3. NUMERIČKO RJEŠAVANJE LINEARNOG PROBLEMA – SIMPLEKS METODA

U ovom će se poglavlju naučiti rješavati linearni problem (LP) u standardnom obliku *simpleks metodom.*

Ilustrirat će se simpleks metoda na sljedećem primjeru:

Naći maksimum funkcije $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ uz ograničenja

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 8 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Preliminarni korak metode sastoji se od uvođenja takozvanih *dopunskih varijabli.* Da bi se motivirao ovaj koncept, razmotri se prvo ograničenje

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \qquad (3.2)$$

Za svako moguće rješenje x_1, x_2, x_3 vrijednost lijeve strane od (3.2) je, u najboljem slučaju, jednaka vrijednosti desne strane. Često može postojati dopuna između dviju vrijednosti. Dopuna će se označiti s x_4, to jest definirat će se $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$. Nejednakost (3.2) sada se može pisati kao $x_4 \ge 0$. Na sličan način, sljedeća dva ograničenja omogućuju uvođenje varijabli x_5 i x_6. Funkcija cilja $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ može se označiti sa z. Konačno, za svaki odabir brojeva x_1, x_2, x_3 definirat će se varijable x_4, x_5, x_6 i z pomoću formula:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Tim zapisom, problem se sada može formulirati kao:

naći maksimum od z uz ograničenja

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \qquad (3.4)$$

Nove varijable x_4, x_5, x_6 definirane s (3.3) zovu se *dopunske varijable.* Dopunske varijable dolaze u funkciji cilja s koeficijentom nula. Za početne varijable x_1, x_2, x_3 obično se kaže da su to *varijable odlučivanja (varijable odluke)* ili *strukturne varijable.* Bitno je naznačiti da jednadžbe u (3.3) izriču ekvivalenciju između (3.1) i (3.4).

Preciznije:

- svako moguće rješenje x_1, x_2, x_3 od (3.1) može se proširiti, na jedinstven način određen s (3.3), u moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4);
- svako moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4) može se ograničiti, jednostavno poništavanjem dopunskih varijabli, u moguće rješenje x_1, x_2, x_3 od (3.1);
- funkcija cilja na skupu mogućih rješenja od (3.1) i na skupu mogućih rješenja od (3.4) poprima istu ekstremnu vrijednost. Optimalno rješenje na (3.1) x_1^*, x_2^*, x_3^* podudara s optimalnim rješenjem na (3.4) ($x_4=x_5=x_6=0$).

Velika strategija simpleks metode je strategija sukcesivnih poboljšanja: nakon što je dobiveno neko moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ od (3.4), nastojat će se odrediti drugo moguće rješenje $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6$ koje je bolje u smislu da je:

$$5\,\overline{x}_1 + 4\,\overline{x}_2 + 3\,\overline{x}_3 > 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3$$

Ponavljajući ovaj postupak konačan broj puta, na kraju će se doći do optimalnog rješenja. Za početak je potrebno znati neko moguće rješenje $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Nije teško pronaći jedno u ovom primjeru: stavljajući za varijable odluke x_1, x_2, x_3, nula, određuju se dopunske varijable x_4, x_5, x_6 od (3.3).

Stoga početno rješenje,

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5,\ x_5 = 11,\ x_6 = 8 \qquad (3.5)$$

daje $z = 0$.

U smislu te prikazane velike strategije, trebalo bi sada potražiti moguće rješenje koje daje veću vrijednost z. Pronalaženje takvog rješenja nije teško. Na primjer, ako se drži da je $x_2 = x_3 = 0$ i povećavamo vrijednost od x_1, dobiva se da je $z = 5\,x_1 > 0$. Stoga, ako se zadrži da je $x_2 = x_3 = 0$ i stavi da je $x_1 = 1$, dobiva se da je $z = 5$ i $x_4 = 3$, $x_5 = 7$, $x_6 = 5$. Još bolje, ako se zadrži $x_2 = x_3 = 0$ i stavi da je $x_1 = 2$, dobiva se $z = 10$ i $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2$. Međutim, ako se zadrži $x_2 = x_3 = 0$ i stavi $x_1 = 3$, dobiva se $z = 15$ i $x_4 = x_5 = x_6 = -1$;a to se ne može prihvatiti, s obzirom na to da ograničenja zahtijevaju $x_i \geq 0$ za svaki i. Bit je u tome da se ne može povećavati x_1 previše. Pitanje je: za koliko se točno može povećavati x_1 (zadržavajući istovremeno $x_2 = x_3 = 0$) a da $x_4, x_5, x_6 \geq 0$?

Uvjet $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 5/2$, a slično tome, $x_5 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 11/4$ i $x_6 \geq 0$ je zadovoljen za $x_1 \leq 8/3$. Od tih triju ograničenja, prvo je najstrože. Povećavajući x_1 do te granice, dobiva se sljedeće moguće rješenje,

$$x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = \frac{1}{2} \qquad (3.6)$$

Valja primijetiti da to rješenje daje $z = 25/2$, što je zaista poboljšanje u odnosu na $z = 0$.

