Delta t_7 = 1$ v. j, jer toliko je potrebno do kritičnog puta pri usiljenom trajanju aktivnosti. Uostalom, aktivnost J ne možemo skratiti za veći iznos. Sada je:

- trajanje projekta $T_7 = T_6 - \Delta t_7 = 29 - 1 = 28$ v.j.
- troškovi projekta $C_7 = C_6 + \Delta t_7 (\Delta C_F + \Delta C_J + \Delta C_M) = 6580 + 1(50 + 100 + 80) = 6810$ n.j.

Stanje posle sedme iteracije, i ujedno pri najkraćem mogućem trajanju projekta, predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 11



Slika 11.

Rezultat ukazuje da se projekat može izvršiti u vremenu trajanja usiljenog kritičnog puta, a da troškovi projekta budu 6810, umesto 7770 novčanih jedinica, koliko je dobijeno pri sabiranju troškova pojedinih aktivnosti pri usiljenom trajanju. Nesumnjivo, ovo predstavlja značajnu uštedu. Kako je ostvarena ova ušteda? Ostvarena je na taj način što je postignuto da ceo projekat usiljeno traje, a da sve aktivnosti ne budu svedene na usiljeno trajanje. Sve one aktivnosti, kod kojih je veći broj odmah posle oznake od onoga u zagradi na mrežnom dijagramu sa slike 11, nisu svedene na usiljeno trajanje. One su i doprinele uštedi, jer bilo bi besmisleno plaćati njihovo skraćivanje do usiljenog trajanja kada to ne može dovesti do skraćivanja celog projekta. U ovom primeru je uštedeno na sledećim aktivnostima:

aktivnost B, ušteda $3 \times 40 = 120$ n.j.
 aktivnost E, ušteda $3 \times 50 = 150$ n.j.
 aktivnost F, ušteda $1 \times 50 = 50$ n.j.
 aktivnost G, ušteda $2 \times 30 = 60$ n.j.
 aktivnost K, ušteda $5 \times 100 = 500$ n.j.
 aktivnost M, ušteda $1 \times 80 = 80$ n.j.
 Ukupna ušteda = 960 n.j.

Ukupna ušteda odgovara razlici između troškova pri usiljenom trajanju svih aktivnosti i optimalnih troškova pri usiljenom trajanju projekta, tj. 7770 n.j. – 6810 n.j. = 960 n.j.

Kod praktične primene analize vreme – troškovi ne moraju se crtati mrežni dijagrami posle svake iteracije. Dovoljno je na već postojećem mrežnom dijagramu na podesan način izmeniti brojeve koji označavaju trajanje aktivnosti koje se skraćuju i izmeniti one brojeve koji se menjaju usled ovog skraćivanja. Takođe je potrebno obeležiti nove kritične puteve. Posebno je podesno različitim bojama naznačiti novo stanje posle iteracija.

Mada je kod velikih mrežnih dijagrama teško navesti sve puteve, može se izvršiti analiza troškova tabelarno navodeći sve puteve mrežnog dijagrama. To je urađeno pomoću tabele 4.

U tabeli 4. kritični putevi su obeleženi dopisivanjem slova K uz trajanje istih. Simbolično pisanje ispod iteracija, na primer A: 10 → 5 v.j. znači da je u prvoj iteraciji aktivnost A skraćena sa 10 na 5 vremenskih jedinica. Ispod oznake za skraćivanje aktivnosti navedeni su direktni troškovi projekta, posle te iteracije, odnosno posle datog skraćivanja.

Tabela 4.

Red. broj puta	Trajanje puta		Iteracije						
	normalno	usijano	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
I	A-D-I-M	47K	42K	39K	37K	36K	30K	29K	28K
II	A-D-H-K	44	36	34	34	28	27	27	27
III	A-D-H-J-	46	38	36	36K	30K	29K	29K	28K
IV	A-C-G-K	29	24	22	22	22	22	22	22
V	A-C-G-J-	31	26	24	24	24	24	24	23
VI	A-C-F-L	44	39	37K	36K	30K	29K	29K	28K
VII	A-B-E-L	28	23	23	23	23	23	23	23

7.4. ANALIZA VREMENA I TROŠKOVA
– PERT METODA –

8. Zadatak

Analizom strukture projekta ustanovljena su karakteristična svojstva aktivnosti koja su data u tabeli 1.

Tabela 1

Aktivnost	Zavisi od	Trajanje (v.j.)			Direktni trošk. (n.j.)	
		a _{ij}	m _{ij}	b _{ij}	C _{nij}	C _{uij}
A	nezavisna	3	6	9	110	320
B	"	5	5	5	250	250
C	"	1	4	7	50	200
D	A	2	5	5	100	250
E	A	1	2	6	50	110
F	B,C,E	3	5	7	150	250
G	C	4	4	6	200	250
H	D	6	6	6	300	300
I	D	3	3	3	150	150
J	F	1	2	6	100	260
K	F,G	1	2	3	200	200
L	I,J	4	6	8	400	400
M	I,J	1	1	1	100	100
N	K, M	1	4	4	80	280

U tabeli simboli imaju sledeće značenje:

- a_{ij} – optimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j);
- b_{ij} – pesimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j);
- m_{ij} – najverovatnije vreme izvršenja aktivnosti (i – j);
- C_{nij} – direktni troškovi pri normalnom vremenu izvršenja aktivnosti (i – j);
- C_{uij} – direktni troškovi pri usiljenom vremenu izvršenja aktivnosti (i – j);
- v. j. – vremenska jedinica;
- n. j. – novčana jedinica.

Pod pretpostavkom da je normalno vreme izvršenja jednako očekivanom vremenu izvršenja, a usiljeno vreme izvršenja jednako optimističkom vremenu izvršenja aktivnosti, izvršiti sledeće:

- a) Nacrtati mrežni dijagram projekta;
- b) Numerisati događaje mrežnog dijagrama prema pravilu Fulkersona za rastuće uzastopno numerisanje;
- c) Izvršiti analizu vremena projekta;
- d) Odrediti kritičan put i subkritičan put prve i druge vrste pri normalnom vremenu izvršenja aktivnosti;
- e) Odrediti kritičan put pri usiljenom vremenu izvršenja aktivnosti;
- f) Odrediti verovatnoće nastupanja završnog događaja projekta posle 15; 20 i 25 vremenskih jedinica;
- g) Odrediti optimalne direktne troškove projekta pod uslovom da vreme izvršenja projekta treba svesti na srednju vrednost između normalnog i usiljenog vremena izvršenja projekta.

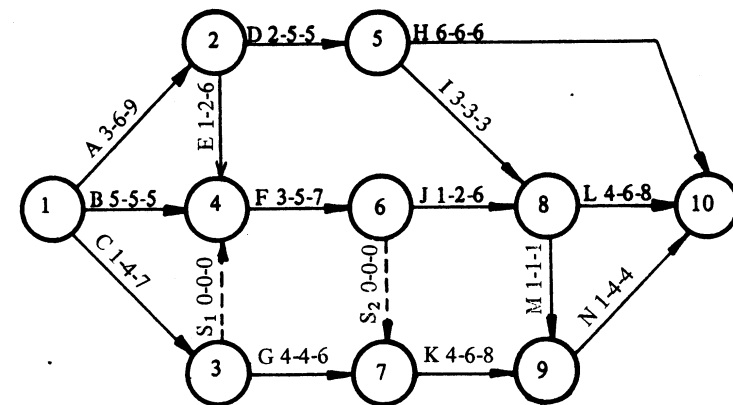
Rešenje:

a) Mrežni dijagram je dat na slici 1. Sa leve strane orijentisane duži, računajući od početka ka završetku, naneseni su: oznaka aktivnosti, optimističke, najverovatnije i pesimističko vreme izvršenja aktivnosti.

b) Numerisanje mrežnog dijagrama rastućim uzastopnim numerisanjem, tj. korišćenjem skupa celih pozitivnih brojeva [1, n], pridržavajući se pravila Fulkersona, dato je takođe na slici 1.

c) Analiza vremena počinje određivanjem očekivanog vremena izvršenja aktivnosti.

$$(t_e)_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$



Slika 1

gde je:

- (t_e)_{ij} – očekivano vreme izvršenja aktivnosti (i – j);
- a_{ij} – optimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j);

m_{ij} – najverovatnije vreme izvršenja aktivnosti (i – j);

b_{ij} – pesimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j).

Rezultati dobijeni za $(t_e)_{ij}$ dati su u tabeli 2. i nanesceni sa leve strane aktivnosti na mrežnom dijagramu sa slike 2. Vrednosti su date u vidu razlomaka sa imeniocem 6, radi lakšeg međusobnog poređenja.

Kao druga veličina u analizi vremena određuje se disperzija vremena izvršenja aktivnosti – varijansa.

$$(\delta^2)_{ij} = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2,$$

gde je:

$(\delta^2)_{ij}$ – varijansa vremena trajanja aktivnosti (i – j);

a_{ij} – optimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j);

b_{ij} – pesimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j).

Dobijene vrednosti za varijansu su date u tabeli 2. i nanescene na mrežnom dijagramu na slici 2. za svaku aktivnost sa njene desne strane. Vrednosti su date u vidu razlomaka sa imeniocem 36, radi lakšeg međusobnog poređenja.

Kao treći korak u analizi vremena određuje se najranije vreme nastupanja događaja.

$$(T_E)_j = \max_i \{(T_E)_i + (t_e)_{ij}\}; \quad j = 2, 3, \dots, n$$

usvaja se $(T_E)_1 = 0$.

Ovde je:

$(T_E)_j$ – najranije nastupanje događaja j;

$(T_E)_i$ – najranije vreme nastupanja događaja i;

$(t_e)_{ij}$ – očekivano vreme izvršenja aktivnosti (i – j).

Tabela 2.

Aktivnost	Događaj		$(t_e)_{ij}$	$(\sigma^2)_{ij}$	Trajanje (v. j.)		Troškovi (n. j.)		
	i	j			$t_n = t_e$	$t_u = a$	C_n	C_u	ΔC
A	1	2	36/6	36/36	6	3	110	320	70
B	1	4	36/6	0	5	5	250	250	*
C	1	3	24/6	36/36	4	1	50	200	50
D	2	5	27/6	9/36	4,5	2	100	250	60
E	2	4	15/6	25/36	2,5	1	50	110	40
F	4	6	30/6	16/36	5	3	150	250	50
G	3	7	26/6	4/36	4,5	4	200	250	100
H	5	10	36/6	0	6	6	300	300	*
I	5	8	18/6	0	3	3	150	150	*
J	6	8	15/6	25/36	2,5	1	100	265	110
K	7	9	12/6	4/36	2	1	200	230	30
L	8	10	36/6	13/36	6	6	400	400	*
M	8	9	6/6	0	1	1	100	100	*
N	9	10	21/6	9/36	3,5	1	80	280	80
ZA PROJEKAT					22	15	2240	3355	

Simbol (*) u koloni za ΔC označava aktivnosti koje imaju fiksno vreme izvršenja. Vrednosti najranijih vremena nastupanja događaja nanete su u levim prednjim kvadrantima mrežnog dijagrama datog na slici 2. Te iste vrednosti, ali u vidu decimalnih brojeva, date su u tabeli 3.

U donjem kvadrantu kruga, koji simbolizuje događaj, upisan je broj događaja iz koga polazi aktivnost na osnovu koje je određeno vreme najranijeg nastupanja događaja. Pored najdužeg vremena najranijeg nastupanja događaja, mogu se u levi kvadrant upisati i sledeća vremena po vrednosti, a u donji kvadrant broj početnih događaja aktivnosti na osnovu kojih su određena, što može korisno poslužiti pri kasnijoj analizi.

Kao četvrti korak u analizi vremena određuje se najkasnije vreme nastupanja događaja po obrascu

$$(T_L)_i = \min_j \{(T_L)_j - (t_e)_{ij}\}; \quad i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$$

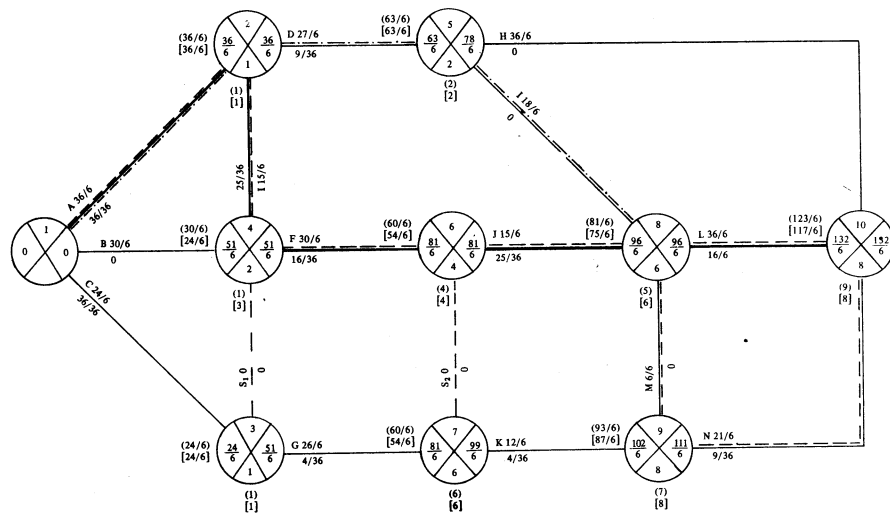
usvaja se $(T_L)_n = (T_E)_n$.

Ovde je:

$(T_L)_i$ – najkasnije vreme nastupanja događaja i,

$(T_L)_j$ – najkasnije vreme nastupanja događaja j,

$(t_e)_{ij}$ – očekivano vreme izvršenja aktivnosti (i – j).



Slika 2.

Vrednosti vremena najkasnijih nastupanja događaja nanete su u desnim (zadnjim) kvadrantima mrežnog dijagrama datog na slici 2. Te iste vrednosti, ali u vidu decimalnih brojeva, date su u tabeli 3.

Pod petim korakom analize vremena podrazumeva se određivanje uslovne vremenske rezerve ili vremenske rezerve događaja, koja se određuje pomoću izraza

$$(S)_i = (T_L)_i - (T_E)_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tabela 3.

Događaj (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vreme najranijeg nastupanja $(T_E)_i$	0,0	6,0	4,0	8,5	10,5	13,5	13,5	16,0	17,0	22,0
Vreme najkasn. nastupanja $(T_L)_i$	0,0	6,0	8,5	8,5	13,0	13,5	16,5	16,0	18,5	22,0
Vremenska rezerva događaja $(S)_i$	0,0	0,0	4,5	0	2,5	0	3,0	0	1,5	0

Napomenimo, da se ukupna, slobodna i nezavisna vremenska rezerva za aktivnosti može određivati i kod problema sa stohastičkim vremenom izvršenja aktivnosti (a, m, b), kao i kod problema sa determinističkim vremenima izvršenja aktivnosti, samo se u izraze za vremenske rezerve unosi $(t_e)_{ij}$ kao stvarno vreme izvršenja aktivnosti. Međutim, sa ovako dobijenim vremenskim rezervama ne možemo računati sa sigurnošću kao kod problema sa determinističkim vremenom izvršenja aktivnosti.

d) Određivanje kritičnog i subkritičnih puteva svakako spada u analizu vremena, mada smo to izdvojili pod posebnu tačku. Podrazumevajući da kritičnost razmatramo za pretpostavku $(T_L)_n = (T_E)_n$, onda kritični put možemo odrediti odmah po određivanju najranijeg vremena nastupanja događaja, idući od završnog ka početnom događaju preko događaja čiji su brojevi upisani u donjim kvadrantima krugova koji predstavljaju događaje. Na slici 2. polazi se od događaja 10, pa preko događaja 8, 6, 4 i 2 dolazi do događaja 1. Naravno, po određivanju vremena najkasnijeg nastupanja događaja, može se proveriti tačnost određivanja kritičnog puta, jer za događaje na kritičnom putu mora biti $(T_E)_i = (T_L)_i$, za svako i sa kritičnog puta.

