# 5 Elementarni zadaci: Centralni i periferiski ugao. Pravilni mnogouglovi.

Elementarna pitanja:

1. Kako glase definicije centralnog ugla nad tetivom, centralnog ugla nad lukom, periferiskog ugla nad tetivom, periferiskog ugla nad lukom?
(centralni ugao nad tetivom je ugao čiji se vrh nalazi na centru kruga a njegovi kraci prolaze kroz krajnje tačke tetive...)
2. U kakvom su odnosu centralni i periferiski ugao nad tetivom?
3. Zbir oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom iznosi...
4. Kakvu osobinu imaju odsjčci tangenti na krug? Kako bi to dokazali?

**1.** Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

**2.** Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

**3.** U dati pravilni šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ima $ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB||ED$, $BC||EF$, $CD||AF$) i dijagonale $AD$, $BE$ i $CF$ se polove). Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

**4.** Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, gdje je $a$ dužina stranice.

**5.** Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Polazeći od definicije pravilnog šestougla (pretpostavljajući da više ništa ne znamo o pravilnom šestouglu) dokazati da se dijagonale $AD$, $CF$ i $BE$ sijeku u istoj tački $S$.

## Geometrija u prostoru (nastavak)

Neke teoreme i njihove posljedice:

**20.** Ako je ugao u prostoru sadržan (okružen, ograničen) sa tri ugra iz ravni, bilo koja dva od njih su zajedno veći od trećeg.

**Poliedar** je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

**21.** Svaki ugao u prostoru je sadržan unutar uglova iz ravni (ivičnih uglova) čiji ukupan zbir je manji od četri prava ugla.

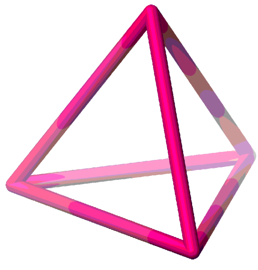
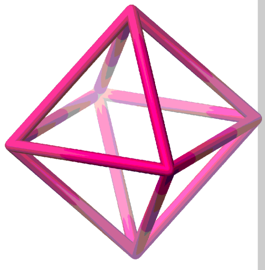
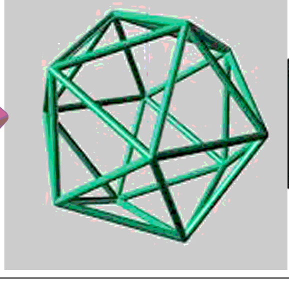
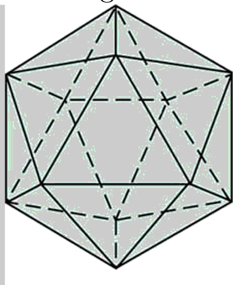
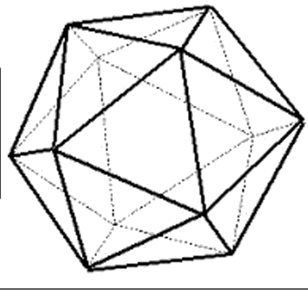
**Korolar** Postoji samo pet pravilnih (regularnih) poliedara.

($i$) Najmanje tri strane se moraju sijeći da bi formirale ugao u prostoru bilo kojeg regularnog poliedra.

($ii$) Suma ivičnih uglova (uglova iz ravni) koji formiraju bilo koji ugao u prostoru je manja od četri prava ugla.

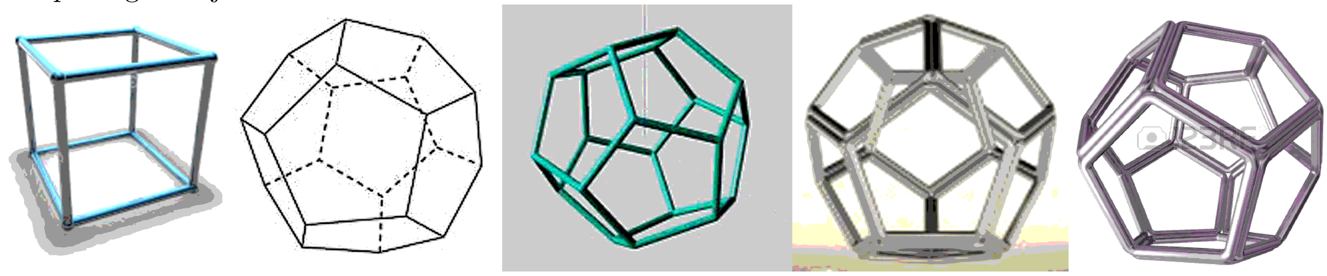
Sad primjetimo da je zbir tri ugla pravilnog šestougla jednak zbiru četri prava ugla, a da je zbir tri ugla bilo kojeg pravilnog mnogougla sa više od šest uglova, veći od zbira četri prava ugla. Time stranice pravilnih poliedara moraju biti istostranični trouglovi, kvadrati, ili pravilni petouglovi.