Zatim, mora se potražiti moguće rješenje koje je čak bolje od (3.6), u smislu da je na njemu funkcija cilja $z > 25/2$. Međutim taj je zadatak malo teži. Što je učinilo prvo poboljšanje tako lakim? Bilo je na raspolaganju ne samo moguće rješenje (3.5), nego isto tako i sustav linearnih jednadžbi (3.3) koji je omogućio određivanje poboljšanog mogućeg rješenja. Ako se želi nastaviti sličnim putem, mora se razviti novi sustav linearnih jednadžbi koje se odnose prema (3.6) isto kao što se sustav (3.3) odnosi prema (3.5).

Kakva svojstva mora imati novi sustav? Valja obratiti pažnju na to da (3.3) izražava varijable x_4, x_5, x_6 koje poprimaju pozitivne vrijednost u (3.5) pomoću vrijednost x_1, x_2, x_3 koje poprimaju vrijednost nula u (3.5). Slično tome novi sustav bi morao izražavati one varijable koje poprimaju pozitivne vrijednost u (3.6) pomoću varijabli koje poprimaju vrijednost nula u (3.6): ukratko, u sustavu se mora izraziti x_1, x_5, x_6, (a isto tako i z) pomoću x_2, x_3 i x_4 . Posebice, varijabla x_1, koja je upravo promijenila svoju vrijednost od nule na pozitivnu, morala bi promijeniti svoj položaj s desne strane prijeći na lijevu stranu sustava jednadžbi. Slično tome, varijabla x_4 , koja je upravo promijenila svoju vrijednost od pozitivne na nulu, morala bi se pomaknuti s lijeve strane na desnu stranu.

Da bi se izradio novi sustav, počet će se od varijable x_1. Željena formula za x_1 pomoću x_2, x_3 i x_4 lako se dobije iz prve jednadžbe u (3.3):

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \qquad (3.7)$$

a zatim, da bi se izrazili x_5, x_6 i z pomoću x_2, x_3 , x_4 jednostavno se uvrsti x_1 iz (3.7) u odgovarajuće redove od (3.3):

$$x_5 = 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_6 = 8 - 3\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 4x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$$

$$z = \quad 5\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + 4x_2 + 3x_3 = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

Stoga je novi sustav

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 \qquad\qquad + 2x_4 \\
x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\
z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4
\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Kao što je učinjeno u prvom ponavljanju, sada će se pokušati povećati vrijednost od z povećanjem vrijednosti odgovarajuće odabrane varijable s desne strane, dok će se u isto vrijeme zadržavati preostale varijable s desne strane na vrijednost nula. Valja obratiti pažnju na to da bi povećanje varijabli x_2 ili x_4 dovelo do smanjenja vrijednosti z, što je u suprotnosti s namjerom. Stoga, nema izbora: varijabla s desne strane, koja bi povećala vrijednost funkcije z, obvezno je x_3. Koliko se može povećati x_3 ? Odgovor se može pročitati izravno iz sustava (3.8): za $x_2 = x_4 = 0$, ograničenje $x_1 \geq 0$ daje $x_3 \leq 5$, a ograničenje $x_6 \geq 0$ daje $x_3 \leq 1$. Stoga je $x_3 = 1$ najbolje što se može učiniti; novo je moguće rješenje

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0 \qquad (3.9)$$

Valja obratiti pažnju na to da se vrijednost funkcije cilja z upravo povećala s 12.5 na 13.

Postupak se dalje nastavlja, varijable koje su pozitivne: x_1, x_3 , x_5, pojaviti će se na lijevoj strani novog sustava jednadžbi, dok će se varijable x_2, x_4 , x_6 čije su vrijednost nula pojaviti na desnoj strani.

Da bi se načinio sustav, počinje se s varijablom x_3 . Iz treće jednadžbe u (3.8), je $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$; zamjenjujući taj izraz za x_3 u preostalim jednadžbama u (3.8), dobiva se

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\ x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Sada slijedi treće ponavljanje. Prije svega, mora se odabrati s desne strane od (3.10) varijabla čije povećanje rezultira povećanjem funkcije cilja. Međutim, takve varijable nema: ako se poveća bilo koja od varijabli x_2, x_4 , x_6 vrijednost funkcije cilja će se umanjiti. Stoga, izgleda, da se došlo do zastoja. Zapravo, sama prisutnost takvog zastoja pokazuje da je gotovo; riješen je problem; rješenje opisano s (3.9) je optimalno. Zašto ? Odgovor je sakriven u zadnjem redu (3.10) :

$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \qquad (3.11)$$

Posljednje rješenje (3.9) daje $z = 13$; dokazivanje da je to rješenje optimalno vodi do dokazivanja da svako moguće rješenje zadovoljava nejednakost $z \leq 13$. S obzirom na to da svako moguće rješenje x_1, x_2, x_3 ,x_4, x_5 , x_6 zadovoljava (3.6) $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ i $x_6 \geq 0$, željena nejednakost $z \leq 13$ slijedi izravno iz (3.11).