Subkritične puteve prve i druge vrste možemo odrediti upisujući gde je to potrebno, u levi kvadrant dve naredne vrednosti vremena najranijeg nastupanja događaja, a u donji kvadrant brojeve početnih događaja aktivnosti na osnovu kojih su ta vremena određena. Za događaje na kritičnom putu ova vremena uvek određivati kada postoje, jer su najveći izgledi da će subkritični putevi imati izvestan broj zajedničkih aktivnosti sa kritičnim putem. Na mrežnom dijagramu sa slike 2. drugo po vrednosti vreme nastupanja događaja je obeleženo u malim zagradama, a treće u srednjim. Analogno su obeleženi i brojevi događaja na osnovu kojih su određeni. Subkritični put prve vrste je obeležen sa (---), a druge vrste sa (-.-.-.-).

Tabelarno određivanje subkritičnih puteva prve i druge vrste dato je u tabeli 4, u kojoj su navedeni svi putevi sa pripadajućim aktivnostima i vremenima izvršenja.

Znači, kritičan put sačinjavaju aktivnosti A-E-F-J-L i njegovo vreme iznosi 22 vremenske jedinice, dok subkritične puteve prve i druge vrste sačinjavaju aktivnosti A-E-F-J-M-N, odnosno A-D-I-L, a njihovo vreme izvršenja iznosi 20,5, odnosno 19,5 vremenskih jedinica. Vrednost kritičnog puta je uvedena u tabeli 2. u poslednjoj vrsti u koloni za t_n .

e) Kritičan put pri usiljenom vremenu izvršenja aktivnosti je određen po istom postupku kao i pri normalnom vremenu izvršenja aktivnosti. Njegova vrednost je data na mrežnom dijagramu na slici 3. Sačinjavaju ga aktivnosti B-F-J-L (dvostruko izvučene), a vreme izvršenja ovoga kritičnog puta, ili projekta pri usiljenom vremenu izvršenja aktivnosti je 15 vremenskih jedinica. Ova vrednost je uneta i u poslednju vrstu tabele 2. u koloni za t_u .

Tabela 4.

Redni broj puta	Pripadajuće aktivnosti	Trajanje (v. j.)	Primedba
I	A-D-H	$\frac{36}{6} + \frac{27}{6} + \frac{36}{6} + \frac{99}{6} = 16,5$	
II	A-D-I-L	$\frac{36}{6} + \frac{27}{6} + \frac{18}{6} + \frac{36}{6} = \frac{117}{6} = 19,5$	Subkritičan druge vrste
III	A-E-F-J-L	$\frac{36}{6} + \frac{15}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} + \frac{36}{6} = \frac{132}{6} = 22$	Kritičan
IV	A-E-F-S ₂ -K-N	$\frac{36}{6} + \frac{15}{6} + \frac{30}{6} + \frac{12}{6} + \frac{21}{6} = \frac{114}{6} = 19$	
V	A-E-F-J-M-N	$\frac{36}{6} + \frac{15}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} + \frac{6}{6} + \frac{21}{6} = \frac{123}{6} = 20,5$	Subkritičan prve vrste
VI	B-F-J-L	$\frac{30}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} + \frac{36}{6} = \frac{111}{6} = 18,5$	
VII	B-F-S ₂ -K-N	$\frac{30}{6} + \frac{30}{6} + \frac{12}{6} + \frac{21}{6} = \frac{93}{6} = 15,5$	
VIII	B-F-J-M-N	$\frac{30}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} + \frac{6}{6} + \frac{21}{6} = \frac{102}{6} = 17$	
IX	C-G-K-N	$\frac{24}{6} + \frac{26}{6} + \frac{12}{6} + \frac{21}{6} = \frac{83}{6} = 13,83$	
X	C-S ₁ -F-J-L	$\frac{24}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} = \frac{36}{6} = 17,5$	
XI	C-S ₁ -F-J-M-N	$\frac{24}{6} + \frac{30}{6} + \frac{15}{6} + \frac{6}{6} + \frac{21}{6} = \frac{96}{6} = 16$	
XII	C-S ₁ -F-S ₂ -K-N	$\frac{24}{6} + \frac{30}{6} + \frac{12}{6} + \frac{21}{6} = \frac{87}{6} = 14,5$	

f) Određivanje verovatnoća nastupanja događaja (P)_i vrši se preko faktora verovatnoće (Z)_i, podrazumevajući da je nastupanje događaja aleatorna promenljiva sa normalnim rasporedom verovatnoće. Faktor verovatnoće određuje se po izrazu

$$(Z)_i = \frac{(T_s)_i - (T_E)_i}{\sqrt{\sum \delta_i^2}}; \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

gde je:

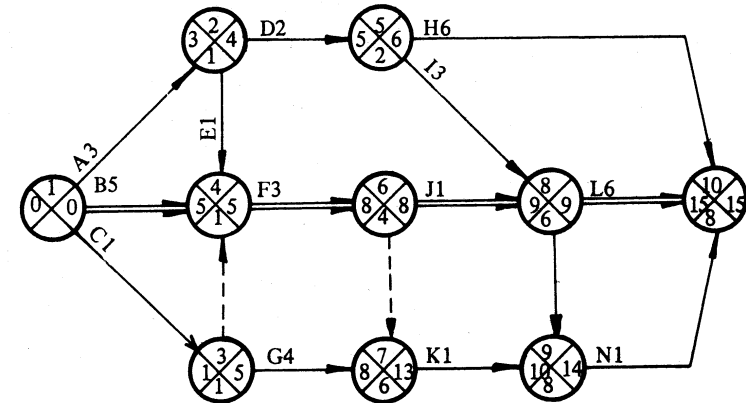
211

(Z)_i – faktor verovatnoće nastupanja događaja i za vreme (T_s)_i;

(T_s)_i – planirano vreme nastupanja događaja i,

(T_E)_i – vreme najranijeg nastupanja događaja i,

δ_i^2 – zbir varijansi svih aktivnosti najdužeg puta od početnog događaja do događaja i.



Slika 3.

Verovatnoća nastupanja događaja se određuje pomoću izraza

$$P(Z)_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \text{za } i = 2, 3, \dots, n,$$

gde je:

$P(Z)_i$ – verovatnoća nastupanja događaja i,

(Z)_i – faktor verovatnoće nastupanja događaja i.

Funkcija $P(Z)$ se najčešće daje u obliku tabličnih vrednosti, pri čemu se uzima $P(Z \leq -3) = 0$, i $P(Z \geq 3) = 1$. Vrednosti ove funkcije su date u tabeli 5.

Određimo prvo verovatnoću da će završni događaj projekta (10) nastupiti posle 15 vremenskih jedinica

$$(Z)_{10-15} = \frac{15 - 22}{\sqrt{\frac{36}{36} + \frac{25}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36} + \frac{16}{36}}} = \frac{-7}{\sqrt{\frac{118}{36}}} = \frac{-7}{\frac{10,86}{6}} = -3,87$$

212

Tabela 5.

Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)	Z	P(Z)
-3,0	0,0013	-1,4	0,0808	0,2	0,5793	1,8	0,9641
-2,9	0,0019	-1,3	0,0968	0,3	0,6179	1,9	0,9713
-2,8	0,0026	-1,2	0,1151	0,4	0,6554	2,0	0,9772
-2,7	0,0035	-1,1	0,1357	0,5	0,6915	2,1	0,9821
-2,6	0,0047	-1,0	0,1587	0,6	0,7257	2,2	0,9861
-2,5	0,0062	-0,9	0,1841	0,7	0,7580	2,3	0,9893
-2,4	0,0082	-0,8	0,2119	0,8	0,7881	2,4	0,9918
-2,3	0,0107	-0,7	0,2420	0,9	0,8159	2,5	0,9938
-2,2	0,0139	-0,6	0,2743	1,0	0,8413	2,6	0,9953
-2,1	0,0179	-0,5	0,3058	1,1	0,8643	2,7	0,9965
-2,0	0,0228	-0,4	0,3446	1,2	0,8849	2,8	0,9974
-1,9	0,0287	-0,3	0,3821	1,3	0,9032	2,9	0,9981
-1,8	0,0359	-0,2	0,4207	1,4	0,9192	3,0	0,9987
-1,7	0,0446	-0,1	0,4602	1,5	0,9332		
-1,6	0,0548	0,0	0,5000	1,6	0,9452		
-1,5	0,0668	0,1	0,5398	1,7	0,9554		

Kako je $(Z)_{10-15} < -3$, to uzimamo $(P)_{10-15} = 0$. Drugim rečima, ne postoje nikakve šanse (ili vrlo, vrlo male su) da će događaj 10 nastupiti u toku 15 vremenskih jedinica.

Odredimo verovatnoću nastupanja završnog događaja projekta do kraja 20. vremenske jedinice.

$$(Z)_{10-20} = \frac{20-22}{\sqrt{\frac{118}{36}}} = \frac{-2}{\frac{10,86}{6}} = -1,1.$$

Iz tabele 5. vidimo da za faktor verovatnoće od $-1,1$ odgovara sledeća verovatnoća nastupanja događaja

$$(P)_{10-20} = 0,1357.$$

Znači, verovatnoća da će događaj 10 nastupiti do kraja 20. vremenske jedinice iznosi 13,57%.

Na kraju odredimo verovatnoću nastupanja završnog događaja projekta do kraja 25. vremenske jedinice

$$(Z)_{10-25} = \frac{25-22}{\sqrt{\frac{118}{36}}} = \frac{3}{\frac{10,86}{6}} = 1,66.$$

Kako u tabeli 5, ne postoji vrednost $P(Z)$ za $Z = 1,66$, to ćemo izvršiti linearnu interpolaciju da bismo za ovu vrednost faktora verovatnoće odredili verovatnoću

$$P(Z = 1,70) = 0,9554$$

$$P(Z = 1,60) = 0,9452.$$

Ovde je $\Delta Z = 0,10$, $\Delta P(Z) = 0,0102$.

$$\text{Za } \Delta Z = 0,06 \text{ imamo } \Delta P(Z) = \frac{0,0102}{0,10} \cdot 0,06 = 0,0061.$$

Otuda je

$$P(Z = 1,66) = P(Z = 1,60) + 0,0061 = 0,9452 + 0,0061 = 0,9513.$$

Otuda, verovatnoća nastupanja završnog događaja do kraja 25. vremenske jedinice iznosi

$$(P)_{10-25} = 0,9513 = 95,13\%.$$

Vidimo, da možemo sa velikom sigurnošću tvrditi da će završni događaj nastupiti, odnosno da će se projekat završiti, do kraja 25. vremenske jedinice.

Verovatnoća nastupanja događaja je značajan činilac kod primene mrežnog planiranja. Ako se investitoru ponudi kratak period izvršenja projekta, na primer kod nas 15 vremenskih jedinica, investitor će nas sigurno angažovati na ovom poslu, ali je skoro sigurno da nećemo posao obaviti na vreme i da ćemo plaćati penale. To nije mudra politika poslovanja za nas. Ako se investitoru ponudi dug period izvršenja projekta, na primer kod nas 25 vremenskih jedinica, onda smo sigurni da ćemo ponudu ispuniti, ali tada će investitor angažovati ponuđača sa kraćim periodom izvršenja projekta. Ovo, takođe, nije mudra politika poslovanja za nas. Zato treba tražiti treće rešenje. Ponuditi period izvršenja projekta, čija će se verovatnoća izvršenja kretati u granicama od (70-90)%. Kolike će ove granice biti, zavisi od prirode posla i od ponuđača, pa i tome treba posvetiti odgovarajuću pažnju.

g) Direktni troškovi projekta pri normalnom i usiljenom vremenu izvršenja aktivnosti, dobiju se sabiranjem direktnih troškova za pojedine aktivnosti. Tako u tabeli 2. troškovi projekta za normalno vreme izvršenja aktivnosti dobijeni su sabiranjem kolone za C_n i oni iznose 2240 novčanih jedinica. Na isti način, sabiranjem kolone za C_u dobijaju se direktni troškovi projekta za usiljeno vreme izvršenja aktivnosti, koji iznose 3355 novčanih jedinica. Smatraćemo da je

priraštaj direktnih troškova linearan pri smanjenju vremena izvršenja aktivnosti od normalnog do usiljenog, te ćemo priraštaj direktnih troškova po jedinici vremena skraćivanja odrediti po izrazu

$$(\Delta C)_{ij} = \left| \frac{(C_n)_{ij} - (C_u)_{ij}}{(t_n)_{ij} - (t_u)_{ij}} \right| \left(\frac{n.j.}{v.j.} \right),$$

gde je:

- $(\Delta C)_{ij}$ – jedinični priraštaj direktnih troškova za aktivnost (i–j);
- $(C_n)_{ij}$ – direktni troškovi za normalno izvršenje aktivnosti (i–j);
- $(C_u)_{ij}$ – direktni troškovi za usiljeno izvršenje aktivnosti (i–j);
- $(t_n)_{ij}$ – vreme normalnog izvršenja aktivnosti (i–j);
- $(t_u)_{ij}$ – vreme usiljenog izvršenja aktivnosti (i–j).

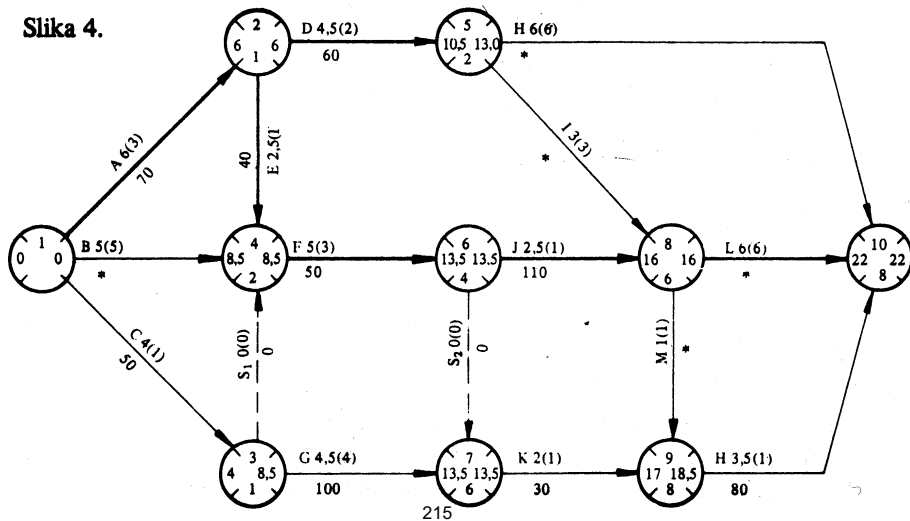
Jedinični priraštaj troškova je određen za sve aktivnosti i dat u tabeli 2.

Primenićemo iterativni postupak da bismo odredili optimalne troškove projekta za dato vreme izvršenja. Dužina kritičnog puta pri normalnom vremenu izvršenja je $T_n = 22$ v.j., a pri usiljenom vremenu izvršenja je $T_u = 15$ v.j. Znači treba odrediti optimalne troškove projekta za vreme izvršenja od

$$\frac{T_n + T_u}{2} = \frac{22 + 15}{2} = 18,5 \text{ v.j.}$$

Pri određivanju optimalnih troškova korišćićemo se mrežnim dijagramom datim na slici 4. Sa leve strane aktivnosti naneto je: oznaka, vreme normalnog izvršenja i (u malim zagradama) vreme usiljenog izvršenja, a sa desne strane naneti su jedinični troškovi. Kritični put je označen punim linijama.