**21.1.** Ako su strane istostranični trouglovi, svaki ugao u prostoru (poliedarski ugao) se može formirati sa: ($i$) Tri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo tetraedar. ($ii$) Četri istostranična trougla. Tijelo tako dobijeno nazivamo oktaedar. ($iii$) Pet istostraničnih trouglova. Tijelo tako dobijeno je ikosaedar. Zbir uglova šest istostraničnih trouglova je četri prava ugla i time nemogu formirati ugao u prostoru.

**21.2.** Ako su strane kvadrati, svaki ugao u prostoru će biti formiran pomoću tri kvadrata. Tijelo tako formirano se naziva kocka. Zbir uglova četri kvadrata je jednak zbiru četri prava ugla i time ne može formirati ugao u prostoru.

**21.3.** Slično, ako posmatramo stranice pravilnog petougla, svaki ugao u prostoru će biti formiran sa tri takva petougla. Tijelo tako formirano se naziva dodekaedar.



**22.** Presjek sfere i ravn je krug.

**23.** Kriva nastala presjekom dvije sfere je krug.

**24.** Osobine radikalne ravni (radikalna ravan je ravan koja sadrži krug dobijen presjekom dvije sfere), koaksalnih krugova (koaksalni krugovi su krugovi čiji su centari kolinearani i koji djele jednu zajednički radikalnu pravu) i centara sličnosti dvije sfere slijedi iz prirodnog poopštenja odgovarajućih tvrdnji koje se odnose na krugove iz ravni.

**25.** Ako je radius (poluprečnik) sfere $r$, tada se površina i zapremina sfere računa, redom, prema sljedećim formulama $4\pi r^2$ i $\frac{4}{3}\pi r^3$.

**26.** Samo se jedna sfera može nacrtati kroz četri tačke koje ne pripadaju ravni, i koje imaju osobinu da se ni jedne tri ne nalaze na pravoj.

**27.** U opštem slučaju može se nactrati osam sfera koje će dodirivati stranice tetraedra.

**28.** Ako se vrhovi $A, B, C, D$ tetraedra spoje sa centroidama $A', B', C', D'$ suprotnih strana, prave $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ se sijeku u tački $G$, koja se naziva centroid tetraedra, takvoj da $AG = 3GA'$, i tako dalje.

**29.** Ako radius (poluprečnik) baze (kruga) kupe iznosi $r$, a njezina generatrisa i visina iz vrha do baze su $l$ i $h$, tada površina omotača i zapremina kupe su, redom, $\pi rl$ i $\frac{\pi}{3}r^2h$.

**6.** Skup pravih ima osobinu da se svake dvije prave iz tog skupa sijeku. Ako sve prave iz tog skupa ne prolaze kroz istu tačku dokazati da sve one pripadaju istoj ravni.

**7.** Prava $a$ siječe ravan $\alpha$ u tački $O$ i pri tome obrazuje podudarne uglove sa tri prave koje prolaze kroz tačku $O$ i leže u ravni $\alpha$. Dokazati da je prava $a$ normalna na ravan $\alpha$.

**8.** Prava $a$ je normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $N$. Neka je $b$ proizvoljna prava ravni $\alpha$ incidentna sa tačkom $N$. Ako je $M$ ($M \neq N$) tačka prave $b$, i $c$ prava ravni $\alpha$ koja sadrži tačku $M$ i normalna je na pravu $b$, tada je prava $c$ normalna na pravu $p(M, A)$, gdje je $A$ proizvoljna tačka prave $a$. Dokazati.

**Napomena:** ova tvrdnja je poznata pod imenom Teorema o tri normale.

**9.** Neka je $\ell$ prava koja nije normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $L$. Od svih pravih ravni $\alpha$ koje prolaze kroz tačku $L$, najmanji ugao sa pravom $\ell$ obrazuje njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$. Dokazati.