Općenito, kod rješavanja standardnog problema linearnog programiranja:

$$\text{maksimum} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{uz ograničenja } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (3.12)$$

prvo se uvode dopunske varijable $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ i označi funkcija cilja sa z. To jest, definira se

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.13)$$

U okviru simpleks metode, skupu mogućih rješenja $x_1, x_2, \dots, x_n$ prema (3.12) pridružuje se skup nenegativnih brojeva $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ prema (3.13). U svakom ponavljanju, *iteraciji*, simpleks metode kreće se od nekoga mogućeg rješenja $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ do drugoga mogućeg rješenja $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{n+m}$ koje je bolje od onoga prethodnog u smislu da je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j > \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.14)$$

Zapravo, posljednja izjava nije sasvim ispravna: nejednakost nije uvijek stroga; detaljnije o tome u [8].

Kao što je uočeno, pogodno je povezati sustav linearnih jednadžbi sa svim mogućim rješenjima: takvi sustavi olakšavaju pronalaženje poboljšanih mogućih rješenja. To se čini odabirom vrijednosti varijabli s desne strane jednadžbe i računanjem vrijednosti varijabli s lijeve strane jednadžbi te funkcije cilja. Relacije (3.3), (3.8) i (3.10) sadrže istu informaciju glede ovisnosti između sedam varijabli. Ipak, svaka od tri relacije predstavlja ovu informaciju na svoj, vlastiti, način. Relacija (3.3) sugerira da je slobodan izbor numeričke vrijednosti od x_1, x_2 i x_3, dok su vrijednosti x_4, x_5, x_6 i z određene. U ovim relacijama, varijable odluke, x_1, x_2, x_3 ponašaju se kao nezavisne varijable, dok su z i dopunske varijable x_4, x_5, x_6 zavisne o njima. Relacija (3.8) predstavlja x_2, x_3, x_4 kao nezavisne i x_1, x_5, x_6 i z kao zavisne. U relaciji (3.10), nezavisne varijable su x_2, x_4, x_6, a zavisne su x_3, x_1, x_5, z .

Općenito: jednadžbe svake relacije moraju izraziti m varijabli i funkciju cilja z pomoću preostalih n - m varijabli.

Varijable koje se pojavljuju na lijevoj strani relacija nazivaju se *bazične*; varijable koje se pojavljuju na desnoj strani su *nebazične*. Naravno bazične varijable se mijenjaju svakom iteracijom. Na primjer u prvoj iteraciji x_1 postaje bazična, dok x_4 postaje nebazična. U svakoj iteraciji, prvo se odabiru varijable koje nisu bazične, a koje moraju postati bazične, te se tada otkriva koja bazična varijabla mora postati nebazična. Odabir ulazne varijable je motiviran željom za povećanjem vrijednosti z; određivanje varijable koja postaje nebazična zasnovano je na zahtjevu da sve varijable moraju biti nenegativne. Izlazna varijabla je ona bazična varijabla koja daje najstrožu gornju granicu na porast ulazne varijable.

Može se odlučiti za različito zapisivanje linearnog problema. Ovdje će se uglavnom prvo pisati funkcija cilja i umjesto odrediti maksimum ili minimum jednostavno će se pisati max (   ) ili min (   ), te se može crtom odvojiti funkcija cilja od ograničenja. Razmotrit će se još jedan primjer.

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\multicolumn{7}{l}{\underline{\max(5x_1+5x_2+3x_3)}}\\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \le & 3\\
-x_1 & & & + & 3x_3 & \le & 2\\
2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \le & 4\\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \le & 2
\end{array}
\qquad (3.15)
$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Uvode se dopunske varijable i funkcija z

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\multicolumn{9}{l}{\underline{z=5x_1+5x_2+3x_3}}\\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3\\
x_5 & = & 2 & + & x_1 & & & - & 3x_3\\
x_6 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3\\
x_7 & = & 2 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3
\end{array}
\qquad (3.16)
$$

Početno moguće rješenje je

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=3,\ x_5=2,\ x_6=4,\ x_7=2$$

U prvoj iteraciji, nastojat će se povećati vrijednost z, tako da se učini jedna od desnih varijabli pozitivnom. U ovom primjeru, bilo koja od triju varijabli x_1, x_2, x_3 odgovarala bi. U malim primjerima, uobičajena je praksa odabrati varijablu, koja, u formuli za z, ima najveći koeficijent. Povećanje u toj varijabli rezultirati će i povećanjem z na najbrži način (ali ne obvezno na najvišu razinu). U ovom slučaju to pravilo ostavlja izbor između x_1 i x_2; birajući proizvoljno, odlučuje se učiniti x_1 pozitivnim. Kako se povećava vrijednost od x_1, tako raste i vrijednost od x_5. Međutim, vrijednosti od x_4, x_6 i x_7 se smanjuju, i ni jednoj nije dopušteno da postane negativna. Od triju ograničenja $x_4 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$, koja nameću gornje granice na porast od x_1, zadnje je ograničenje $x_7 \ge 0$ najstrože: ono daje $x_1 \le 1$. U poboljšanom mogućem rješenju, bit će $x_1 = 1$ i $x_7 = 0$. Kao i u prvom primjeru x_1 prelazi na lijevu stranu, a x_7 na desnu. Iz četvrte jednadžbe u (3.16) je

$$x_1 = 1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7 \qquad (3.17)$$

Uvrštavajući x_1 iz (3.17) u preostale jednadžbe od (3.16), dolazi se do relacija

$$z = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_7$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\
x_4 &= 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7 \\
x_5 &= 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\
x_6 &= 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7
\end{aligned} \tag{3.18}$$