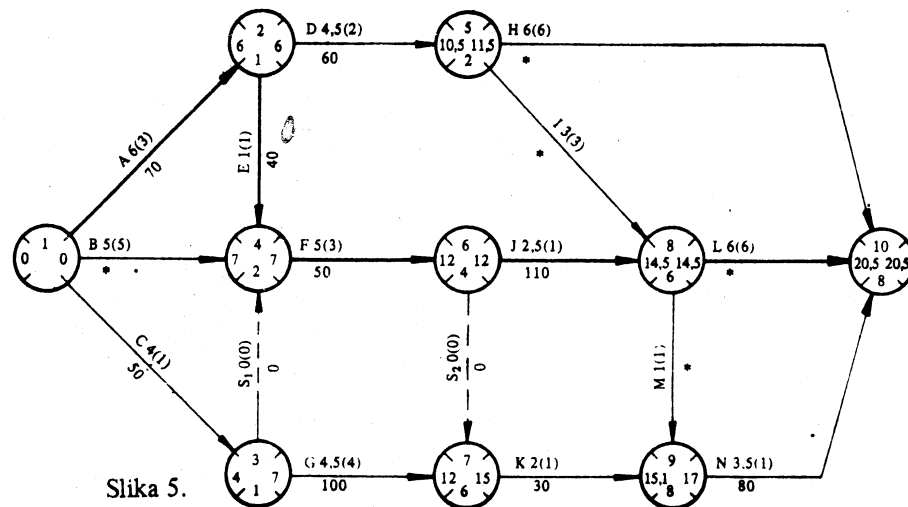
Slika 4.



Da bi se skratilo vreme izvršenja projekta, mora se skratiti vreme izvršenja kritičnog puta, ali ovo skraćivanje može se vršiti samo do pojave novog kritičnog puta, ili do vremena usiljenog izvršenja aktivnosti koje se skraćuju. Prvo skraćujemo aktivnost kod koje su jedinični direktni troškovi najniži. U našem primeru je to aktivnost E. Nju možemo skratiti do njenog vremena usiljenog izvršenja, jer se ona nalazi i na subkritičnom putu prve vrste, a on je kraći od kritičnog za 1,5 v.j. Znači u ovoj prvoj iteraciji imamo skraćivanje vremena $\Delta t_1 = 1,5$ v.j, tj. aktivnost E skraćujemo sa 2,5 v.j. na 1 v.j. To daje:

- vreme izvršenja projekta $T_1 = T_n - \Delta t_1 = 22 - 1,5 = 20,5$ v.j.
- direktni troškovi projekta $C_1 = C_n + \Delta t_1 \cdot \Delta C_E = 2240 + 1,5 \cdot 40 = 2300$ n.j.

Stanje posle prve iteracije skraćivanja vremena izvršenja projekta predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 5.

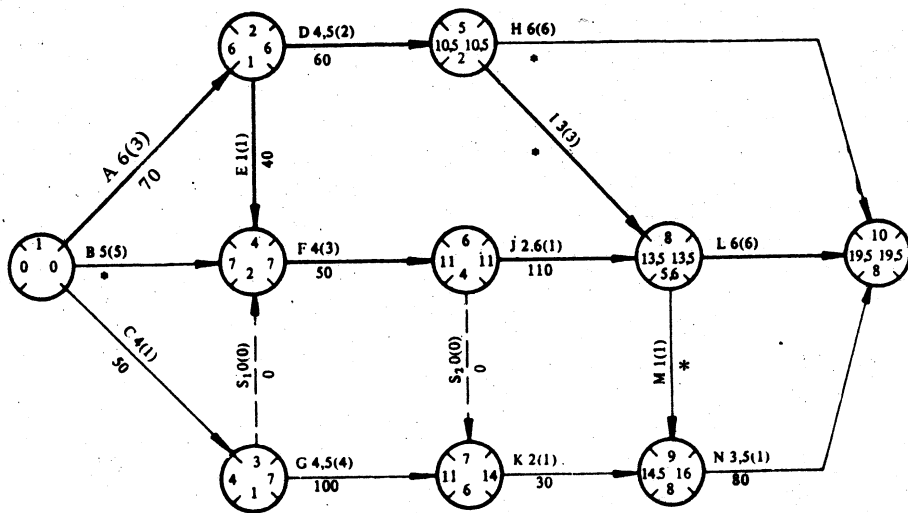


Slika 5.

U drugoj iteraciji skraćujemo aktivnost F jer su njeni jedinični troškovi $50 \frac{n.j.}{v.j.}$. Aktivnost F bi mogli skratiti za 2 v.j. do njenog usiljenog vremena izvršenja, ali ne možemo, zbog toga što bi tada najranije vreme nastupanja događaja 8 bilo 12,5 v.j. preko aktivnosti J, a 13,5 v.j. preko aktivnosti I. Drugim rečima, subkritični put druge vrste bi ranije postao kritičan, odnosno on dozvoljava da se aktivnost F skрати samo za 1 v.j. Znači u drugoj iteraciji skraćujemo aktivnost F sa 5 v.j. na 4 v.j. To daje:

- vreme izvršenja projekta $T_2 = T_1 - \Delta t_2 = 20,5 - 1 = 19,5$ v.j.
- direktni troškovi projekta $C_2 = C_1 + \Delta t_2 \cdot \Delta C_F = 2300 + 1 \cdot 50 = 2350$ n.j.

Stanje posle druge iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 6.



Slika 6.

Posle druge iteracije pojavio se novi kritični put A–D–I–L. To je prvobitno određeni subkritični put druge vrste. Subkritični put prve vrste nije postao još kritičan, jer skraćujući aktivnosti E i F skraćivali smo i njega.

U trećoj iteraciji moramo za isti iznos skratiti oba kritična puta. Kako je aktivnost A sastavni element oba kritična puta, a jedinični troškovi su joj niži od zbira jediničnih troškova aktivnosti D i F, to ćemo u ovoj iteraciji nju skraćivati. Do njenog vremena usiljenog izvršenja mogli bi je skratiti za 3 v.j. Međutim, aktivnost B dozvoljava da skraćenje bude samo 2 vremenske jedinice. Nama je još potrebno samo skraćenje od 1 vremenske jedinice, pa da postignemo traženu vrednost vremena izvršenja projekta od 18,5 vremenskih jedinica. Znači u ovoj iteraciji skraćujemo aktivnost A sa 6 na 5 vremenskih jedinica, odnosno imamo $\Delta t_3 = 1$ v.j. što daje:

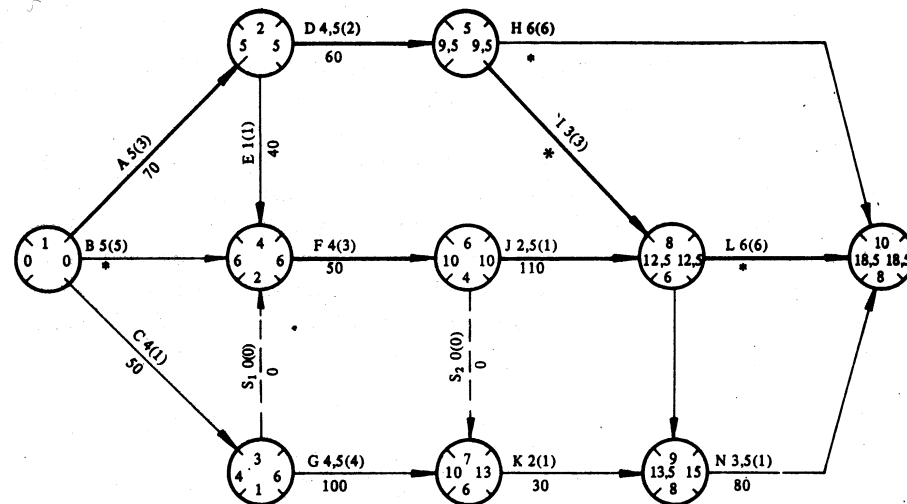
- vreme izvršenja projekta $T_3 = T_2 - \Delta t_3 = 19,5 - 1 = 18,5$ v.j.
- direktni troškovi projekta $C_3 = C_2 + \Delta t_3 \cdot \Delta C_A = 2350 + 1 \cdot 70 = 2420$ n.j.

Stanje posle treće iteracije predstavljeno je mrežnim dijagramom na slici 7.

Iznalaženje optimalnih (minimalnih) direktnih troškova za dato vreme izvršenja projekta možemo predstaviti i tabelarno kao što je u tabeli 5.

U tabeli 5. kritičan put je obeležen oznakom K, subkritičan prve vrste oznakom SK1 i subkritičan druge vrste oznakom SK2. Simbolično pisanje ispod iteracija, na primer E : 2,5 → 1 v.j, znači da je u prvoj iteraciji vreme izvršenja aktivnosti E skraćeno sa 2,5 na 1 vremensku jedinicu. Ispod broja iteracije su dati

direktni troškovi projekta posle te iteracije. Vreme izvršenja pojedinih puteva posle određene iteracije dato je u koloni ispod broja te iteracije.



Slika 7.

Tabela 5

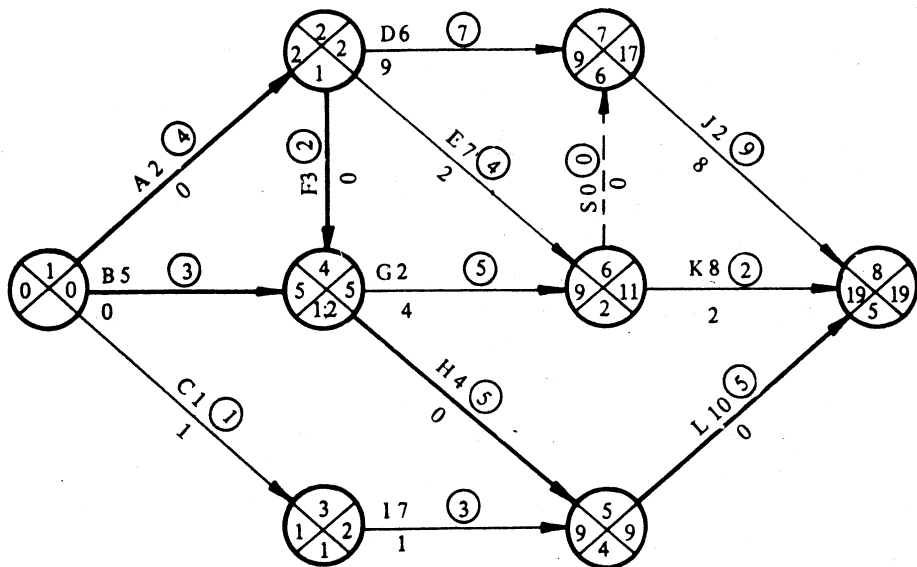
Redni broj puta	Sastav puta	Vreme trajanja puta		I t e r a c i j e		
		normalno (v. j.)	usijano (v. j.)	1. E:2,5→1 C ₁ = 2300	2. F:5→4 C ₂ = 2350	3. A:6→5 C ₃ = 2420
I	A–D–H	16,5	11,0	16,6	16,5	15,5
II	A–D–I–L	19,5SK2	14,0	19,5SK1	19,5K	18,5K
III	A–E–F–J–L	22,0K	14,0	20,5K	19,5K	18,5K
VI	A–E–F–S ₂ –K	19,0	9,0	17,5	16,5	15,5
V	A–E–F–J–M–N	20,5SK1	10,0	19,0	18,0SK1	17,0SK2
VI	B–F–J–L	18,5	15,0K	18,5	17,5SK2	17,5SK1
VII	B–F–S ₂ –K–N	15,5	10,0	15,5	14,5	14,5
VIII	B–F–J–M–N	17,0	11,0	17,0	16,0	16,0
IX	C–G–K–N	13,8	7,0	13,8	13,8	13,8
X	C–S ₁ –F–J–L	17,5	11,0	17,5	16,5	16,5
XI	C–S ₁ –F–J–M–N	16,0	7,0	16,0	15,0	15,0
XII	C–S ₁ –S–S ₂ –K–N	14,5	6,0	14,5	13,5	13,5

Znači, optimalni (minimalni) troškovi izvršenja projekta za 18,5 vremenskih jedinica iznose 2420 novčanih jedinica.

7.5. RASPODELA RESURSA

9. Zadatak

Projekat čiji je mrežni dijagram, sa izvršenom analizom vremena, dat na slici 1. treba izvršiti sa raspoloživom radnom snagom od 14 radnika. Svaki radnik može biti angažovan na svakoj aktivnosti. Na mrežnom dijagramu su naneseni podaci, sa leve strane aktivnosti: oznaka aktivnosti, trajanje aktivnosti i (u kružićima) intenzitet radne snage za datu aktivnost (r_{ij}), tj. broj radnika koji treba da rade na aktivnosti da bi bila izvršena u navedenom vremenu (t_{ij}) sa desne strane svake aktivnosti je nanesena njena ukupna vremenska rezerva (St) ij. Projekat ima dva kritična puta. Poštujući tehnološku uslovljenost pojedinih aktivnosti, odrediti vremena njihovih početaka, koja obezbeđuju obavljanje projekta u najkraćem roku sa raspoloživom radnom snagom.

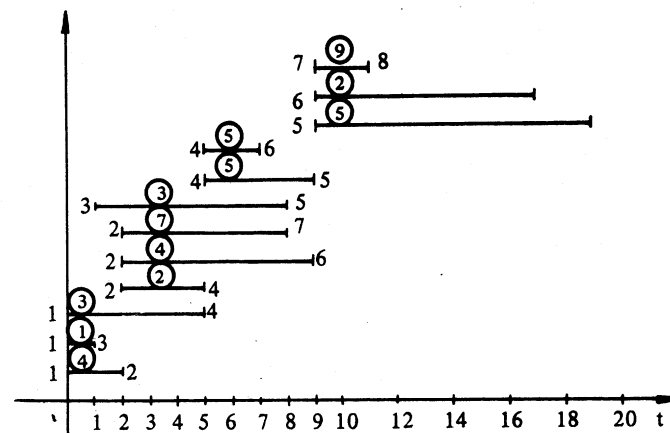


Slika 1.

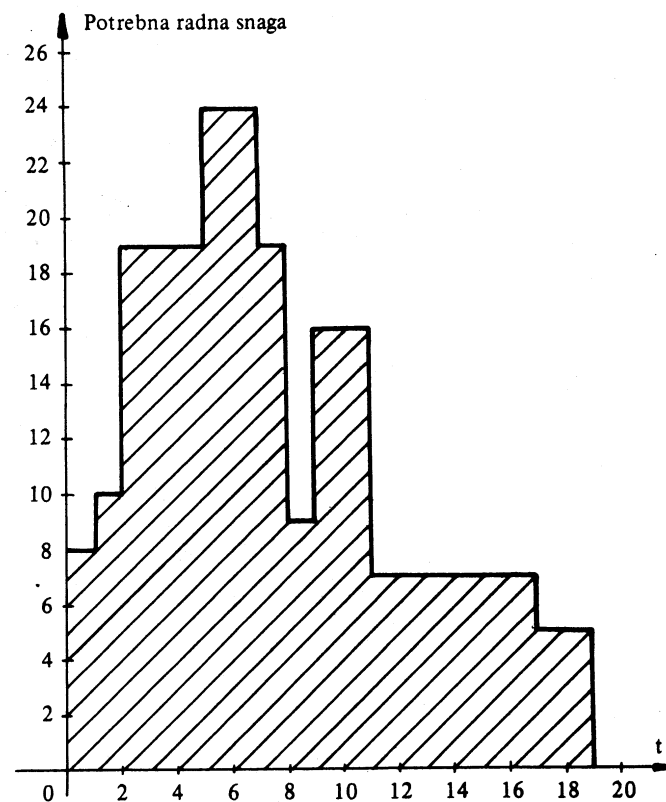
Rešenje. Problem se sastoji u iznalaženju optimalne raspodele jednog resursa (radne snage) da bi se projekat obavio u najkraćem mogućem vremenskom intervalu. Za rešenje ovog problema koristiće se Grey-Kidd-ov algoritam ¹⁾.

Polazi se od određivanja linijskog dijagrama (Gantograma) projekta i grafičkog prikaza potrebne radne snage (resursa) u pojedinim vremenskim intervalima, kao što je predstavljeno na slici 2a i 2b.

Dijagram potrebnog resursa (slika 2b) ukazuje da je za izvršenje projekta, prema vremenskoj analizi, potrebno najviše 24 radnika u vremenskom intervalu od dve (6. i 7.) vremenske jedinice (v.j.). U trećoj, četvrtoj, petoj i osmoj v.j. potrebno je 19, a u desetoj i jedanaestoj 16 radnika. To ukazuje da je nemoguće



Slika 2a.