**10.** Pravougli trougao $\triangle ABC$, sa pravim uglom kod tjemena $C$, naslanja se katetom $BC$ na ravan $\alpha$ i nagnut je prema ravni pod uglom od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti odstojanje tjemena $A$ od ravni $\alpha$, ako je $BC = 2$ cm i $AB : AC = 3 : 1$.

**11.** Nastavak Zadatka broj 10. Odrediti ugao $\varphi$ između hipotenuze i ravni $\alpha$.

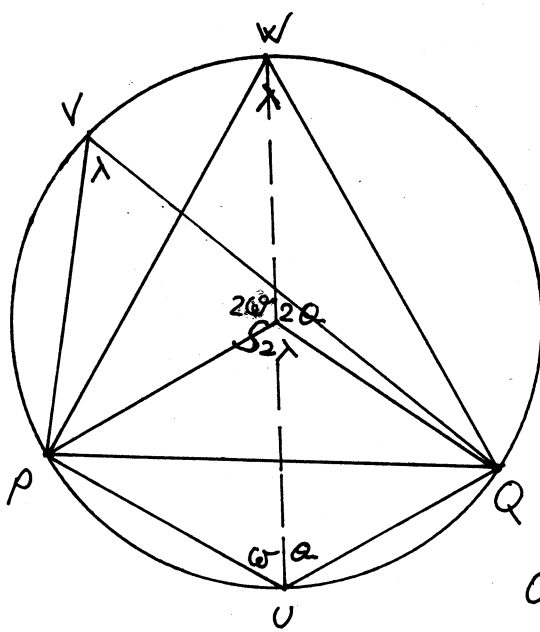
**12.** Jedna od kateta jednakokrakog pravouglog trougla $\triangle ABC$ ($AC$ i $BC$ su katete, $AB$ hipotenuza) nalazi se u ravni $\alpha$, a druga je nagnuta prema ravni pod uglom od $45°$. Ako je $A_1$ ortogonalna projekcija tačke $A$ na ravan $\alpha$, a stranica $BC$ ima dužinu $a$, izračunati dužine stranica trougla $\triangle ACA_1$.

**13.** Duž $AB$ je nagnuta prema ravni $\pi$ pod uglom od $45°$. Druga duž, duž AC, leži u ravni $\pi$ i sa projekcijom duži $AB$ određuje ugao od $45°$. Izračunati ugao $\measuredangle BAC$.

**14.** Na papiru je nacrtan paralelogram $\square ABCD$ takav da je $AD \cong 2AB = 20$ cm i ugao $\measuredangle A = 60°$. Neka su $E, F, G$, redom sredine duži $AD, BC, DC$ i neka se prave $AF$, $BE$ sijeku u $M$. Papir je savijen oko prave $BE$ tako da je ravan $ABE$ okomita na ravan $BCDE$. Odrediti površinu trougla $\triangle AMG$. $[37,5\sqrt{3}\ \text{cm}^2]$

(#) Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

Rj.




PQ tetiva

$\sphericalangle PUQ$ tupi periferiski ugao nad tetivom PQ

$\sphericalangle PVQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\sphericalangle PVQ + \sphericalangle PUQ = 180°$.

Neka je $\sphericalangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\sphericalangle PVQ = \frac{1}{2} \sphericalangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\sphericalangle PWQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

pa je $\sphericalangle PWQ = \frac{1}{2} \sphericalangle PSQ \overset{(*)}{\Rightarrow} \sphericalangle PVQ = \sphericalangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\sphericalangle PUW = \omega$ i $\sphericalangle QUW = \alpha$

(ovo su oštri periferiski uglovi nad tetivama PW i QW)

tada na osnovu prvog zadatka imamo

$\sphericalangle PSW = 2\omega$ i $\sphericalangle QSW = 2\alpha$.