U ovom primjeru, varijabla koja mora postati bazična tijekom druge iteracije je sasvim nedvosmisleno x_3. To je jedina varijabla koja nije bazična u (3.18), a čiji je koeficijent u funkciji cilja pozitivan. Od četiri bazične varijable, x_6 nameće najstrožu gornju granicu na povećanje od x_3, te stoga mora postati nebazična, pa je

$$z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{3}x_7 - \frac{11}{6}x_6$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_6 \\
x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{6}x_6 \\
x_4 &= 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\
x_5 &= \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{5}{6}x_6
\end{aligned} \tag{3.19}$$

U trećoj iteraciji, ulazna varijabla je x_2 (postaje bazična), a izlazna x_5 (postaje nebazična). Nakon treće iteracije je

$$z = 10 - 2x_7 - x_6 - x_5$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{8}{29} - \frac{8}{29}x_7 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{6}{29}x_5 \\
x_3 &= \frac{30}{29} - \frac{1}{29}x_7 - \frac{2}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_5 \\
x_1 &= \frac{32}{29} - \frac{3}{29}x_7 - \frac{9}{29}x_6 + \frac{5}{29}x_5 \\
x_4 &= \frac{1}{29} + \frac{28}{29}x_7 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{21}{29}x_5
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Sada ni jedna nebazična varijabla ne može postati bazična bez smanjenja vrijednosti od z. Stoga, zadnja iteracija daje optimalno rješenje problema. To rješenje je

$$x_1 = \frac{32}{29}, \qquad x_2 = \frac{8}{29}, \qquad x_3 = \frac{30}{29}$$

i tada daje $z = 10$.

3.1 Simpleks tablica

Često postoji više od jednog načina opisivanja određenog algoritma. Opisi koji imaju za cilj razjašnjenje važnih postupaka zbog didaktičkih prednosti su često sasvim različiti od onih koji sugeriraju učinkovite realizacije na računalu. Simpleks metoda nije izuzetak. U ovom trenu osnovní cilj je ponuditi alate za objašnjavanje osnovnih principa simpleks procedure. Međutim, pri uvođenju metoda za rješavanje velikih problema na računalu, razmatranja učinkovitosti računanja i numerička točnost zasjenjuju didaktičke prednosti.

Simpleks metoda je *opća* metoda, što će reći da rješava svaki problem linearnog programiranja. Simpleks metoda spada u *iterativne metode*. Kao što je već utvrđeno, ona polazi od nekoga mogućeg rješenja pa ga u nizu koraka poboljšava dok ne dođe do najboljeg, optimalnog rješenja. U svakom koraku prema optimalnom rješenju procedura te metode se ponavlja, *iterira*. Zato se metoda lako primjenjuje na računalu. Simpleks metoda je *konačna* iterativna metoda jer u konačnom broju iteracija dolazi do optimalnog rješenja.

Da bi se objasnila simples tablica, pogodno je ograničenja problema zapisati u vektorskom obliku. Pokazat će se to na prvom primjeru kojim se bavilo u prethodnoj točki:

$$\begin{array}{l}
\underline{\max(5x_1 + 4x_2 + 3x_3)} \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array} \tag{3.21}$$

Uvođenjem dopunskih varijabli x_4, x_5, x_6, ograničenja iz (3.21) prelaze u *kanonski oblik*, nejednadžbe prelaze u jednadžbe. Dopunske varijable u funkciji cilja imaju koeficijente $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, te je kanonski linearni problem

$$\begin{array}{l}
\underline{\max(5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)} \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{array} \tag{3.22}$$

Ograničenja iz (3.22) mogu se napisati u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}x_4+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}x_5+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}x_6=\begin{bmatrix}5\\11\\8\end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

Ta vektorska jednadžba može se kraće (uz oznake A_j vektor uz x_j) pisati ovako:

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4+A_5x_5+A_6x_6=B \quad (x_j \geq 0) \qquad (3.24)$$

Vektori A_4, A_5, A_6 su *jedinični vektori* I_1, I_2, I_3 (I_i ima na i-tom mjestu jedinicu a na ostalim mjestima nulu). Oni su linearno nezavisni i čine bazu; nazivaju se *bazični vektori*. Simpleks metoda ne radi bilo s kojim mogućim rješenjem, već samo s tzv. bazičnim mogućim rješenjem. Moguće rješenje je svaki vektor

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

čije su komponente $x_j \geq 0$ ($j = 1,2,...,6$) koeficijenti linearne kombinacije (3.24).

Općenito moguće rješenje je *bazično* ako ima najviše m pozitivnih komponenata u X tj. najviše toliko pozitivnih komponenata koliko ih imaju vektori A_j u X (u općem slučaju m je broj ograničenja a n broj nepoznanica). Iz uvjeta nenegativnosti proizlazi da su ostale komponente u X jednake nuli. Ako moguće rješenje ima točno m pozitivnih komponenata , tada se naziva *bazično nedegenerirano rješenje.* Ako, pak, moguće rješenje ima manje od m pozitivnih komponenata, tada se naziva *bazično degenerirano rješenje.* Ubuduće će se raditi uz pretpostavku da je bazično rješenje nedegenerirano. Varijable $x_j > 0$ u bazičnom rješenju su bazične varijable , a $x_j = 0$ nebazične.