Slika 2b.

1) Teorijsko obrazloženje ovog algoritma videti u knjizi: J.J. Petrić, OPERACIONA ISTRAŽIVANJA II, Savremena administracija, 1976, Beograd.

obaviti projekat sa raspoloživom radnom snagom u terminu koji je dobijen vremenskom analizom. (Vremenska analiza se obavlja pod pretpostavkom da će se u svakom vremenskom intervalu raspolagati potrebnom količinom resursa). Međutim, postoji dosta vremenskih intervala (u našem primeru) u kojima postoji višak resursa. Potrebe resursa su: 8 radnika u 1. v.j., 10 radnika u 2. v.j., 9 radnika u 9. v.j., 7 radnika u 12., 13., 14., 15., 16. i 17. v.j. i samo 5 radnika u 18. i 19. v.j. Drugim rečima, za ovakvo obavljanje projekta trebalo bi angažovati još

$$(24 - 14) \cdot 2 + (19 - 14) \cdot 4 + (16 - 14) \cdot 2 = 44 \text{ radnik} \cdot (\text{v.j.}).$$

Takođe bi trebalo obezbediti posao u iznosu

$$(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 9) \cdot 1 + (14 - 7) \cdot 6 + (14 - 5) \cdot 2 = 76 \text{ radnik} \cdot (\text{v.j.}).$$

Kako bi trebalo u tačno određenim vremenskim intervalima nalaziti nedostajuću radnu snagu i posao za suvišnu, nije teško zaključiti da je ovakva organizacija izvršenja projekta teška. Zbog toga pristupamo određivanju vremena za koje se može obaviti projekat sa raspoloživom radnom snagom. Pri primeni Grey-Kidd-ovog algoritma prednost će imati aktivnosti sa manjom ukupnom vremenskom rezervom i većim intenzitetom resursa r_{ij} . Aktivnosti jednom započete ne mogu se prekidati. Postupak ćemo sprovesti po etapama.

1. etapa. Prvi vremenski interval u kome nema promene u odvijanju aktivnosti, odnosno u radnoj snazi je $[0;1]$, jer toliko traje aktivnost (1-3). U ovom intervalu se odvijaju aktivnosti (1-2), (1-3) i (1-4). Na osnovu ukupne vremenske rezerve određuje se redosled prvenstva odvijanja aktivnosti. Ustanovljava se potreban resurs za obavljanje aktivnosti u datom intervalu. Ukoliko potrebni resursi premašuju raspoložive, vrši se pomeranje početka aktivnosti koje su poslednje po redosledu prvenstva. Izloženo je, radi bolje preglednosti, podesno predstaviti tabelarno.

[0:1] Tabela 1

Pripadajuća aktivnost (i-j)	(1-2)	(1-3)	(1-4)	Ukupno
Ukupna vremenska rezerva $(S_t)_{ij}$	0	1	0	
Intenzitet resursa r_{ij}	4	1	3	8
Redosled prvenstava (R.P.)	1	3	2	
Angažovani resurs (A.R.)	4	1	3	8

Pošto je za istovremeno obavljanje tri navedene aktivnosti potrebno 8 radnika, ne treba odlagati početak odvijanja nijedne od ovih aktivnosti u prvom vremenskom periodu.

Mada su aktivnosti (1-2) i (1-4) imale istu ukupnu vremensku rezervu 0 (kritične su), kod rangiranja redosleda obavljanja dali smo prednost aktivnosti (1-2), zbog toga što je njen intenzitet resursa 4, a intenzitet resursa aktivnosti (1-4) je 3. Smatrali smo da će se lakše uklopiti kasnije aktivnost za čije je obavljanje potrebno manje resursa. Znači, u ovom intervalu će se obavljati aktivnosti (1-2), (1-3) i (1-4), a biće angažovano 8 radnika.

2. etapa. Razmatra se vremenski interval $[1;2]$, jer u njemu počinje aktivnost (3-5), a završava se aktivnost (1-2). U ovom intervalu odvijaju se aktivnosti (1-2), (1-4) i (3-5). One poseduju svojstva, značajna za analizu resursa, predstavljena tabelom 2.

[1:2] Tabela 2.

(i-j)	(1-2)	(1-4)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	1	
r_{ij}	4	3	3	10
R.P.	1	2	3	
A.R.	4	3	3	10

Potrebno je 10 radnika, pa se sve aktivnosti ovoga intervala odvijaju bez odlaganja:

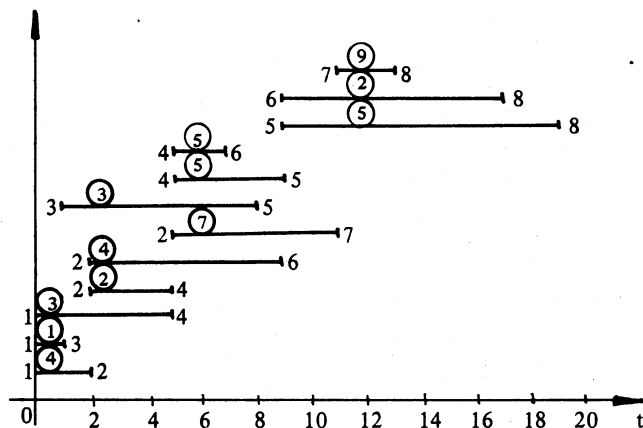
3. etapa. Razmatra se vremenski interval $[2;5]$. U njemu se odvijaju aktivnosti (1-4), (2-4), (2-6), (2-7) i (3-5). Svojstva su im predstavljena tabelom 3.

[2:5] Tabela 3.

(i-j)	(1-4)	(2-4)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	2	9	1	
r_{ij}	3	2	4	7	3	19
R.P.	1	3	4	5	2	
A.R.	3	2	4	0	3	12

Kod određivanja redosleda prvenstva rukovodili smo se sledećim. Aktivnost (1-4) je ranije započeta i kritična je, te je dobila prvo mesto. Aktivnost (3-5) je

na drugom mestu, mada ima veću ukupnu vremensku rezervu od aktivnosti (2-4), jer je ranije započeta, a usvojili smo da se ne mogu prekidati započete aktivnosti. Kako nemamo 19 radnika, početak aktivnosti (2-7) moramo odložiti do kraja ovog vremenskog intervala, odnosno sada ćemo smatrati da aktivnost (2-7) može početi tek po isteku pet vremenskih jedinica. Ovo pomeranje uslovljava najranije nastupanje događaja 7 posle 11. v.j. Sada su vremenske rezerve $(S_t)_{(2-7)} = 6$ v.j., $(S_t)_{(7-8)} = 6$ v.j. Stanje posle ove etape prikazano je linijskim dijagramom na slici 3.



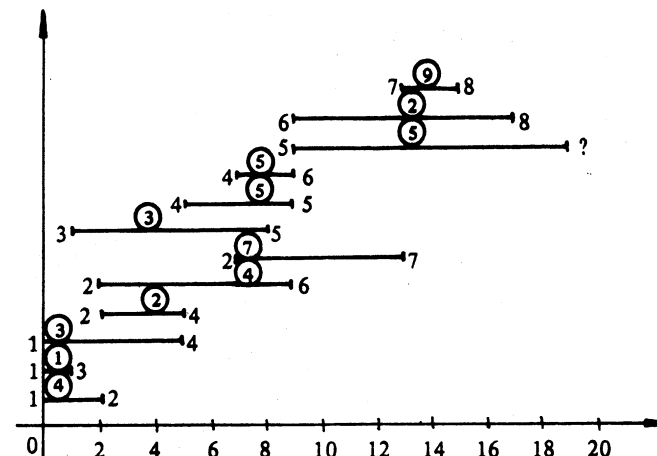
Slika 3.

4. etapa. Razmatra se vremenski interval [5;7]. U njemu se odvijaju aktivnosti (2-6), (2-7), (3-5) i (4-6), čija su svojstva data tabelom 4.

[5;7]	Tabela 4.					
(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	6	1	0	4	
r_{ij}	4	7	3	5	5	24
R.P.	2	5	1	3	4	
A.R.	4	0	3	5	0	12

Kod određivanja redosleda prvenstva prvo smo razmatrali ranije započete aktivnosti (2-6) i (3-5), a potom ostale aktivnosti poređali prema vrednosti ukupne vremenske rezerve. Pošto je potrebno 24 radnika za istovremeno obavljanje svih pet aktivnosti, prinuđeni smo da početak aktivnosti (2-7) i (4-6) pomerimo do isteka razmatranog vremenskog intervala. Znači, ove aktivnosti će početi po isteku 7 v.j. Ovo pomeranje je uslovljavalo najranije nastupanje događaja 7 posle 13. v.j. Vremenske rezerve su: $(S_t)_{(2-7)} = 4$ v.j., $(S_t)_{(7-8)} = 4$ v.j.,

$(S_t)_{(4-6)} = 2$ v.j. Stanje posle ove etape je predstavljeno linijskim dijagramom na slici 4.

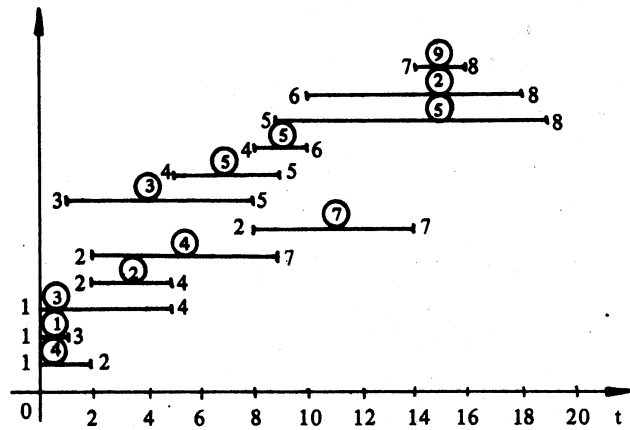


Slika 4.

5. etapa. Razmatra se vremenski interval [7;8]. U njemu se odvijaju aktivnosti (2-6), (2-7), (3-5), (4-5) i (4-6). Svojstva ovih aktivnosti su data u tabeli 5.

[7;8]	Tabela 5.					
(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	4	1	0	2	
r_{ij}	4	7	3	5	5	24
R.P.	3	5	2	1	4	
A.P.	4	0	3	5	0	12

Pri određivanju redosleda prvenstva prvo smo razmatrali ranije započete aktivnosti (2-6), (3-5) i (4-5), a potom aktivnosti (2-7) i (4-6). Opet zaključujemo da se mora odložiti početak aktivnosti (2-7) i (4-6) do isteka 8 v.j. Tada će aktivnosti (2-7) i (7-8) imati ukupnu vremensku rezervu od 3 v.j., a aktivnost (4-6) od 1 v.j. Događaj 7 može najranije nastupiti posle 14. v.i., a događaj 6 posle 10. v.j. Stanje posle ovoga pomeranja predstavljeno je slikom 5.

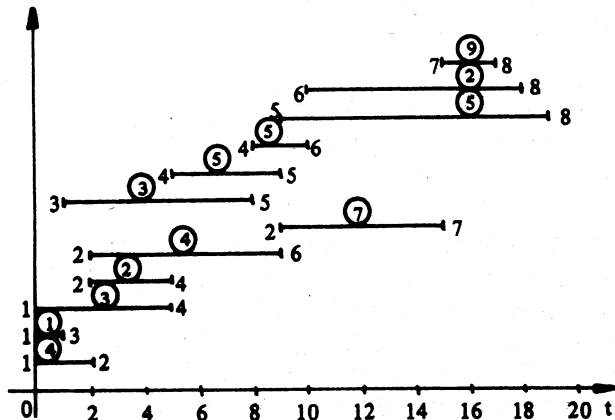


Slika 5.

6. etapa. Razmatra se vremenski interval [8;9], sa aktivnostima (2-6), (2-7), (4-5) i (4-6), čije su karakteristike predstavljene tabelom 6.

[8;9]		Tabela 6			
(i-j)	(2-6)	(2-7)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	3	0	1	
r_{ij}	4	7	5	5	21
R.P.	2	4	1	3	
A.R.	4	0	5	5	14

Konstatujemo da se mora odložiti početak aktivnosti (2-7) do isteka 9 v.j. Ovo uslovljava najranije nastupanje događaja 7 posle 15 v.j., odnosno $(S_t)_{(2-7)} = 2$ v.j. i $(S_t)_{(7-8)} = 2$ v.j. Stanje posle ove etape je prikazano linijskim dijagramom na slici 6.

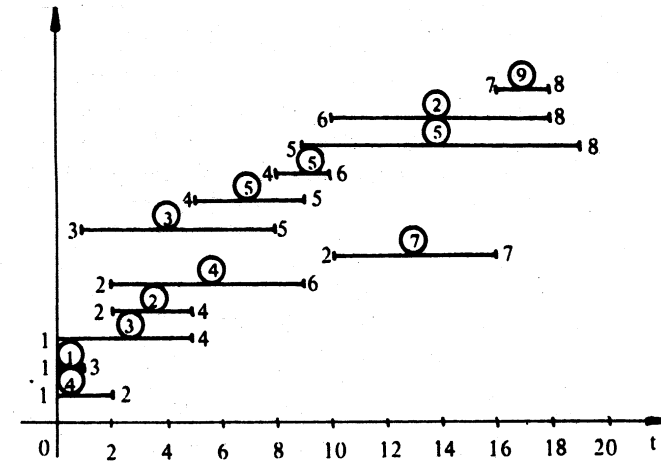


Slika 6.

7. etapa. Razmatra se vremenski interval [9;10] sa aktivnostima (2-7), (4-6) i (5-8), čije su karakteristike date u tabeli 7.

[9;10]		Tabela 7.		
(i-j)	(2-7)	(4-6)	(5-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	1	0	
r_{ij}	7	5	5	17
R.P.	3	1	2	
A.R.	0	5	5	10

Kod određivanja redosleda prvenstva aktivnosti (4-6) smo dodelili prvo mesto, zbog toga što je ranije započeta. I u ovoj etapi dolazi do pmeranja početka aktivnosti (2-7) za još jednu vremensku jedinicu, te se za toliko smanjuje njena ukupna vremenska rezerva, kao i aktivnosti (7-8), jer je sada najranije nastupanje događaja 7 posle 16. v.j. Stanje posle ove etape je prikazano linijskim dijagramom na slici 7.



Slika 7.

8. etapa. Razmatra se vremenski interval [10;16] u kome se odvijaju aktivnosti (2-7), (5-8) i (6-8), čije su karakteristike date tabelom 8.

[10; 16]

Tabela 8.

(i-j)	(2-7)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	1	
r_{ij}	7	5	2	14
R.P.	2	1	3	
A.R.	7	5	2	14

Karakteristika ove etape je da je potrebno 14 radnika, te neće doći do odlaganja izvršenja aktivnosti.

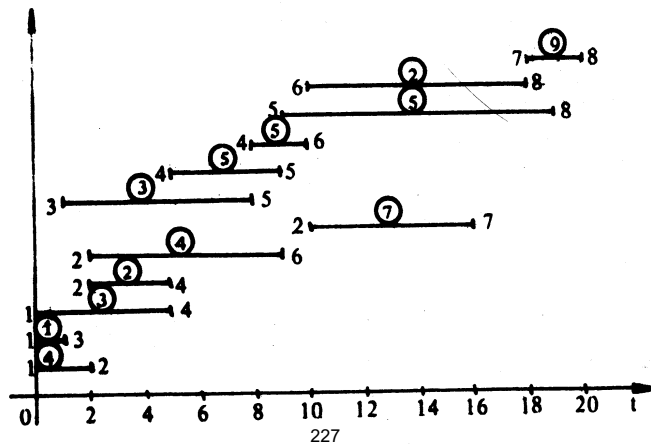
9. etapa. Razmatra se vremenski interval [16;18] u kome se odvijaju aktivnosti (5-8), (6-8) i (7-8), čije su karakteristike date tabelom 9.