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\alpha = 360°$ $\quad /:2$

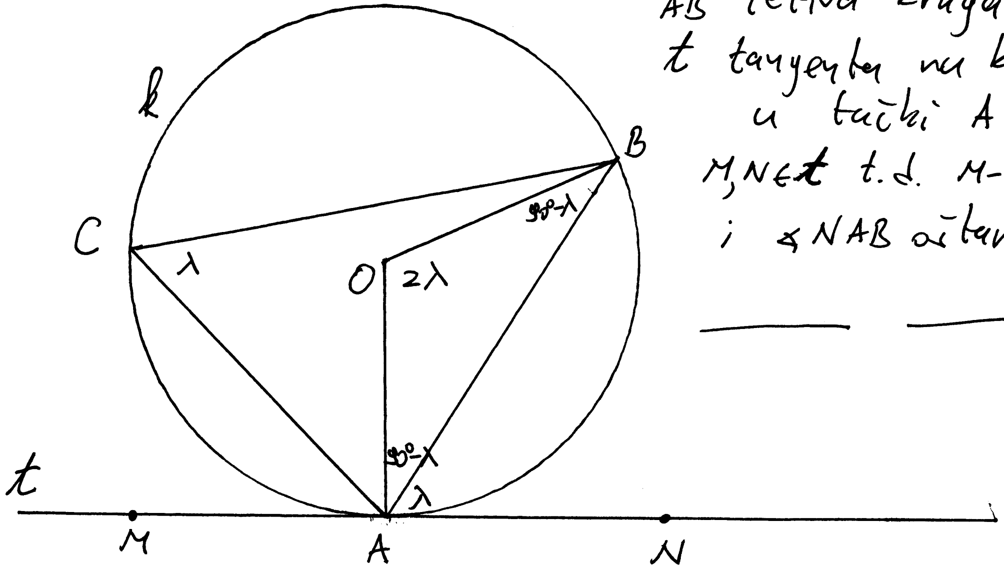
$\lambda + \omega + \alpha = 180°$

tj. $\sphericalangle PVQ + \sphericalangle PUQ = 180°$

q.e.d.

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.




$k(O,r)$ dati krug
$AB$ tetiva kruga
$t$ tangenta na krug u tački $A$
$M, N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$

---

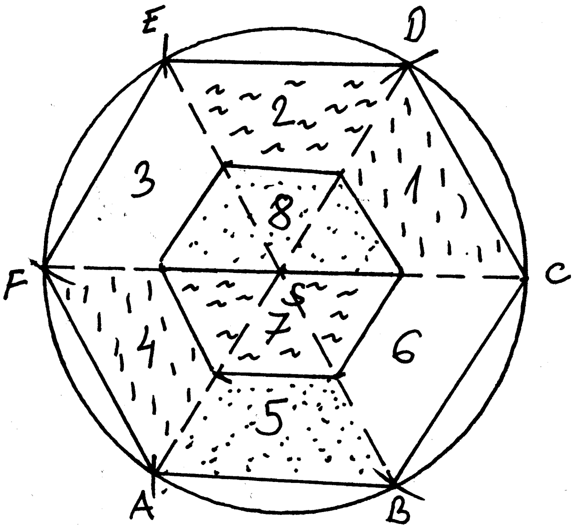
$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90^\circ - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

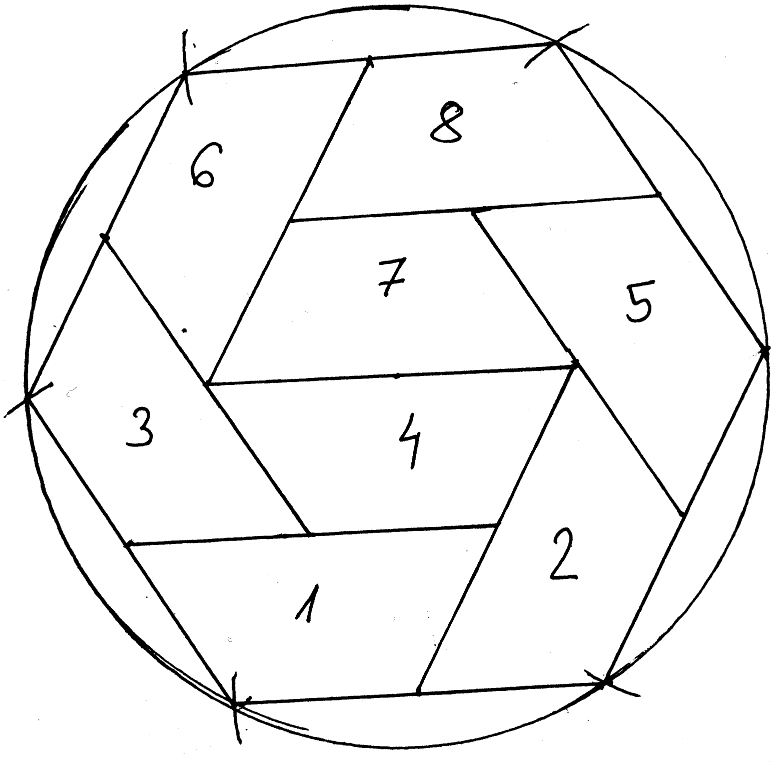
(#) U dati pravilan šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova. (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ABCDEF ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$) i dijagonale $AD$, $BE$ i $CF$ se polove.) Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

Rj.