Za početno rješenje razmatranog problema (3.22) pogodno je uzeti ovo bazično rješenje:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\\11\\8\end{bmatrix}$$

Ovom rješenju odgovara baza { A_4 ,A_5 , A_6 } trodimenzionalnoga vektorskog prostora. Još jednom će se ponoviti što je baza.

Baza m-dimenzionalnoga vektorskog prostora je svaki skup od m linearno nezavisnih vektora, a skup vektora je linearno nezavisan ako se nijedan vektor iz tog skupa ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih.

Na primjer, nijedan od jediničnih vektora A_4, A_5, A_6 ne može se izraziti pomoću ostala dva kao njihova linearna kombinacija. Zbog toga skup jediničnih vektora A_4, A_5, A_6 čini jednu bazu. Svaki vektor iz vektorskog prostora koji nije u bazi može se izraziti kao linearna kombinacija vektora baze. Na primjer,

$$A_1 = 2\,A_4 + 4\,A_5 + 3\,A_6$$

Očigledno je da je linearna kombinacija vektora baze na desnoj strani znaka jednakosti doista jednaka vektoru A_1 . Naime,

$$A_1 = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$$

Slično je

$$A_2 = 3\,A_4 + A_5 + 4\,A_6$$

$$A_3 = A_4 + 2\,A_5 + 2\,A_6 .$$

Kad se zna što je baza i bazično rješenje, može se prijeći na samu simpleks tablicu.

Koeficijenti uz nepoznanice upisuju se kao stupci, posebno su istaknute komponente vektora B i bazični vektori A_4, A_5, A_6 u prvoj simpleks tablici

1. SIMPLEKS TABLICA – T_1

c_j		5	4	3	0	0	0	
	BAZA	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
0	A_4	2	3	1	1	0	0	5
0	A_5	4	1	2	0	1	0	11
0	A_6	3	4	2	0	0	1	8
	$z_j - c_j$	– 5	– 4	– 3	0	0	0	0

U bazi su jedinični vektori A_4 , A_5 , A_6 čiji su koeficijenti nula u funkciji cilja, što je napisano kao c_j. Postavlja se pitanje: kako poboljšati program. Vrijednost funkcije cilja za ovaj program je nula ($z = 5\cdot0+11\cdot0+8\cdot0 = 0$). Prvo se donosi odluka koji će vektor ući u bazu. Uvede li se neka aktivnost A_j u program (u bazu), mora neki bazični vektor napustiti bazu, njegova bazična varijabla poprima vrijednost nula. Ako se u program uvede, recimo, aktivnost A_1 da operira na razini 1, mora se smanjiti bazična aktivnost A_4 za 2, A_5 za 4 i A_6 za 3 jedinice. Kakav će efekt imati to smanjenje bazičnih aktivnosti u funkciji cilja? Za jedinicu povećanja razine aktivnosti A_j od 0 na 1 taj efekt će biti jednak

$$z_j = c_4\, a_{1j} + c_5\, a_{2j} + c_6\, a_{3j} \qquad (3.25)$$

To je vrijednost za koju se smanji ukupni efekt u funkciji cilja. U ovom primjeru je

$$z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 0$$

Budući da dopunske varijable x_4, x_5, x_6 u funkciji cilja imaju koeficijente $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, to je $z_j = 0$ za svako $j = 1,2,...,6$.

Koliki je doprinos jedinice vektora A_j ukupnom efektu u funkciji cilja? Očigledno je taj doprinos jednak c_j (npr. 3.22).

Sada treba usporediti efekt smanjenja bazičnih aktivnosti s doprinosom vektora A_j, tj. z_j s c_j. Ako je $z_j > c_j$, nema smisla uvoditi u program vektor A_j. Ako je pak $z_j = c_j$ i A_j se uvede u program, taj će se novi program doduše razlikovati od starog, ali neće biti ništa bolji. Ako je $z_j < c_j$, uvođenje vektora A_j u program izmijenit će ga i poboljšati. Prema tome, kriterij za izbor vektora koji će ući u bazu je $z_j < c_j$ ili $z_j - c_j < 0$. Ta razlika je zapravo stopa porasta funkcije cilja z. Zato je razumljivo što će se izabrati ona aktivnost A_s za koju je stopa porasta funkcije cilja $| z_j - c_j |$ maksimalna, to jest

$$z_s - c_s = \min_j (z_j - c_j), \qquad z_j - c_j < 0 \qquad (3.26)$$

Iz simpleks tablice vidi se da je

$$z_1 - c_1 = -5 = \min_j (z_j - c_j), \text{ za } z_j - c_j < 0 .$$

Prema tome, izbor je pao na aktivnost A_1, što je u tablici zasjenčeno. Vektor A_1 ulazi u bazu. Postavlja se pitanje: koji vektor izlazi iz baze. Da se ne bi dobile negativne komponente vektora B, traži se

$$\min\left\{\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{5}{2}$$

Iz baze izlazi vektor A_4 a ulazi A_1. Izbor vektora koji izlazi iz baze u općem slučaju određuje se ovako

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{is}}\right) \qquad a_{is} > 0 \qquad (3.27)$$

Izabrani stupac označen je sa s, a izabrani redak s r. Na presjeku s – tog stupca i r – tog retka je element a_{rs}. On se zove *ključni ili temeljni element.* Taj element je djelitelj koji odgovara minimalnom kvocijentu. Sa strane u relaciji (3.27) naznačeno je da divizor a_{is} mora biti pozitivan. U ovom primjeru svi elementi u izabranom stupcu s = 1 pozitivni su.