[16;18]

Tabela 9.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	1	1	
r_{ij}	5	2	9	16
R.P.	1	2	3	
A.R.	5	2	0	7

Držeći se principa, da se ne prekidaju započete aktivnosti, morali smo pomeriti početak aktivnosti (7-8) do isteka 18. v.j. iako smo svesni da nam to produžuje trajanje projekta do 20 v.j. i da u ovom vremenskom intervalu angažujemo 7 radnika. Sada je $(S_t)_{(7-8)} = -1$ v.j., što samo ukazuje da se izvršenje projekta produžava za 1 v.j. u odnosu na prvobitno određeno vreme $T_n = 19$ v.j. Stanje posle ovoga pomeranja predstavljeno je slikom 8.



Slika 8.

10 etapa. Razmatra se vremenski interval [18;19] sa aktivnostima (5-8) i (7-8), čije su karakteristike date u tabeli 10.

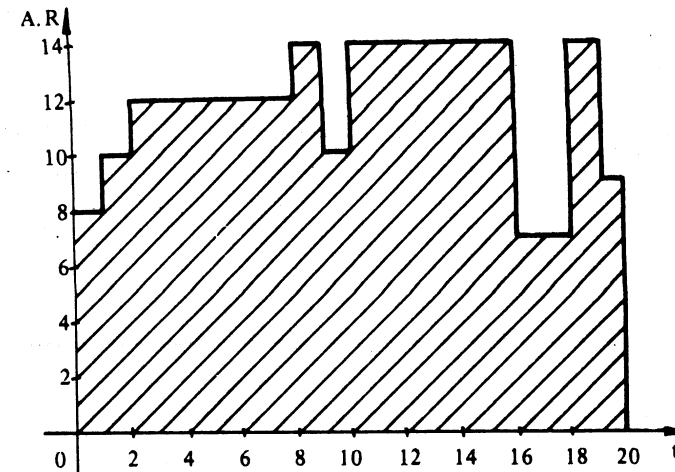
[18;19]

Tabela 10.

(i-j)	(5-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	
r_{ij}	5	9	14
R.P.	1	2	
A.R.	5	9	14

U ovoj etapi ne dolazi do odlaganja izvršenja aktivnosti.

11. etapa Razmatra se vremenski interval [19;20], u kome se odvija samo aktivnost (7-8). Kako je za njeno obavljanje potrebno 9 radnika, to će ona biti i obavljena u ovom periodu.



Slika 9.

Na slici 9. je grafički prikazana angažovanost radne snage u vremenskom periodu. [0;20]. Raspoloživo je sa $14 \cdot 20 = 280$ radnik \cdot (v.j.), a neiskorišćeno je : $(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 12) \cdot 6 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 7) \cdot 2 + (14 - 9) \cdot 1 = 45$ radnik \cdot (v.j.). Znači, neiskorišćenost resursa iznosi $(45 : 280) \cdot 100 = 16,07\%$. Ukoliko ne smatramo da su neiskorišćeni radnici koji nisu angažovani u 20. v.j., jer se mogu blagovremeno uputiti na drugi posao, onda neiskorišćenost resursa iznosi $(40 : 280) \cdot 100 = 14,2\%$.

10. Zadatak

Rešiti problem tretiran u 9. zadatku sa jedinom izmenom, da se mogu prekidati započete aktivnosti.

Rešenje. Za rešavanje ovoga zadatka koristićemo takođe Grey-Kidd-ov algoritam. Rešenje ćemo dati u vidu tabela sa neophodnim komentarom koji će se odnositi samo na razlike u odnosu na prethodni zadatak.

Mrežni dijagram, linijski dijagram, dijagram potrebnog resursa i prve dve etape analize resursa su isti kao u 9. zadatku.

3. etapa

[2; 5]

Tabela 11.

li-j)	(1-4)	(2-4)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	2	9	1	
r_{ij}	3	2	4	7	3	19
R.P.	1	2	4	5	3	
A.R.	3	2	4	0	3	12

Pomera se početak aktivnosti (2-7) do kraja 5. v.j. (kao i u 9. zadatku). Ovo uslovljava: $t_7^{(0)} = 11$ v.i., $(S_t)_{(2-7)} = 6$ v.j., $(S_t)_{(7-8)} = 6$ v.j., odgovara slika 3. u 9. zadatku.

4. etapa

[5;7]

Tabela 12.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	6	1	0	4	
r_{ij}	4	7	3	5	5	24
R.P.	3	5	2	1	4	
A.R.	4	0	3	5	0	12

Pomera se početak aktivnosti (2-7) i (4-6) do kraja 7. v.j. Ovo uslovljava: $t_7^{(0)} = 13$ v.j., $t_6^{(0)} = 9$ v.j. (ne menja se), $(S_t)_{(2-7)} = 4$ v.j., $(S_t)_{(7-8)} = 4$ v.j., $(S_t)_{(4-6)} = 2$ v.j. Stanje je predstavljeno slikom 4. u 9. zadatku.

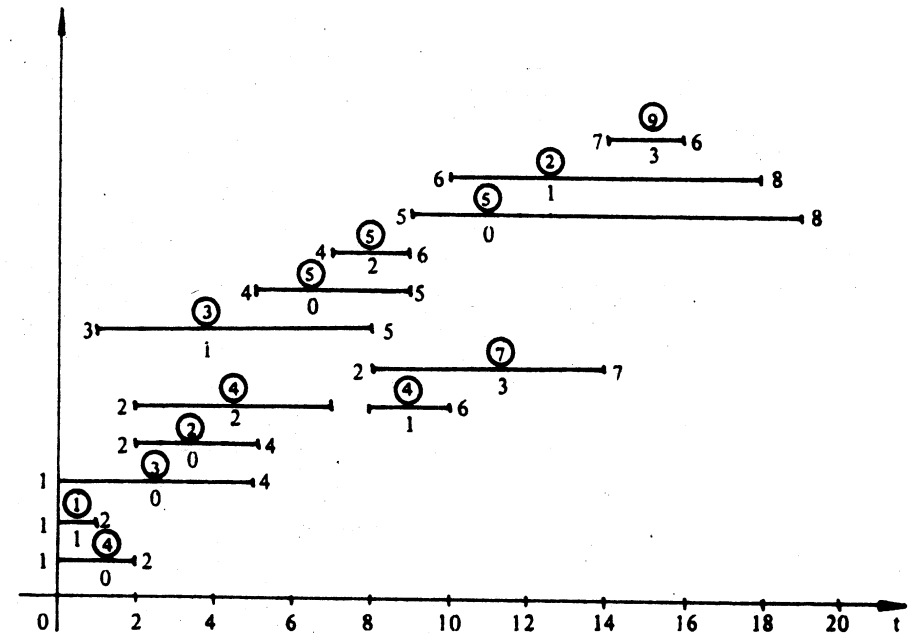
5. etapa

[7; 8]

Tabela 13.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(3-5)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	2	4	1	0	2	
r_{ij}	4	7	3	5	5	24
R.P.	4	5	2	1	3	
A.R.	0	0	3	5	5	13

Odlaze se izvršenje aktivnosti (2-7) i dela aktivnosti (2-6) do kraja 8. v.j. Ovo uslovljava: $t_6^{(0)} = 10$ v.j., $t_7^{(0)} = 14$ v.j., $(S_t)_{(2-6)} = 1$ v.j., $(S_t)_{(2-7)} = 3$ v.j., $(S_t)_{(6-8)} = 1$ v.j., $(S_t)_{(7-8)} = 3$ v.j. Vremenska rezerva $(S_t)_{(2-6)}$ odnosi se na deo ove aktivnosti čije je izvršenje odgođeno. Stanje posle ove etape dato je na slici 10.



Slika 10.

6. etapa

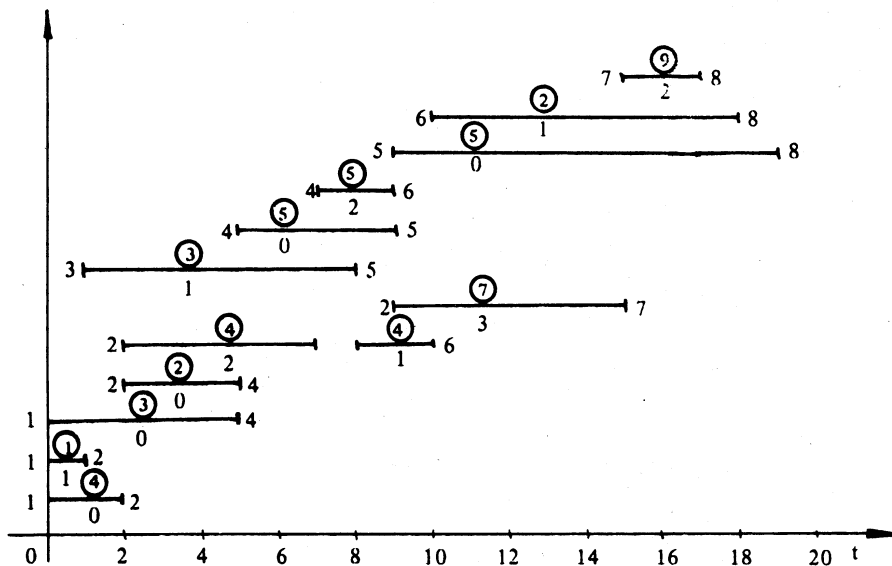
[8; 9]

Tabela 14.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(4-5)	(4-6)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	3	0	2	
r_{ij}	4	7	5	5	21
R.P.	2	4	1	3	
A.R.	4	0	5	5	14

Odlaze se početak aktivnosti (2-7) do kraja 9. v.j. Ovo uslovljava:

$t_7^{(0)} = 15$ v.j., $(S_{ts})_{(2-7)} = (S_t)_{(7-8)} = 2$ v.j. Stanje je dato slikom 11.



Slika 11.

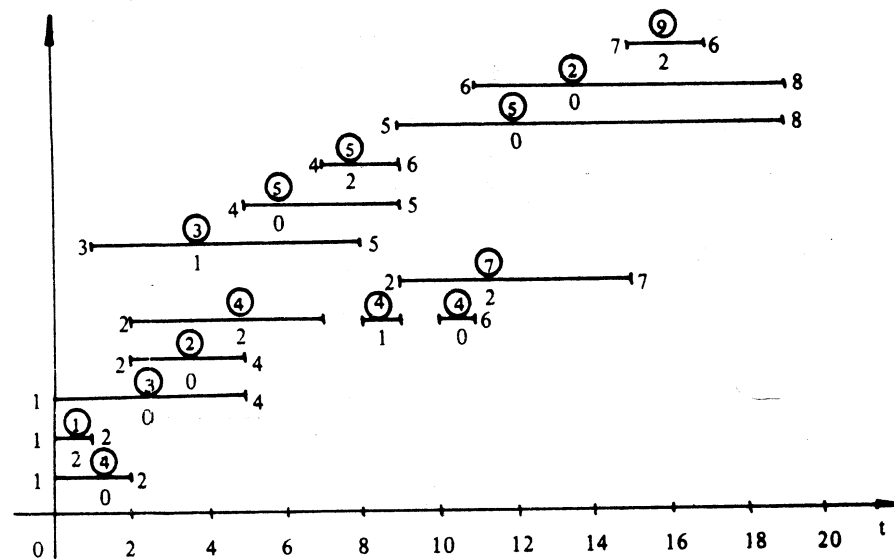
7. etapa

[9; 10]

Tabela 15.

(i-j)	(2-6)	(2-7)	(5-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	2	0	
r_{ij}	4	7	5	16
R.P.	2	3	1	
A.R.	0	7	5	12

Pomera se izvršenje dela aktivnosti (2-6) do kraja 10. v.j. Ovo je uslovlilo: $t_6^{(0)} = 11$ v.j., $(S_t)_{(2-6)} = (S_t)_{(6-8)} = 0$. Stanje je dato slikom 12.



Slika 12.

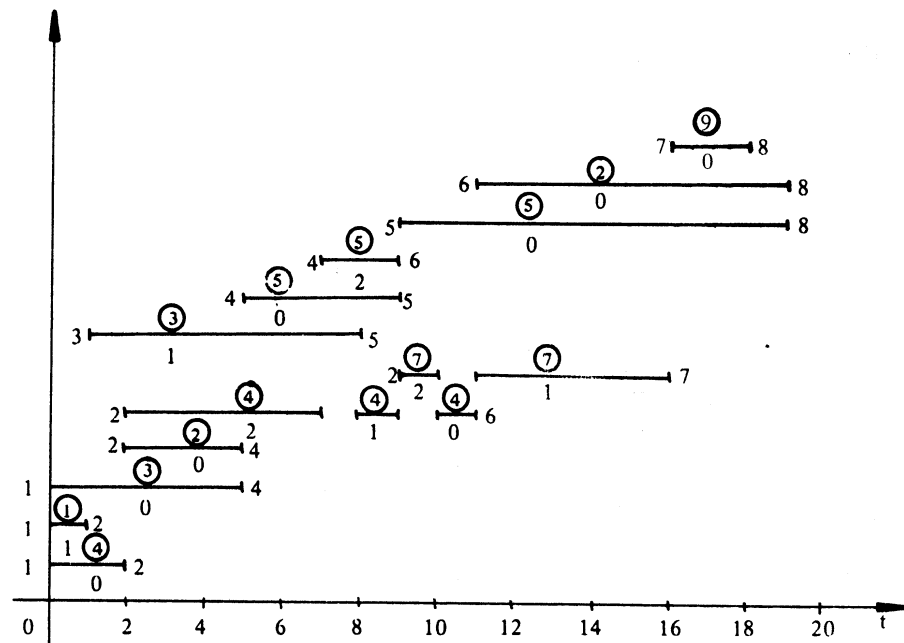
8. etapa

[10; 11]

Tabela 16.

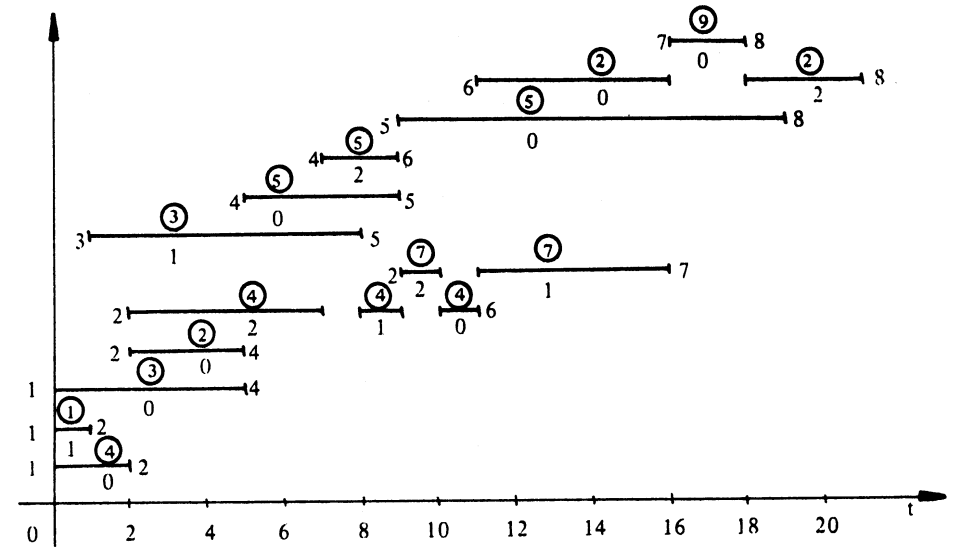
(i-j)	(2-6)	(2-7)	(5-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	2	0	
r_{ij}	4	7	5	16
R.P.	1	3	2	
A.R.	4	0	5	9

Pomera se izvršenje dela aktivnosti (2-7) do kraja 11. v.j. Ovo uslovljava $t_7^{(0)} = 16$ v.j., $(S_t)_{(2-7)} = (S_t)_{(7-8)} = 1$ v.j. Stanje je dato slikom 13.



Slika 13.

Smatrajući da je najpodesnije odložiti izvršenje aktivnosti sa najmanjim intenzitetom resursa, to je urađeno sa delom aktivnosti (6–8). Ovo je uslovilo: $t_8(0) = 21$ v.j., $(S_t)_{(6-8)} = -2$ v.j. Ovo znači da će izvršenje projekta kasniti 2 v.j. u odnosu na ranije proračunato vreme. Stanje je dato slikom 14.