Označimo sa $S$ presjek dijagonala. Posmatrajmo srednje linije trouglova $\Delta ABS$, $\Delta BCS$, $\Delta CDS$, $\Delta EDS$, $\Delta EFS$. Srednje linije ovih trouglova su podudarne među sobom. Ovo nas lagano vodi do rješenja zadatka. (vidi sliku lijevo)

Iskoristivši neke druge osobine možemo riješiti zadatak i na drugi način:



㊍ Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla ($P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$).

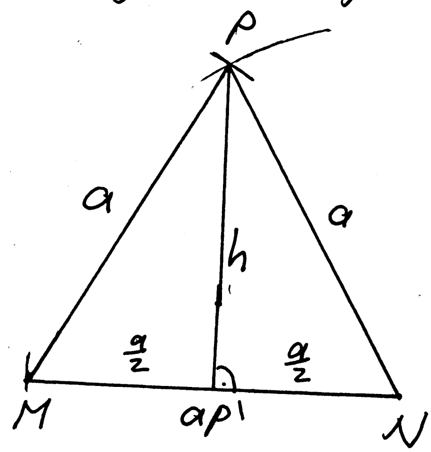
Rj:

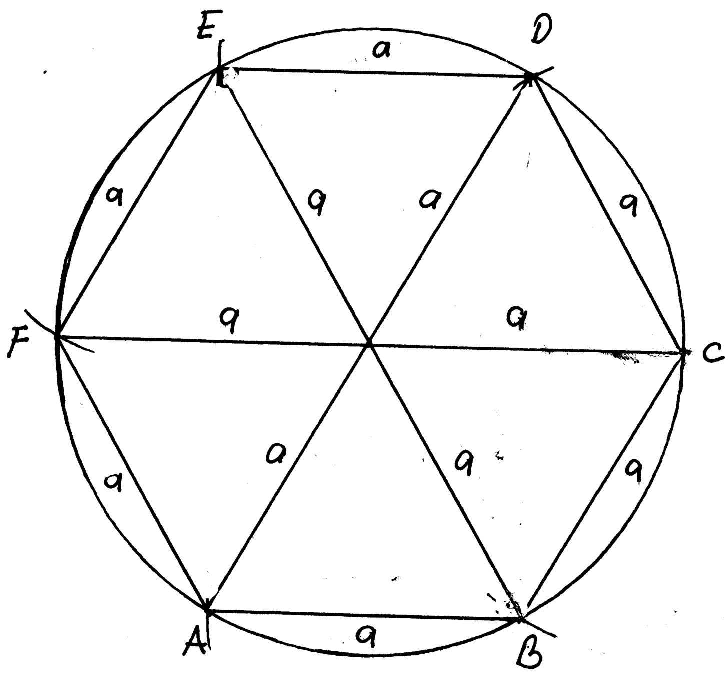
(ovo nije teško dokazati)

Pravilan šestougao se sastoji od 6 jks trouglova!

Posmatrajmo jks $\Delta MNP$.

$$P_{\Delta MNP} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pravougli } \Delta}}{P_{\Delta PP'M}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pravougli } \Delta}}{P_{\Delta PP'N}} = \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2} + \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2}$$