Transformacija prve u drugu simpleks tablicu povodi se prema sljedećim formulama:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.28)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{rj}a_{is} \quad (i \neq r), \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.29)$$

gdje su a'_{ij} elementi nove tablice, a a_{ij} stare tablice, prema (3.29) $a'_{is} = 0$ za i=1,2,... osim $a'_{rs}=1$. Iz (3.28) slijedi da svaki element a_{rj} u izabranom retku r stare tablice treba podijeliti s ključnim elementom a_{rs} da se dobije odgovarajući element nove tablice. Prema (3.29) element iz i –tog retka j – tog stupca nove tablice a'_{ij} dobije se tako da se od odgovarajućeg elementa stare tablice a_{ij} oduzme produkt elementa a_{is} iz izabranog stupca s i retka i s novoformiranim elementom a_{rj}. Na taj način dobili su se elementi druge simpleks tablice.

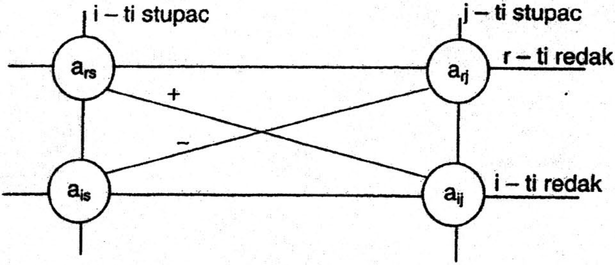
2. SIMPLEKS TABLICA – T_2

c_j		5	4	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
5	A_1	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	A_5	0	– 5	0	– 2	1	0	1
0	A_6	0	– 1/2	1/2	– 3/2	0	1	1/2
	$z_j - c_j$	0	7/2	– 1/2	5/2	0	0	25/2

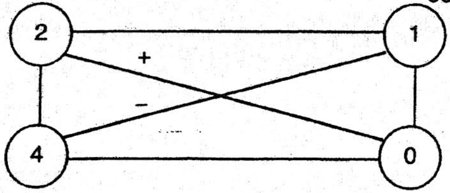
Formula (3.29) može se napisati na sljedeći način:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}} \qquad (3.30)$$

Za svaki element prethodne tablice (osim elemenata u retku gdje je ključni element) može se uočiti četverokut ili determinanta drugog reda, gdje je vrijednost brojnika izraza (3.30) produkt na glavnoj dijagonali umanjen za produkt na sporednoj dijagonali:



Uzme li se element a'_{24} nove tablice, odgovarajući četverokut u staroj tablici je:



odnosno

$$a'_{24} = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 4}{2} = -2$$

ili drugi primjer

$$a'_{21} = \frac{2 \cdot 4 - 4 \cdot 2}{2} = 0$$

U drugoj simpleks tablici uočava se da vektor koji je ušao u bazu, u ovom slučaju A_1, ima na mjestu ključnog elementa komponentu 1 a sve ostale su komponente nula. Transformacija iz 1. simpleks tablice u 2. simpleks tablicu mogla se načiniti i na sljedeći način:

- redak u kojem je ključni element podijeli se s ključnim elementom i tako se dobije prvi redak u 2. simpleks tablici;

- prvi redak 2. simpleks tablice (redak u kojem je bio ključni element prethodne tablice) pomnoži se s – 4 i zbroji s drugim retkom 1. simpleks tablice; tako se dobije drugi redak 2. simpleks tablice;

- prvi redak 2. simpleks tablice pomnoži se s – 3 i zbroji s trećim retkom prethodne simpleks tablice i dobije se treći redak 2. simpleks tablice.

U 2. simpleks tablici $z_3 - c_3 < 0$, znači vektor A_3 ulazi u bazu. Treba naći vektor koji će izići iz baze. Element $a_{23} = 0$, pa on ne može biti ključni element.

Traži se

$$\min\left\{\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 1$$

element a_{33} je ključni element, znači u bazu ulazi vektor A_3 a izlazi vektor A_6.

Novu bazu u 3. simpleks tablici čine vektori $\{A_1, A_5, A_3\}$.

Treći redak 2. simpleks tablice, redak gdje se nalazi ključni element, podijeli se s ključnim elementom tj. s 1/2 ili pomnoži s 2, i tako se dobije treći redak 3. simpleks tablice.

Element $a_{23} = 0$ u 2. simpleks tablici i taj se redak prepiše u 3. simpleks tablicu. Da bi se na mjestu a_{13} u 3. simpleks tablici dobila nula, treći redak 3. simpleks tablice pomnoži se s $-1/2$ i zbroji s prvim retkom prethodne simpleks tablice te se dobije prvi redak nove tablice

3. SIMPLEKS TABLICA – T_3

c_j		5	4	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
5	A_1	1	2	0	2	0	−1	2
0	A_5	0	−5	0	−2	1	0	1
3	A_3	0	−1	1	−3	0	2	1
	$z_j - c_j$	0	3	0	1	0	1	13

Kako su svi elementi $z_j - c_j \geq 0$, došlo se do optimalnog rješenja:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0$$

Vrijednost funkcije cilja $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13$, pročita se ispod vektora B.