Slika 14

9. etapa

[11; 16]

Tabela 17.

(i-j)	(2-7)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	1	0	0	
r_{ij}	7	5	2	14
R.P.	3	1	2	
A.R.	7	5	2	14

10. etapa

[16; 18]

Tabela 18.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	(7-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	0	0	
r_{ij}	5	2	9	16
R.P.	2	3	1	
A.R.	5	0	9	14

11. etapa

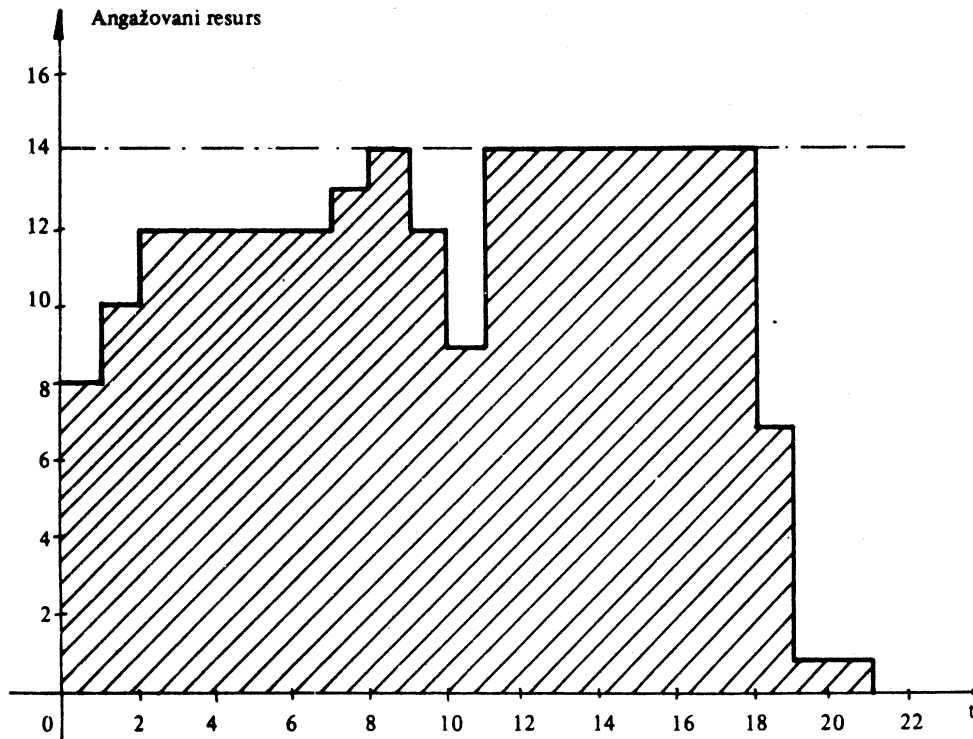
[18; 19]

Tabela 19.

(i-j)	(5-8)	(6-8)	Ukupno
$(S_t)_{ij}$	0	-2	
r_{ij}	5	2	7
R.P.	2	1	
A.R.	5	2	7

12. etapa. Razmatra se vremenski inteval [19; 21]. Odvija se atktivnost (6–8) i angažuju se samo dva radnika.

Angažovanje resursa (radne snage), u toku izvršenja projekta, je prikazano na slici 15.



Slika 15.

Raspolože se sa $14 \cdot 21 = 294$ radnik \cdot (v.j.). Neiskorišćeno je: $(14 - 8) \cdot 1 + (14 - 10) \cdot 1 + (14 - 12) \cdot 6 + (14 - 13) \cdot 1 + (14 - 9) \cdot 1 + (14 - 2) \cdot 2 = 59$ radnik \cdot (v.j.). Procenat neiskorišćenosti je $(59 : 294) \cdot 100 = 19,73\%$. Smatrajući da se blagovremeno mogu premeštati na drugi posao radnici koji nisu angažovani na poslednjim etapama projekta, neiskorišćenost se smanjuje na 28 radnik \cdot (v.j.), odnosno procenat neiskorišćenosti na $(28 : 294) \cdot 100 = 9,52\%$.

3. NUMERIČKO RJEŠAVANJE LINEARNOG PROBLEMA – SIMPLEKS METODA

U ovom će se poglavlju naučiti rješavati linearni problem (LP) u standardnom obliku *simpleks metodom*.

Ilustrirat će se simpleks metoda na sljedećem primjeru:

Naći maksimum funkcije $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ uz ograničenja

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Preliminarni korak metode sastoji se od uvođenja takozvanih *dopunskih varijabli*. Da bi se motivirao ovaj koncept, razmotri se prvo ograničenje

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \quad (3.2)$$

Za svako moguće rješenje x_1, x_2, x_3 vrijednost lijeve strane od (3.2) je, u najboljem slučaju, jednaka vrijednosti desne strane. Često može postojati dopuna između dviju vrijednosti. Dopuna će se označiti s x_4 , to jest definirat će se $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$. Nejednakost (3.2) sada se može pisati kao $x_4 \geq 0$. Na sličan način, sljedeća dva ograničenja omogućuju uvođenje varijabli x_5 i x_6 . Funkcija cilja $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ može se označiti sa z . Konačno, za svaki odabir brojeva x_1, x_2, x_3 definirat će se varijable x_4, x_5, x_6 i z pomoću formula:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tim zapisom, problem se sada može formulirati kao:

naći maksimum od z uz ograničenja

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (3.4)$$

Novе varijable x_4, x_5, x_6 definirane s (3.3) zovu se *dopunske varijable*. Dopunske varijable dolaze u funkciji cilja s koeficijentom nula. Za početne varijable x_1, x_2, x_3 obično se kaže da su to *varijable odlučivanja* (*varijable odluke*) ili *strukturne varijable*. Bitno je naznačiti da jednadžbe u (3.3) izriču ekvivalenciju između (3.1) i (3.4).

Preciznije:

- svako moguće rješenje x_1, x_2, x_3 od (3.1) može se proširiti, na jedinstven način određen s (3.3), u moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4);
- svako moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4) može se ograničiti, jednostavno poništavanjem dopunskih varijabli, u moguće rješenje x_1, x_2, x_3 od (3.1);
- funkcija cilja na skupu mogućih rješenja od (3.1) i na skupu mogućih rješenja od (3.4) poprima istu ekstremnu vrijednost. Optimalno rješenje na (3.1) x_1^*, x_2^*, x_3^* podudara s optimalnim rješenjem na (3.4) ($x_4=x_5=x_6=0$).

Velika strategija simpleks metode je strategija sukcesivnih poboljšanja: nakon što je dobiveno neko moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4), nastojat će se odrediti drugo moguće rješenje $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6$ koje je bolje u smislu da je:

$$5\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Ponavljajući ovaj postupak konačan broj puta, na kraju će se doći do optimalnog rješenja. Za početak je potrebno znati neko moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Nije teško pronaći jedno u ovom primjeru: stavljajući za varijable odluke x_1, x_2, x_3 , nula, određuju se dopunske varijable x_4, x_5, x_6 od (3.3).

Stoga početno rješenje,

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8 \quad (3.5)$$

daje $z = 0$.

U smislu te prikazane velike strategije, trebalo bi sada potražiti moguće rješenje koje daje veću vrijednost z . Pronalaženje takvog rješenja nije teško. Na primjer, ako se drži da je $x_2 = x_3 = 0$ i povećavamo vrijednost od x_1 , dobiva se da je $z = 5x_1 > 0$. Stoga, ako se zadrži da je $x_2 = x_3 = 0$ i stavi da je $x_1 = 1$, dobiva se da je $z = 5$ i $x_4 = 3, x_5 = 7, x_6 = 5$. Još bolje, ako se zadrži $x_2 = x_3 = 0$ i stavi da je $x_1 = 2$, dobiva se $z = 10$ i $x_4 = 1, x_5 = 3, x_6 = 2$. Međutim, ako se zadrži $x_2 = x_3 = 0$ i stavi $x_1 = 3$, dobiva se $z = 15$ i $x_4 = x_5 = x_6 = -1$; a to se ne može prihvatiti, s obzirom na to da ograničenja zahtijevaju $x_i \geq 0$ za svaki i . Bit je u tome da se ne može povećavati x_1 previše. Pitanje je: za koliko se točno može povećavati x_1 (zadržavajući istovremeno $x_2 = x_3 = 0$) a da $x_4, x_5, x_6 \geq 0$?

Uvjet $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 5/2$, a slično tome, $x_5 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 11/4$ i $x_6 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 8/3$. Od tih triju ograničenja, prvo je najstrože. Povećavajući x_1 do te granice, dobiva se sljedeće moguće rješenje,

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

Valja primijetiti da to rješenje daje $z = 25/2$, što je zaista poboljšanje u odnosu na $z = 0$.

Zatim, mora se potražiti moguće rješenje koje je čak bolje od (3.6), u smislu da je na njemu funkcija cilja $z > 25/2$. Međutim taj je zadatak malo teži. Što je učinilo prvo poboljšanje tako lakim? Bilo je na raspolaganju ne samo moguće rješenje (3.5), nego isto tako i sustav linearnih jednadžbi (3.3) koji je omogućio određivanje poboljšanog mogućeg rješenja. Ako se želi nastaviti sličnim putem, mora se razviti novi sustav linearnih jednadžbi koje se odnose prema (3.6) isto kao što se sustav (3.3) odnosi prema (3.5).

Kakva svojstva mora imati novi sustav? Valja obratiti pažnju na to da (3.3) izražava varijable x_4, x_5, x_6 koje poprimaju pozitivne vrijednost u (3.5) pomoću vrijednosti x_1, x_2, x_3 koje poprimaju vrijednost nula u (3.5). Slično tome novi sustav bi morao izražavati one varijable koje poprimaju pozitivne vrijednost u (3.6) pomoću varijabli koje poprimaju vrijednost nula u (3.6): ukratko, u sustavu se mora izraziti x_1, x_5, x_6 , (a isto tako i z) pomoću x_2, x_3 i x_4 . Posebice, varijabla x_1 , koja je upravo promijenila svoju vrijednost od nule na pozitivnu, morala bi promijeniti svoj položaj s desne strane prijeći na lijevu stranu sustava jednadžbi. Slično tome, varijabla x_4 , koja je upravo promijenila svoju vrijednost od pozitivne na nulu, morala bi se pomaknuti s lijeve strane na desnu stranu.

Da bi se izradio novi sustav, početak će se od varijable x_1 . Željena formula za x_1 pomoću x_2, x_3 i x_4 lako se dobije iz prve jednadžbe u (3.3):

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \quad (3.7)$$

a zatim, da bi se izrazili x_5, x_6 i z pomoću x_2, x_3, x_4 jednostavno se uvrsti x_1 iz (3.7) u odgovarajuće redove od (3.3):

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= 8 - 3\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 4x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ z &= 5\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + 4x_2 + 3x_3 = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \end{aligned}$$

Stoga je novi sustav

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kao što je učinjeno u prvom ponavljanju, sada će se pokušati povećati vrijednost od z povećanjem vrijednosti odgovarajuće odabrane varijable s desne strane, dok će se u isto vrijeme zadržavati preostale varijable s desne strane na vrijednost nula. Valja obratiti pažnju na to da bi povećanje varijabli x_2 ili x_4 dovelo do smanjenja vrijednosti z , što je u suprotnosti s namjerom. Stoga, nema izbora: varijabla s desne strane, koja bi povećala vrijednost funkcije z , obvezno je x_3 . Koliko se može povećati x_3 ? Odgovor se može pročitati izravno iz sustava (3.8): za $x_2 = x_4 = 0$, ograničenje $x_1 \geq 0$ daje $x_3 \leq 5$, a ograničenje $x_6 \geq 0$ daje $x_3 \leq 1$. Stoga je $x_3 = 1$ najbolje što se može učiniti; novo je moguće rješenje

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 0 \quad (3.9)$$

Valja obratiti pažnju na to da se vrijednost funkcije cilja z upravo povećala s 12.5 na 13.

Postupak se dalje nastavlja, varijable koje su pozitivne: x_1, x_3, x_5 , pojaviti će se na lijevoj strani novog sustava jednadžbi, dok će se varijable x_2, x_4, x_6 čije su vrijednosti nula pojaviti na desnoj strani.

Da bi se načinio sustav, počinje se s varijablom x_3 . Iz treće jednadžbe u (3.8), je $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$; zamjenjujući taj izraz za x_3 u preostalim jednadžbama u (3.8), dobiva se

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\ x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sada slijedi treće ponavljanje. Prije svega, mora se odabrati s desne strane od (3.10) varijabla čije povećanje rezultira povećanjem funkcije cilja. Međutim, takve varijable nema: ako se poveća bilo koja od varijabli x_2, x_4, x_6 vrijednost funkcije cilja će se umanjiti. Stoga, izgleda, da se došlo do zastoja. Zapravo, sama prisutnost takvog zastoja pokazuje da je gotovo; riješen je problem; rješenje opisano s (3.9) je optimalno. Zašto? Odgovor je sakriven u zadnjem redu (3.10):

$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \quad (3.11)$$

Posljednje rješenje (3.9) daje $z = 13$; dokazivanje da je to rješenje optimalno vodi do dokazivanja da svako moguće rješenje zadovoljava nejednakost $z \leq 13$. S obzirom na to da svako moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ zadovoljava (3.6) $x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$ i $x_6 \geq 0$, željena nejednakost $z \leq 13$ slijedi izravno iz (3.11).

Općenito, kod rješavanja standardnog problema linearnog programiranja:

$$\text{maksimum } \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \text{uz ograničenja } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.12)$$

prvo se uvode dopunske varijable $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ i označi funkcija cilja sa z . To jest, definira se

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.13)$$

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

U okviru simpleks metode, skupu mogućih rješenja x_1, x_2, \dots, x_n prema (3.12) pridružuje se skup nenegativnih brojeva $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ prema (3.13). U svakom ponavljanju, iteraciji, simpleks metode kreće se od nekoga mogućeg rješenja x_1, x_2, \dots, x_{n+m} do drugoga mogućeg rješenja $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+m}$ koje je bolje od onoga prethodnog u smislu da je

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j > \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.14)$$

Zapravo, posljednja izjava nije sasvim ispravna: nejednakost nije uvijek stroga; detaljnije o tome u [8].

Kao što je uočeno, pogodno je povezati sustav linearnih jednadžbi sa svim mogućim rješenjima: takvi sustavi olakšavaju pronalaženje poboljšanih mogućih rješenja. To se čini odabirom vrijednosti varijabli s desne strane jednadžbe i računanjem vrijednosti varijabli s lijeve strane jednadžbi te funkcije cilja. Relacije (3.3), (3.8) i (3.10) sadrže istu informaciju glede ovisnosti između sedam varijabli. Ipak, svaka od tri relacije predstavlja ovu informaciju na svoj, vlastiti, način. Relacija (3.3) sugerira da je slobodan izbor numeričke vrijednosti od x_1, x_2 i x_3 , dok su vrijednosti x_4, x_5, x_6 i z određene. U ovim relacijama, varijable odluke, x_1, x_2, x_3 ponašaju se kao nezavisne varijable, dok su z i dopunske varijable x_4, x_5, x_6 zavisne o njima. Relacija (3.8) predstavlja x_2, x_3, x_4 kao nezavisne i x_1, x_5, x_6 i z kao zavisne. U relaciji (3.10), nezavisne varijable su x_2, x_4, x_6 , a zavisne su x_3, x_1, x_5, z .

Općenito: jednadžbe svake relacije moraju izraziti m varijabli i funkciju cilja z pomoću preostalih $n - m$ varijabli.