$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

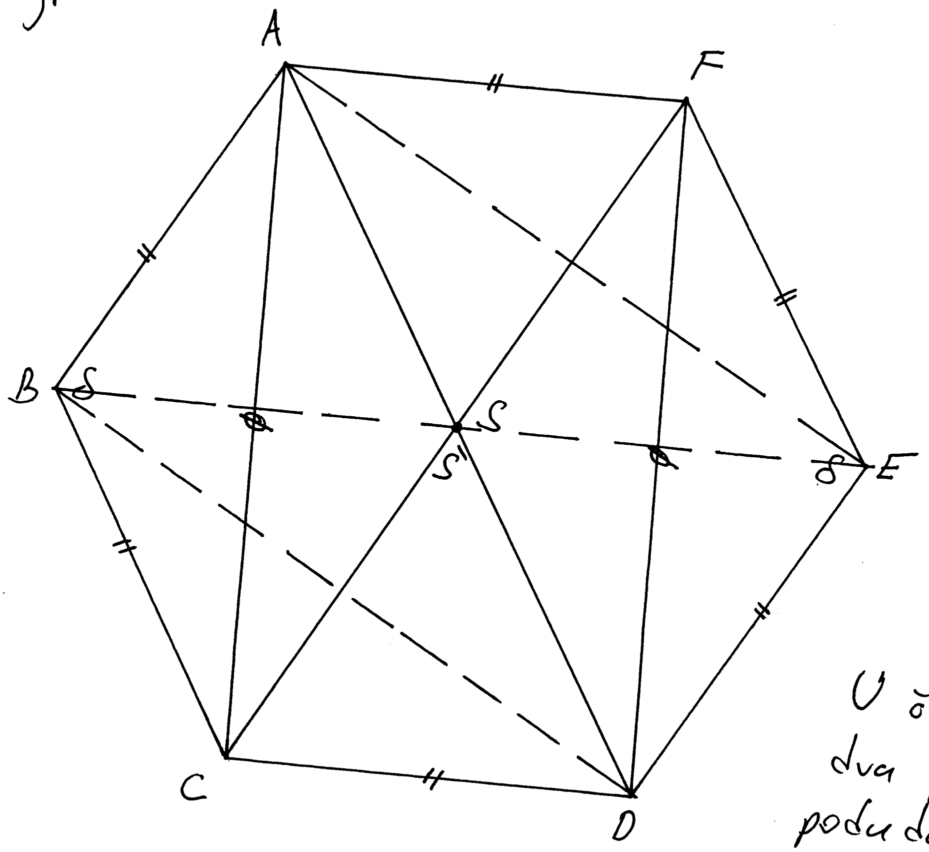
$$P_{\Delta MNP} = \frac{a}{2}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = 6\cdot P_{\Delta MNP} = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

# Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.




Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.
Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong EF \\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četvorouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspramnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

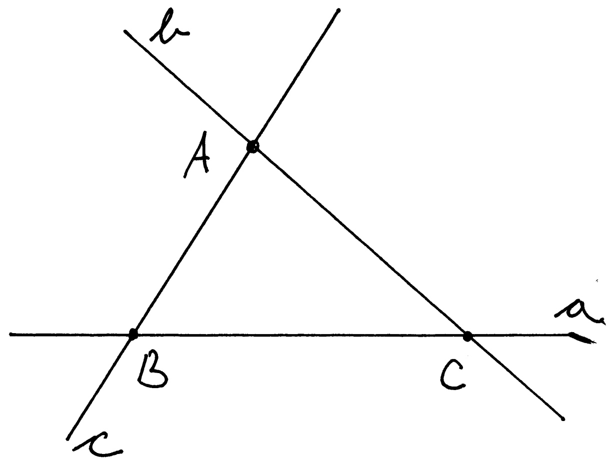
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow \text{dijagonale } AD, CF \text{ i } BE \text{ se sijeku u tački } S$$

q.e.d.

(#) Skup pravih ima osobinu da se svake dvije prave iz tog skupa sijeku. Ako sve prave iz tog skupa ne prolaze kroz istu tačku dokazati da sve one pripadaju istoj ravni.

Rj. Pretpostavimo da postoje tri prave $a$, $b$ i $c$ koje zadovoljavaju uslove zadatka, a ne prolaze kroz istu tačku




Neka je

$b \cap c = \{A\}$

$a \cap c = \{B\}$

$a \cap b = \{C\}$

Tačke $A$, $B$ i $C$ su nekolinearne (ZAŠTO?) i određuju ravan $\alpha$.