Svako bazično rješenje koje se dobilo simpleks metodom bilo je nedegenerirano. Dobivena su 3 različita bazična moguća rješenja:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svakom tom rješenju odgovara jedna ekstremna točka skupa svih mogućih rješenja u trodimenzionalnom prostoru, to jest

$$(0, 0, 0), \qquad (5/2, 0, 0), \qquad (2, 0, 1)$$

Ravnajući se po kriteriju najveće stope rasta, išlo se po simpleks metodi od ishodišta (0,0,0), preko točke (5/2, 0,0) do optimalne točke (2, 0,1). To je najkraći put do optimalnog rješenja (točke u kojoj funkcija cilja poprima ekstremnu vrijednost).

U svakom slučaju, simpleks metoda polazi od neke ekstremne točke pa, idući od jedne do druge susjedne ekstremne točke, dospjeva do optimalne.

Da se ne zna simpleks metoda morala bi se odrediti sva bazična rješenja, kojih ima koliko i različitih baza. U ovom primjeru od 6 vektora A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ima najviše $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ baza.

3.2 Rješenje standardnog problema minimuma – Charnesova M procedura

Razmatrat će se standardni problem minimuma, npr. zadatak 4 u poglavlju 2. Matematički model tog problema je

$$\min\ (50x_1 + 40x_2)$$

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 &\geq 900 \\ 40x_1 + 30x_2 &\geq 1200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ograničenja se mogu pisati u obliku jednadžbi uvodeći dopunske varijable $v_1 \geq 0$, i $v_2 \geq 0$. Tada je:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 - v_1 &= 900 \\ 40x_1 + 30x_2 - v_2 &= 1200 \end{aligned}$$

Uočava se da vektori koeficijenata varijabli v_1 i v_2 nisu jedinični vektori s pozitivnim komponentama. Takvi jedinični vektori ne mogu dati nenegativno početno bazično rješenje.

Uvode se nove varijable w_1 i w_2 koje se nazivaju *artificijelne* (umjetne) varijable, jer nemaju konkretnog značenja, osim što služe kao kalkulativno sredstvo. Da se te varijable ne bi pojavile u optimalnom rješenju, pridružuje im se nespecificirani veliki pozitivni broj M kao koeficijent u funkciji cilja. Tako je originalni problem prešao u ovaj problem:

$$\min\ (50x_1 + 40x_2 + 0v_1 + 0v_2 + Mw_1 + Mw_2)$$

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 - v_1 + w_1 &= 900 \\ 40x_1 + 30x_2 - v_2 + w_2 &= 1200 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad v_1, v_2 \geq 0, \quad w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tu metodu pridruživanja broja M artificijelnom vektoru, da bi ga istjerao iz baze, prvi je sugerirao A. Charnes [10].

Ako originalni problem ima jedno moguće rješenje, tada i prošireni sustav ima neko nenegativno rješenje. Ako ne postoji moguće rješenje originalnog problema, tada će minimalno nenegativno rješenje proširenog problema sadržavati bar jednu pozitivnu artificijelnu varijablu $w_k > 0$, dakle u tom slučaju ne može se osloboditi umjetnih varijabli.

. U početnoj tablici s lijeve strane figurira artificijelna baza $[W_1, W_2]$.

	50	40	0	0	M	M	
BAZA	A_1	A_2	V_1	V_2	W_1	W_2	B
M W_1	20	30	- 1	0	1	0	900
M W_2	40	30	0	- 1	0	1	1200
$z_j - c_j$	60·M	60·M	- M	- M			2100·M
	- 50	- 40			0	0	
40 A_2	2/3	1	- 1/30	0	-	0	30
M W_2	20	0	1	- 1	-	1	300
$z_j - c_j$	20·M		M	- M	-		300·M +
	- 70/3	0	- 4/3			0	1200
40 A_2	0	1	- 1/15	1/30	-	-	20
50 A_1	1	0	1/20	- 1/20	-	-	15
$z_j - c_j$	0	0	- 1/6	- 7/6			1550

Uz ove tablice potrebna su neka objašnjenja. Ona se tiču prije svega dvaju redaka $m+1$ i $m+2$ koji su sadržani u $z_j - c_j$. Brojevi u retku $m+1$ su koeficijenti od M, brojevi u retku $m+2$ su nezavisni od M u definiciji $z_j - c_j$. Na primjer, u prvoj tablici je

$$z_1 - c_1 = 20M + 40M - 50 = 60M - 50$$
$$z_2 - c_2 = 30M + 30M - 40 = 60M - 40 \quad \text{itd.}$$

Budući da je broj M po pretpostavci velik pozitivni broj, pri traženju minimuma u bazu ulazi onaj vektor pod kojim je najveći pozitivni broj, u ovom slučaju to je A_2. Vektor koji izlazi iz baze dobije se tako da se odredimo najmanji kvocijent komponenata vektora B i komponenata vektora koji ulazi u bazu. Kako je

$$\min\left\{\frac{900}{30} = 30, \frac{1200}{30} = 40\right\} = 30$$

ključni element je $a_{12} = 30$; vektor W_1 izlazi iz baze. Čim se jedan artificijelni vektor eliminira iz baze, taj vektor više nije potreban u tablici; zato u drugoj tablici nema komponenata vektora W_1. Naime, može se pokazati da se artificijelni vektor nikada ne vraća u bazu kad je jednom napusti [2]. Kao i ranije, prvi redak druge tablice dobiven je tako da se prvi redak prethodne tablice podijelio s ključnim elementom, tj. sa 30. Drugi redak druge tablice dobio se tako da se prvi redak druge tablice pomnožio s –30 i zbrojio s drugim retkom prve tablice.