Varijable koje se pojavljuju na lijevoj strani relacija nazivaju se *bazične*; varijable koje se pojavljuju na desnoj strani su *nebazične*. Naravno bazične varijable se mijenjaju svakom iteracijom. Na primjer u prvoj iteraciji x_1 postaje bazična, dok x_4 postaje nebazična. U svakoj iteraciji, prvo se odabiru varijable koje nisu bazične, a koje moraju postati bazične, te se tada otkriva koja bazična varijabla mora postati nebazična. Odabir ulazne varijable je motiviran željom za povećanjem vrijednosti z ; određivanje varijable koja postaje nebazična

zasnovano je na zahtjevu da sve varijable moraju biti nenegativne. Izlazna varijabla je ona bazična varijabla koja daje najstrožu gornju granicu na porast ulazne varijable.

Može se odlučiti za različito zapisivanje linearnog problema. Ovdje će se uglavnom prvo pisati funkcija cilja i umjesto odrediti maksimum ili minimum jednostavno će se pisati $\max(\quad)$ ili $\min(\quad)$, te se može crtom odvojiti funkcija cilja od ograničenja. Razmotrit će se još jedan primjer.

$$\begin{aligned} \max(5x_1 + 5x_2 + 3x_3) \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 3 \\ -x_1 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Uvode se dopunske varijable i funkcija z

$$\begin{aligned} z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 = 2 + x_1 - 3x_3 \\ x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Početno moguće rješenje je

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 2, x_6 = 4, x_7 = 2$$

U prvoj iteraciji, nastojat će se povećati vrijednost z , tako da se učini jedna od desnih varijabli pozitivnom. U ovom primjeru, bilo koja od triju varijabli x_1, x_2, x_3 odgovarala bi. U malim primjerima, uobičajena je praksa odabrati varijablu, koja, u formuli za z , ima najveći koeficijent. Povećanje u toj varijabli rezultirati će i povećanjem z na najbrži način (ali ne obvezno na najvišu razinu). U ovom slučaju to pravilo ostavlja izbor između x_1 i x_2 ; birajući proizvoljno, odlučuje se učiniti x_1 pozitivnim. Kako se povećava vrijednost od x_1 , tako raste i vrijednost od x_5 . Međutim, vrijednosti od x_4, x_6 i x_7 se smanjuju, i ni jednoj nije dopušteno da postane negativna. Od triju ograničenja $x_4 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$, koja nameću gornje granice na porast od x_1 , zadnje je ograničenje $x_7 \geq 0$ najstrože: ono daje $x_1 \leq 1$. U poboljšanom mogućem rješenju, bit će $x_1 = 1$ i $x_7 = 0$. Kao i u prvom primjeru x_1 prelazi na lijevu stranu, a x_7 na desnu. Iz četvrte jednadžbe u (3.16) je

$$x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \quad (3.17)$$

Uvrštavajući x_1 iz (3.17) u preostale jednadžbe od (3.16), dolazi se do relacija

$$z = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_7$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_4 &= 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_5 &= 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_6 &= 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7 \end{aligned} \quad (3.18)$$

U ovom primjeru, varijabla koja mora postati bazična tijekom druge iteracije je sasvim nedvosmisleno x_3 . To je jedina varijabla koja nije bazična u (3.18), a čiji je koeficijent u funkciji cilja pozitivan. Od četiri bazične varijable, x_6 nameće najstrožu gornju granicu na povećanje od x_3 , te stoga mora postati nebazična, pa je

$$z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{3}x_7 - \frac{11}{6}x_6$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{6}x_6 \\ x_4 &= 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 &= \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{5}{6}x_6 \end{aligned} \quad (3.19)$$

U trećoj iteraciji, ulazna varijabla je x_2 (postaje bazična), a izlazna x_5 (postaje nebazična). Nakon treće iteracije je

$$z = 10 - 2x_7 - x_6 - x_5$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{6}{29}x_5 \\ x_3 &= \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_7 - \frac{2}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_5 \\ x_1 &= \frac{32}{29} - \frac{3}{29}x_7 - \frac{9}{29}x_6 + \frac{5}{29}x_5 \\ x_4 &= \frac{1}{29} + \frac{28}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{21}{29}x_5 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sada ni jedna nebazična varijabla ne može postati bazična bez smanjenja vrijednosti od z . Stoga, zadnja iteracija daje optimalno rješenje problema. To rješenje je

$$x_1 = \frac{32}{29}, \quad x_2 = \frac{8}{29}, \quad x_3 = \frac{30}{29}$$

i tada daje $z = 10$.

3.1 Simpleks tablica

Često postoji više od jednog načina opisivanja određenog algoritma. Opisi koji imaju za cilj razjašnjenje važnih postupaka zbog didaktičkih prednosti su često sasvim različiti od onih koji sugeriraju učinkovite realizacije na računalu. Simpleks metoda nije izuzetak. U ovom trenu osnovni cilj je ponuditi alate za objašnjavanje osnovnih principa simpleks procedure. Međutim, pri uvođenju metoda za rješavanje velikih problema na računalu, razmatranja učinkovitosti računanja i numerička točnost zasjenjuju didaktičke prednosti.

Simpleks metoda je *opća* metoda, što će reći da rješava svaki problem linearnog programiranja. Simpleks metoda spada u *iterativne metode*. Kao što je već utvrđeno, ona polazi od nekoga mogućeg rješenja pa ga u nizu koraka poboljšava dok ne dođe do najboljeg, optimalnog rješenja. U svakom koraku prema optimalnom rješenju procedura te metode se ponavlja, *iterira*. Zato se metoda lako primjenjuje na računalu. Simpleks metoda je *konačna* iterativna metoda jer u konačnom broju iteracija dolazi do optimalnog rješenja.

Da bi se objasnila simpleks tablica, pogodno je ograničenja problema zapisati u vektorskom obliku. Pokazat će se to na prvom primjeru kojim se bavilo u prethodnoj točki:

$$\begin{aligned} &\max(5x_1 + 4x_2 + 3x_3) \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ &4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Uvođenjem dopunskih varijabli x_4, x_5, x_6 , ograničenja iz (3.21) prelaze u *kanonski oblik*, nejednadžbe prelaze u jednadžbe. Dopunske varijable u funkciji cilja imaju koeficijente $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, te je kanonski linearni problem

$$\begin{aligned} &\max(5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6) \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ &4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ograničenja iz (3.22) mogu se napisati u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ta vektorska jednadžba može se kraće (uz oznake A_i vektor uz x_i) pisati ovako:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 + A_6 x_6 = B \quad (x_j \geq 0) \quad (3.24)$$

Vektori A_4, A_5, A_6 su *jedinični vektori* l_1, l_2, l_3 (l_i ima na i -tom mjestu jedinicu a na ostalim mjestima nulu). Oni su linearno nezavisni i čine bazu; nazivaju se *bazični vektori*. Simpleks metoda ne radi bilo s kojim mogućim rješenjem, već samo s tzv. bazičnim mogućim rješenjem. Moguće rješenje je svaki vektor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

čije su komponente $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) koeficijenti linearne kombinacije (3.24).

Općenito moguće rješenje je *bazično* ako ima najviše m pozitivnih komponenata u X tj. najviše toliko pozitivnih komponenata koliko ih imaju vektori A_i u X (u općem slučaju m je broj ograničenja a n broj nepoznanica). Iz uvjeta nenegativnosti proizlazi da su ostale komponente u X jednake nuli. Ako moguće rješenje ima točno m pozitivnih komponenata, tada se naziva *bazično nedegenerirano rješenje*. Ako, pak, moguće rješenje ima manje od m pozitivnih komponenata, tada se naziva *bazično degenerirano rješenje*. Uбудuće će se raditi uz pretpostavku da je bazično rješenje nedegenerirano. Varijable $x_j > 0$ u bazičnom rješenju su bazične varijable, a $x_j = 0$ nebazične.

Za početno rješenje razmatranog problema (3.22) pogodno je uzeti ovo bazično rješenje:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ovom rješenju odgovara baza $\{ A_4, A_5, A_6 \}$ trodimenzionalnoga vektorskog prostora. Još jednom će se ponoviti što je baza.

Baza m -dimenzionalnoga vektorskog prostora je svaki skup od m linearno nezavisnih vektora, a skup vektora je linearno nezavisan ako se nijedan vektor iz tog skupa ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih.

Na primjer, nijedan od jediničnih vektora A_4, A_5, A_6 ne može se izraziti pomoću ostala dva kao njihova linearna kombinacija. Zbog toga skup jediničnih vektora A_4, A_5, A_6 čini jednu bazu. Svaki vektor iz vektorskog prostora koji nije u bazi može se izraziti kao linearna kombinacija vektora baze. Na primjer,

$$A_1 = 2 A_4 + 4 A_5 + 3 A_6$$

Očigledno je da je linearna kombinacija vektora baze na desnoj strani znaka jednakosti doista jednaka vektoru A_1 . Naime,

$$A_1 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Slično je

$$A_2 = 3 A_4 + A_5 + 4 A_6$$

$$A_3 = A_4 + 2 A_5 + 2 A_6$$

Kad se zna što je baza i bazično rješenje, može se prijeći na samu simpleks tablicu.

Koeficijenti uz nepoznanice upisuju se kao stupci, posebno su istaknute komponente vektora B i bazični vektori A_4, A_5, A_6 u prvoj simpleks tablici

1. SIMPLEKS TABLICA – T_1

c_j	BAZA	5 A_1	4 A_2	3 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6	B
0	A_4	2	3	1	1	0	0	5
0	A_5	4	1	2	0	1	0	11
0	A_6	3	4	2	0	0	1	8
	$z_j - c_j$	-5	-4	-3	0	0	0	0

U bazi su jedinični vektori A_4, A_5, A_6 čiji su koeficijenti nula u funkciji cilja, što je napisano kao c_j . Postavlja se pitanje: kako poboljšati program. Vrijednost funkcije cilja za ovaj program je nula ($z = 5 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$). Prvo se donosi odluka koji će vektor ući u bazu. Uvede li se neka aktivnost A_i u program (u bazu), mora neki bazični vektor napustiti bazu, njegova bazična varijabla poprima vrijednost nula. Ako se u program uvede, recimo, aktivnost A_1 da operira na razini 1, mora se smanjiti bazična aktivnost A_4 za 2, A_5 za 4 i A_6 za 3

jedinice. Kakav će efekt imati to smanjenje bazičnih aktivnosti u funkciji cilja? Za jedinicu povećanja razine aktivnosti A_j od 0 na 1 taj efekt će biti jednak

$$z_j = c_4 a_{1j} + c_5 a_{2j} + c_6 a_{3j} \quad (3.25)$$

To je vrijednost za koju se smanji ukupni efekt u funkciji cilja. U ovom primjeru je

$$z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 0$$

Budući da dopunske varijable x_4, x_5, x_6 u funkciji cilja imaju koeficijente $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, to je $z_j = 0$ za svako $j = 1, 2, \dots, 6$.

Koliki je doprinos jedinice vektora A_j ukupnom efektu u funkciji cilja? Očigledno je taj doprinos jednak c_j (npr. 3.22).

Sada treba usporediti efekt smanjenja bazičnih aktivnosti s doprinosom vektora A_j , tj. z_j s c_j . Ako je $z_j > c_j$, nema smisla uvoditi u program vektor A_j . Ako je pak $z_j = c_j$ i A_j se uvede u program, taj će se novi program doduše razlikovati od starog, ali neće biti ništa bolji. Ako je $z_j < c_j$, uvođenje vektora A_j u program izmijenit će ga i poboljšati. Prema tome, kriterij za izbor vektora koji će ući u bazu je $z_j < c_j$ ili $z_j - c_j < 0$. Ta razlika je zapravo stopa porasta funkcije cilja z . Zato je razumljivo što će se izabrati ona aktivnost A_s za koju je stopa porasta funkcije cilja $|z_j - c_j|$ maksimalna, to jest

$$z_s - c_s = \min_j (z_j - c_j), \quad z_j - c_j < 0 \quad (3.26)$$

Iz simpleks tablice vidi se da je

$$z_1 - c_1 = -5 = \min_j (z_j - c_j), \quad \text{za } z_j - c_j < 0.$$

Prema tome, izbor je pao na aktivnost A_1 , što je u tablici zasjenčeno. Vektor A_1 ulazi u bazu. Postavlja se pitanje: koji vektor izlazi iz baze. Da se ne bi dobile negativne komponente vektora B , traži se

$$\min \left\{ \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3} \right\} = \frac{5}{2}$$

Iz baze izlazi vektor A_4 a ulazi A_1 . Izbor vektora koji izlazi iz baze u općem slučaju određuje se ovako

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{is}} \right) \quad a_{is} > 0 \quad (3.27)$$

Izabrani stupac označen je sa s , a izabrani redak sa r . Na presjeku $s - \text{tog}$ stupca i $r - \text{tog}$ retka je element a_{rs} . On se zove *ključni ili temeljni element*. Taj element je djelitelj koji odgovara minimalnom kvocijentu. Sa strane u relaciji (3.27) naznačeno je da divizor a_{is} mora biti pozitivan. U ovom primjeru svi elementi u izabranom stupcu $s = 1$ pozitivni su.

Transformacija prve u drugu simpleks tablicu povodi se prema sljedećim formulama:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{rs}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.28)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{ij} a_{is} \quad (i \neq r), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

gdje su a'_{ij} elementi nove tablice, a a_{ij} stare tablice, prema (3.29) $a'_{is} = 0$ za $i = 1, 2, \dots$ osim $a'_{rs} = 1$. Iz (3.28) slijedi da svaki element a_{ij} u izabranom retku r stare tablice treba podijeliti s ključnim elementom a_{rs} da se dobije odgovarajući element nove tablice. Prema (3.29) element iz $i - \text{tog}$ retka $j - \text{tog}$ stupca nove tablice a'_{ij} dobije se tako da se od odgovarajućeg elementa stare tablice a_{ij} oduzme produkt elementa a_{is} iz izabranog stupca s i retka i s novoformiranim elementom a'_{ij} . Na taj način dobili su se elementi druge simpleks tablice.

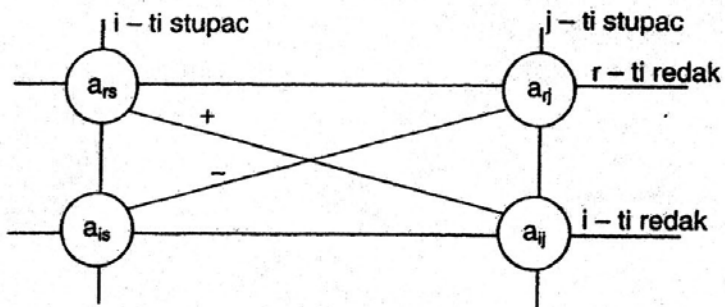
2. SIMPLEKS TABLICA - T₂

c_j		5	4	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
5	A_1	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	A_5	0	-5	0	-2	1	0	1
0	A_6	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2
	$z_j - c_j$	0	7/2	-1/2	5/2	0	0	25/2

Formula (3.29) može se napisati na sljedeći način:

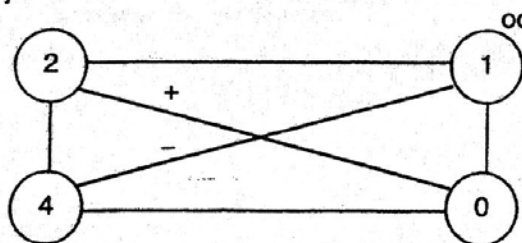
$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} a_{rs} - a_{ij} a_{is}}{a_{rs}} \quad (3.30)$$

Za svaki element prethodne tablice (osim elemenata u retku gdje je ključni element) može se uočiti četverokut ili determinanta drugog reda, gdje je vrijednost brojnika izraza (3.30) produkt na glavnoj dijagonali umanjen za produkt na sporednoj dijagonali:



Uzme li se element a'_{24} nove tablice, odgovarajući četverokut u staroj tablici

je:



odnosno

$$a'_{24} = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 4}{2} = -2$$

ili drugi primjer

$$a'_{21} = \frac{2 \cdot 4 - 4 \cdot 2}{2} = 0$$

U drugoj simpleks tablici uočava se da vektor koji je ušao u bazu, u ovom slučaju A_1 , ima na mjestu ključnog elementa komponentu 1 a sve ostale su komponente nula. Transformacija iz 1. simpleks tablice u 2. simpleks tablicu mogla se načiniti i na sljedeći način:

- redak u kojem je ključni element podijeli se s ključnim elementom i tako se dobije prvi redak u 2. simpleks tablici;
- prvi redak 2. simpleks tablice (redak u kojem je bio ključni element prethodne tablice) pomnoži se s -4 i zbroji s drugim retkom 1. simpleks tablice; tako se dobije drugi redak 2. simpleks tablice;
- prvi redak 2. simpleks tablice pomnoži se s -3 i zbroji s trećim retkom prethodne simpleks tablice i dobije se treći redak 2. simpleks tablice.