Sad primjetimo da

$B, C \in \alpha$, $p(B,C) \equiv a \Rightarrow a \subseteq \alpha$

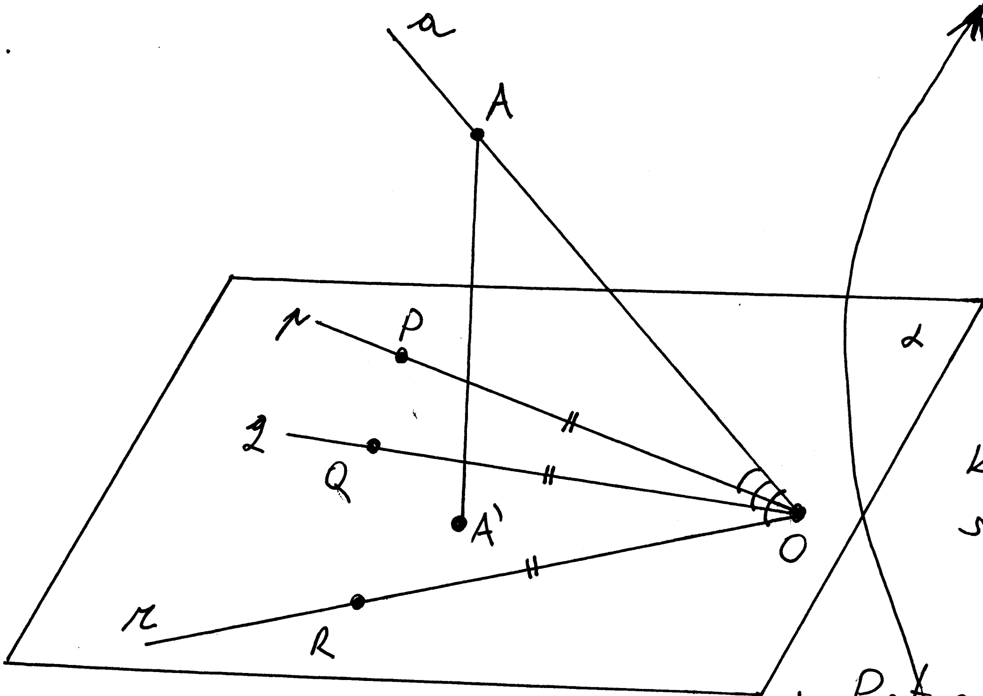
$A, C \in \alpha$, $p(A,C) \equiv b \Rightarrow b \subseteq \alpha$

$A, B \in \alpha$, $p(A,B) \equiv c \Rightarrow c \subseteq \alpha$

Neka je $m$ proizvoljna prava iz navedenog skupa. Kako prava $m$ siječe pravu $a$ i pravu $b$ i pravu $c$, koje nemaju zajedničku tačku ($a \cap b \cap c = \emptyset$), onа sa ravni $\alpha$ ima bar dvije zajedničke tačke, odakle slijedi $m \subseteq \alpha$. Prema tome, sve prave pripadaju ravni $\alpha$.

# Prava $a$ siječe ravan $\alpha$ u tački $O$ i pri tome obrazuje podudarne uglove sa tri prave koje prolaze kroz tačku $O$ i leže u ravni $\alpha$. Dokazati da je prava $a$ normalna na ravan $\alpha$.

Rj.




Neka su $p$, $q$ i $r$ tri prave u ravni $\alpha$ koje prolaze kroz tačku $O$ i pri tome je $\measuredangle ap = \measuredangle aq = \measuredangle ar$. Neka su $P$, $Q$ i $R$ redom tačke na pravima $p$, $q$ i $r$ za koje vrijedi $PO \cong QO \cong RO$. Primjetimo da tačke $P, Q$ i $R$ pripadaju krugu sa centrom u tački $O$ poluprečnika $PO$. Neka je $A$ proizvoljna tačka na pravoj $a$ i neka je $A'$ njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$. Ako prava $a$ nije normalna na ravan $\alpha$ tada $O \neq A'$. Ako posmatramo trouglove $\Delta APO$, $\Delta AQO$, $\Delta AQR$ iz podudarnosti SUS imamo $\Delta APO \cong \Delta AQO \cong ARO$ iz čega slijedi $AP \cong AQ \cong AR$. Dalje, kako je $p(A,A') \perp \alpha$, iz pravouglih trouglova $\Delta AA'P$, $\Delta AA'Q$, $\Delta AA'R$ slijedi $A'P \cong A'Q \cong A'R$.

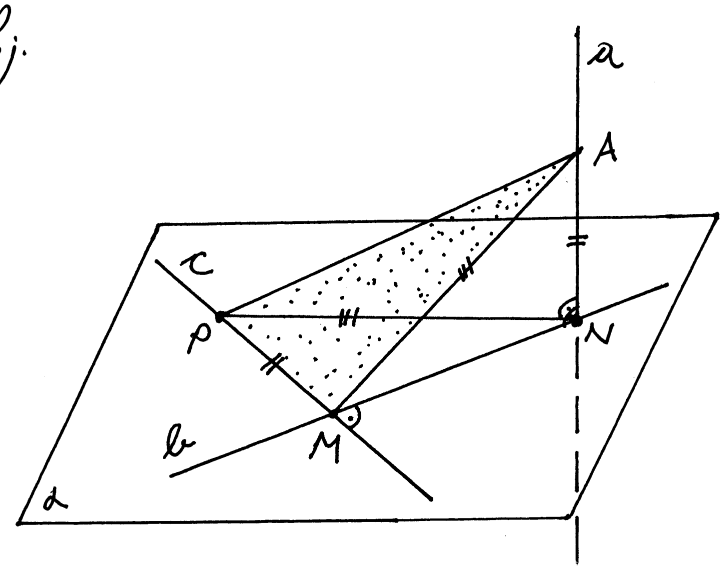
nastavak: Sad kako je $A'P \cong A'Q$ to $A' \in$ simetrali stranice $PQ$, iz $A'R \cong A'Q \Rightarrow$ $A' \in$ simetrali $QR$ i iz $A'P \cong A'R \Rightarrow$ $A' \in$ simetrali $PR$. Kako se simetrale $\Delta PQR$ sijeku u istoj tački to $O \equiv A'$ #kontradikcija.