U drugoj tablici najveći pozitivni broj u retku $z_j - c_j$ je ispod vektora A_1; taj vektor ulazi u bazu a izlazi W_2.

Redak $z_j - c_j$ u trećoj tablici sadrži samo 0 i negativne brojeve; došlo se do optimalnog rješenja: $x_1 = 15$, $x_2 = 20$ i funkcija cilja $z = 1550$.

3.3 Opći oblik problema linearnog programiranja

U općem obliku problema linearnog programiranja postoje ograničenja $\geq$, $\leq$, $=$. Pomoću simpleks tablice rješava se sljedeći linearni problem:

$$\underline{\min\left(8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 6x_4\right)}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 80 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \geq & 60 \\
2x_1 & + & 5x_2 & & & + & 3x_4 & = & 40
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Kanonski oblik postavljenog problema je

$$\underline{\min\left(8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 0u_1 + 0v_1 + Mw_1 + Mw_2\right)}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & u_1 & & & & & & & = & 80 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & & & - & v_1 & + & w_1 & & & = & 60 \\
2x_1 & + & 5x_2 & & & + & 3x_4 & & & & & & & + & w_2 & = & 40
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad u_1, v_1 \geq 0, \quad w_1, w_2 \geq 0$$

Uvedene su dopunske varijable u_1, v_1, koje ulaze u funkciju cilja s koeficijentom 0 te artificijelne varijable w_1, w_2 koje u funkciji cilja kod traženja minimuma imaju koeficijent + M. Ako se traži maksimum artificijelne varijable, u funkciju cilja ulaze s koeficijentom – M. Simpleks tablica postavljenoga linearnog problema je

	8	12	2	6	0	0	M	M	
	A_1	A_2	A_3	A_4	U_1	V_1	W_1	W_2	B
0 U_1	4	6	3	2	1	0	0	0	80
M W_1	3	1	5	1	0	–1	1	0	60
M W_2	2	5	0	3	0	0	0	1	40
$z_j - c_j$	5M – 8	6M – 12	5M – 2	4M – 6	0	– M	0	0	100·M

	8	12	2	6	0	0	M	M	
	A_1	A_2	A_3	A_4	U_1	V_1	W_1	W_2	B
0 U_1	8/5	0	3	−8/5	1	0	0		32
M W_1	13/5	0	5	2/5	0	− 1	1		52
12 A_2	2/5	1	0	3/5	0	0	0		8
$z_j - c_j$	13/5·M − 16/5	0	5 M − 2	2/5 M + 6/5	0	− M	0	0	52 M + 96
0 U_1	1/25	0	0	−46/25	1	3/5			4/5
2 A_3	13/25	0	1	2/25	0	− 1/5			52/5
12 A_2	2/5	1	0	3/5	0	0			8
$z_j - c_j$	− 54/25	0	0	34/25	0	− 2/5			584/5
0 U_1	19/15	46/15	0	0	1	3/5			76/3
2 A_3	7/15	− 2/15	1	0	0	− 1/5			28/3
6 A_4	2/3	5/3	0	1	0	0			40/3
$z_j - c_j$	− 46/15	− 34/5	0	0	0	−2/5			296/3

Optimalno rješenje je: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{28}{3},\ x_4 = \frac{40}{3},\ z = \frac{296}{3}$

Lako je provjeriti da to rješenje zadovoljava zadana ograničenja.

Odluke o uvođenju dopunskih i artificijelnih varijabli te o koeficijentima simpleks jednadžbi i koeficijentima u funkciji cilja može se tablično prikazati:

<table>
<tr><td colspan="3">Tablica za izbor dopunskih i artificijelnih varijabli</td><td colspan="3">Tip početnih uvjeta</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>≤</td><td>=</td><td>≥</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pri pretvaranju početnih uvjeta u simpleks jednadžbe uvode se</td><td colspan="2">dopunske varijable</td><td>DA</td><td>NE</td><td>DA</td></tr>
<tr><td colspan="2">artificijelne varijable</td><td>NE</td><td>DA</td><td>DA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Koeficijenti u simpleks jednadžbama</td><td colspan="2">uz dopunske varijable</td><td>+ 1</td><td>/</td><td>- 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">uz artificijelne varijable</td><td>/</td><td>+ 1</td><td>+ 1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Koeficijenti u funkciji cilja</td><td colspan="2">uz dopunske varijable</td><td>0</td><td>/</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">uz artificijelne varijable</td><td>traži se maksimum</td><td>/</td><td>- M</td><td>- M</td></tr>
<tr><td>traži se minimum</td><td>/</td><td>+ M</td><td>+ M</td></tr>
</table>