U 2. simpleks tablici $z_3 - c_3 < 0$, znači vektor A_3 ulazi u bazu. Treba naći vektor koji će izići iz baze. Element $a_{23} = 0$, pa on ne može biti ključni element.

Traži se

$$\min \left\{ \frac{5}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 1$$

element a_{33} je ključni element, znači u bazu ulazi vektor A_3 a izlazi vektor A_6 .

Novu bazu u 3. simpleks tablici čine vektori $\{A_1, A_5, A_3\}$.

Treći redak 2. simpleks tablice, redak gdje se nalazi ključni element, podijeli se s ključnim elementom tj. s $1/2$ ili pomnoži s 2, i tako se dobije treći redak 3. simpleks tablice.

Element $a_{23} = 0$ u 2. simpleks tablici i taj se redak prepiše u 3. simpleks tablicu. Da bi se na mjestu a_{13} u 3. simpleks tablici dobila nula, treći redak 3. simpleks tablice pomnoži se s $-1/2$ i zbroji s prvim retkom prethodne simpleks tablice te se dobije prvi redak nove tablice

3. SIMPLEKS TABLICA - T₃

c_j		5	4	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
5	A_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	A_2	0	-5	0	-2	1	0	1
3	A_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$z_j - c_j$	0	-3	0	1	0	-1	13

Kako su svi elementi $z_j - c_j \geq 0$, došlo se do optimalnog rješenja:

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$$

Vrijednost funkcije cilja $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13$, pročita se ispod vektora B.

Svako bazično rješenje koje se dobilo simpleks metodom bilo je nedegenerirano. Dobivena su 3 različita bazična moguća rješenja:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svakom tom rješenju odgovara jedna ekstremna točka skupa svih mogućih rješenja u trodimenzionalnom prostoru, to jest

$$(0, 0, 0), \quad (5/2, 0, 0), \quad (2, 0, 1)$$

Ravnajući se po kriteriju najveće stope rasta, išlo se po simpleks metodi od ishodišta $(0,0,0)$, preko točke $(5/2, 0,0)$ do optimalne točke $(2, 0,1)$. To je najkraći put do optimalnog rješenja (točke u kojoj funkcija cilja poprima ekstremnu vrijednost).

U svakom slučaju, simpleks metoda polazi od neke ekstremne točke pa, idući od jedne do druge susjedne ekstremne točke, doprođe do optimalne.

Da se ne zna simpleks metoda morala bi se odrediti sva bazična rješenja, kojih ima koliko i različitih baza. U ovom primjeru od 6 vektora $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,$

$$A_6 \text{ ima najviše } \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ baza.}$$

3.2 Rješenje standardnog problema minimuma – Charnesova M procedura

Razmatrat će se standardni problem minimuma, npr. zadatak 4 u poglavlju 2. Matematički model tog problema je

$$\begin{aligned} \min (50x_1 + 40x_2) \\ 20x_1 + 30x_2 &\geq 900 \\ 40x_1 + 30x_2 &\geq 1200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ograničenja se mogu pisati u obliku jednadžbi uvodeći dopunske varijable $v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 - v_1 &= 900 \\ 40x_1 + 30x_2 - v_2 &= 1200 \end{aligned}$$

Uočava se da vektori koeficijenta varijabli v_1 i v_2 nisu jedinični vektori s pozitivnim komponentama. Takvi jedinični vektori ne mogu dati nenegativno početno bazično rješenje.

Uvode se nove varijable w_1 i w_2 koje se nazivaju *artificijelne* (umjetne) varijable, jer nemaju konkretnog značenja, osim što služe kao kalkulatívno sredstvo. Da se te varijable ne bi pojavile u optimalnom rješenju, pridružuje im se nespecificirani veliki pozitivni broj M kao koeficijent u funkciji cilja. Tako je originalni problem prešao u ovaj problem:

$$\begin{aligned} \min (50x_1 + 40x_2 + 0v_1 + 0v_2 + Mw_1 + Mw_2) \\ 20x_1 + 30x_2 - v_1 + w_1 &= 900 \\ 40x_1 + 30x_2 - v_2 + w_2 &= 1200 \\ x_1, x_2 \geq 0, v_1, v_2 \geq 0, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tu metodu pridruživanja broja M artificijelnom vektoru, da bi ga istjerao iz baze, prvi je sugerirao A. Charnes [10].

Ako originalni problem ima jedno moguće rješenje, tada i prošireni sustav ima neko nenegativno rješenje. Ako ne postoji moguće rješenje originalnog problema,

tada će minimalno nenegativno rješenje proširenog problema sadržavati bar jednu pozitivnu artificijelnu varijablu $w_k > 0$, dakle u tom slučaju ne može se osloboditi umjetnih varijabli.

U početnoj tablici s lijeve strane figurira artificijelna baza $[W_1, W_2]$.

BAZA	50 A_1	40 A_2	0 V_1	0 V_2	M W_1	M W_2	B
M W_1	20	30	-1	0	1	0	900
M W_2	40	30	0	-1	0	1	1200
$z_1 - c_1$	60-M	60-M	-M	-M			2100-M
	-50	-40			0	0	
40 A_2	2/3	1	-1/30	0	-	0	30
M W_2	20	0	1	-1	-	1	300
$z_1 - c_1$	20-M		M	-M	-		300-M +
	-70/3	0	-4/3			0	1200
40 A_2	0	1	-1/15	1/30	-	-	20
50 A_1	1	0	1/20	-1/20	-	-	15
$z_1 - c_1$	0	0	-1/6	-7/6			1550

Uz ove tablice potrebna su neka objašnjenja. Ona se tiču prije svega dvaju redaka $m+1$ i $m+2$ koji su sadržani u $z_1 - c_1$. Brojevi u retku $m+1$ su koeficijenti od M, brojevi u retku $m+2$ su nezavisni od M u definiciji $z_1 - c_1$. Na primjer, u prvoj tablici je

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 20M + 40M - 50 = 60M - 50 \\ z_2 - c_2 &= 30M + 30M - 40 = 60M - 40 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Budući da je broj M po pretpostavci velik pozitivni broj, pri traženju minimuma u bazu ulazi onaj vektor pod kojim je najveći pozitivni broj, u ovom slučaju to je A_2 . Vektor koji izlazi iz baze dobije se tako da se odredimo najmanji kvocijent komponenata vektora B i komponenata vektora koji ulazi u bazu. Kako je

$$\min \left\{ \frac{900}{30} = 30, \frac{1200}{30} = 40 \right\} = 30$$

ključni element je $a_{12} = 30$; vektor W_1 izlazi iz baze. Čim se jedan artificijelni vektor eliminira iz baze, taj vektor više nije potreban u tablici; zato u drugoj tablici nema komponenata vektora W_1 . Naime, može se pokazati da se artificijelni vektor nikada ne vraća u bazu kad je jednom napusti [2]. Kao i ranije,

prvi redak druge tablice dobiven je tako da se prvi redak prethodne tablice podijelio s ključnim elementom, tj. sa 30. Drugi redak druge tablice dobio se tako da se prvi redak druge tablice pomnožio s -30 i zbrojio s drugim retkom prve tablice.

U drugoj tablici najveći pozitivni broj u retku $z_j - c_j$ je ispod vektora A_1 ; taj vektor ulazi u bazu a izlazi W_2 .

Redak $z_j - c_j$ u trećoj tablici sadrži samo 0 i negativne brojeve; došlo se do optimalnog rješenja: $x_1 = 15$, $x_2 = 20$ i funkcija cilja $z = 1550$.

3.3 Opći oblik problema linearnog programiranja

U općem obliku problema linearnog programiranja postoje ograničenja \geq , \leq , =. Pomoću simpleks tablice rješava se sljedeći linearni problem:

$$\begin{aligned} \min(8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 6x_4) \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 80 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &\geq 60 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kanonski oblik postavljenog problema je

$$\begin{aligned} \min(8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 0u_1 + 0v_1 + Mw_1 + Mw_2) \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + u_1 &= 80 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - v_1 + w_1 &= 60 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 + w_2 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, u_1, v_1 \geq 0, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Uvedene su dopunske varijable u_1, v_1 , koje ulaze u funkciju cilja s koeficijentom 0 te artifičijelne varijable w_1, w_2 koje u funkciji cilja kod traženja minimuma imaju koeficijent $+M$. Ako se traži maksimum artifičijelne varijable, u funkciju cilja ulaze s koeficijentom $-M$. Simpleks tablica postavljenoga linearnog problema je

	8	12	2	6	0	0	M	M	
	A_1	A_2	A_3	A_4	U_1	V_1	W_1	W_2	B
0 U_1	4	6	3	2	1	0	0	0	80
M W_1	3	1	5	1	0	-1	1	0	60
M W_2	2	5	0	3	0	0	0	1	40
$z_j - c_j$	$5M - 8$	$6M - 12$	$5M - 2$	$4M - 6$	0	$-M$	0	0	$100 - M$

	8	12	2	6	0	0	M	M	
	A_1	A_2	A_3	A_4	U_1	V_1	W_1	W_2	B
0 U_1	$8/5$	0	3	$-8/5$	1	0	0		32
M W_1	$13/5$	0	5	$2/5$	0	-1	1		52
12 A_2	$2/5$	1	0	$3/5$	0	0	0		8
$z_j - c_j$	$13/5 - M$ $-16/5$	0	$5M$ -2	$2/5 M$ $+6/5$	0	$-M$	0	0	$52M$ $+96$
0 U_1	$1/25$	0	0	$-46/25$	1	$3/5$			$4/5$
2 A_3	$13/25$	0	1	$2/25$	0	$-1/5$			$52/5$
12 A_2	$2/5$	1	0	$3/5$	0	0			8
$z_j - c_j$	$-54/25$	0	0	$34/25$	0	$-2/5$			$584/5$
0 U_1	$19/15$	$46/15$	0	0	1	$3/5$			$76/3$
2 A_3	$7/15$	$-2/15$	1	0	0	$-1/5$			$28/3$
6 A_4	$2/3$	$5/3$	0	1	0	0			$40/3$
$z_j - c_j$	$-46/15$	$-34/5$	0	0	0	$-2/5$			$296/3$

Optimalno rješenje je: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{28}{3}$, $x_4 = \frac{40}{3}$, $z = \frac{296}{3}$

Lako je provjeriti da to rješenje zadovoljava zadana ograničenja.

Odluke o uvođenju dopunskih i artifičijelnih varijabli te o koeficijentima simpleks jednadžbi i koeficijentima u funkciji cilja može se tablično prikazati:

Tablica za izbor dopunskih i artifičijelnih varijabli		Tip početnih uvjeta			
		\leq	$=$	\geq	
Pri pretvaranju početnih uvjeta u simpleks jednadžbe uvode se	dopunske varijable	DA	NE	DA	
	artifičijelne varijable	NE	DA	DA	
Koeficijenti u simpleks jednadžbama	uz dopunske varijable	+1	/	-1	
	uz artifičijelne varijable	/	+1	+1	
Koeficijenti u funkciji cilja	uz dopunske varijable	0	/	0	
	uz artifičijelne varijable	traži se maksimum	/	$-M$	$-M$
		traži se minimum	/	$+M$	$+M$



Pismeni ispit iz **Operacionih istraživanja**

1. Riba se izlovljava u uzgajalištima I_1, I_2, I_3 . Svako jutro riba kreće put ribarnica koje se nalaze u mjestima R_1, R_2, R_3 i R_4 . Iz uzgajališta I_1 do ribarnica prijevoz traje redom: 2, 5, 9 i 6 sati. Da bi iz I_2 riba došla u spomenute ribarnice treba po 1, 7, 3 i 8 sati. Konačno, prijevozi iz I_3 traju 5, 9 do ribarnica R_1, R_2 , te po 3 i 4 sata do ribarnica R_3 i R_4 (respektivno). Na uzgajalištima je na raspolaganju: 80 t, 120 t, 160 t dnevno, a ribarnice potražuju redom: 100 t, 40 t, 150 t i 110 t dnevno.

Kako treba prevesti ribu da ukupno vrijeme transporta bude minimalno.

Napraviti takav plan transporta da je što je moguće manje ribe na najdužem putu. Za polazno bazično rješenje uzeti rješenje dobijeno pod a)

2. Za matričnu igru definisanu matricom cijena odrediti optimalne strategije igrača i vrijednost igre:

strategije	B1	B2	B3	B4
A1	10	10	2	2
A2	2	2	9	9
A3	5	10	5	10
A4	4	2	4	2

3. Na osnovu sastavljene liste određenog skupa aktivnosti sa njihovim međuzavisnostima i determinisanim vremenima realizacije pojedinih aktivnosti, oblikovati i proračunati mrežni dijagram CPM (naći kritični put, najraniji početak, najraniji kraj, najkasniji početak, najkasniji kraj i vremenske rezerve)

Aktivnosti	trajanje	preduvjeti
A	3	-
B	6	-
C	4	-
D	7	A
E	8	A,B
F	10	A,B
G	12	A,B
H	8	C
I	6	D,E
J	7	H,G
K	2	I,J,F

4. Problem riješiti Gomorijevom metodom:

$$\begin{aligned} (\min) f &= 4x + 6y \\ x + 5y &\geq 60 \\ x + y &\geq 45 \\ x, y &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$



Pismeni ispit iz **Operacionih istraživanja**

1. Radna organizacija je nabavila pet mašina, specijalizovane za proizvodnju pojedinog sastavnog dijela složenog proizvoda. Potrebno je zaposliti pet radnika na ove mašine, tako da jedan radnik može raditi istovremeno samo na jednoj mašini. Konkursna komisija radne organizacije je odlučila da osnovni kriterijum za izbor radnika bude škart na proizvodima. Svaki radnik je proizveo isti broj proizvoda na svakoj mašini. Pri tome je bio procenat škarta na proizvodima kao što je dato u tabeli:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	4	7	11	8	6
R2	6	8	4	2	2
R3	6	10	6	5	5
R4	11	6	7	8	4
R5	5	6	11	5	10

Kako rasporediti radnike na mašine da bi ukupan procenat škarta na proizvodima bio najmanji?

2. Za matričnu igru definisanu matricom cijena odrediti optimalne strategije igrača i vrijednost igre:

strategije	B1	B2
A1	1	-1
A2	0	1
A3	-1	0
A4	2	-3
A5	1	2

3. Na osnovu sastavljene liste određenog skupa aktivnosti sa njihovim međuzavisnostima i determinisanim vremenima realizacije pojedinih aktivnosti, oblikovati i proračunati mrežni dijagram CPM (naći kritični put, najraniji početak, najraniji kraj, najkasniji početak, najkasniji kraj i vremenske rezerve)

Aktivnosti	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Zavisni od	-	-	B	A, C	B	B	D, E	D, E, F	D, E, F	G, H
trajanje	6	7	2	3	4	3	5	8	9	4

4. Dva modela stolica P_1 i P_2 pri izradi prolaze kroz dvije mašine: M_1, M_2 . Vrijeme obrade u satima po komadu i kapaciteti mašina dati su u tabeli:

		Mašine	
		M_1	M_2
proizvod	P_1	2	3
	P_2	1	-
Kapaciteti mašina		20	10

Stolica P_1 prodaje se po cijeni od 14, stolica P_2 po cijeni od 4 novčane jedinice. Kako treba planirati proizvodnju da se ostvari maksimalna dobit? Problem rješavati metodom grananja i ograničavanja.