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome itd.

# Prava $a$ je normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $N$. Neka je $b$ proizvoljna prava ravni $\alpha$ incidentna sa tačkom $N$. Ako je $M$ $(M \neq N)$ tačka prave $b$, i $c$ prava ravni $\alpha$ koja sadrži tačku $M$ i normalna je na pravu $b$, tada je prava $c$ normalna na pravu $p(M,A)$, gdje je $A$ proizvoljna tačka prave $a$. Dokazati.

Napomena: Ova tvrdnja je poznata pod imenom Teorema o tri normale.

Rj.




$a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{N\}$
$b$ proizv. prava, $N \in b$
$c \perp b$, $M \in b$, $M \in c$
$A$ proizv. tačka $\in a$

$\Rightarrow p(M,A) \perp c$.

Rješenje 1

Izaberimo tačku $P$ na pravoj $c$ takvu da $MP \cong AN$, i posmatrajmo trouglove $\triangle MNA$ i $\triangle NMP$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong PM \\ \angle ANM \cong \angle NMP = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. SUS}} \triangle MNA \cong \triangle NMP \Downarrow NP \cong MA$$

Sad posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle ANP$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong AN \\ MA \cong PN \\ AP \cong AP \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{pod SSS}} \triangle AMP \cong \triangle PNA$$

$$\Downarrow$$

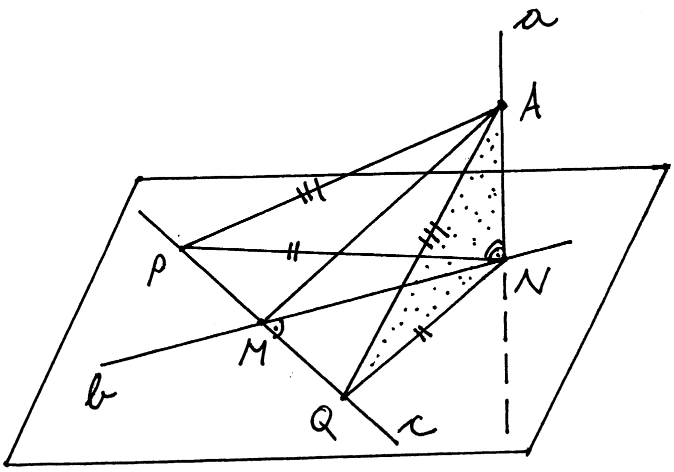
$$\sphericalangle PMA \cong \sphericalangle PNA.$$

Kako je $\sphericalangle ANP =$ prav ugao (ZAŠTO?) to je

$\sphericalangle AMP =$ prav ugao

q.e.d.

Rešenje 2



Izaberimo tačke $P$ i $Q$ na pravoj $c$, tako da je $M$ sredina duži $PQ$. Posmatrajmo trouglove $\triangle MNP$ i $\triangle MNQ$.

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ \sphericalangle NMP \cong \sphericalangle NMQ = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{SUS}} \triangle MNP \cong \triangle MNQ$$

$$\Downarrow$$

$$PN \cong NQ$$

Sad posmatrajmo trouglove $\triangle PNA$ i $\triangle QNA$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PN \cong QN \\ \sphericalangle PNA \cong \sphericalangle QNA = 90^\circ \\ AN \cong AN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. SUS}} \triangle PNA \cong \triangle QNA$$

$$\Downarrow$$

$$PA \cong QA$$

Na kraju posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle AMQ$

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ PA \cong QA \\ AM \cong AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. SSS}} \triangle PMA \cong \triangle QMA$$

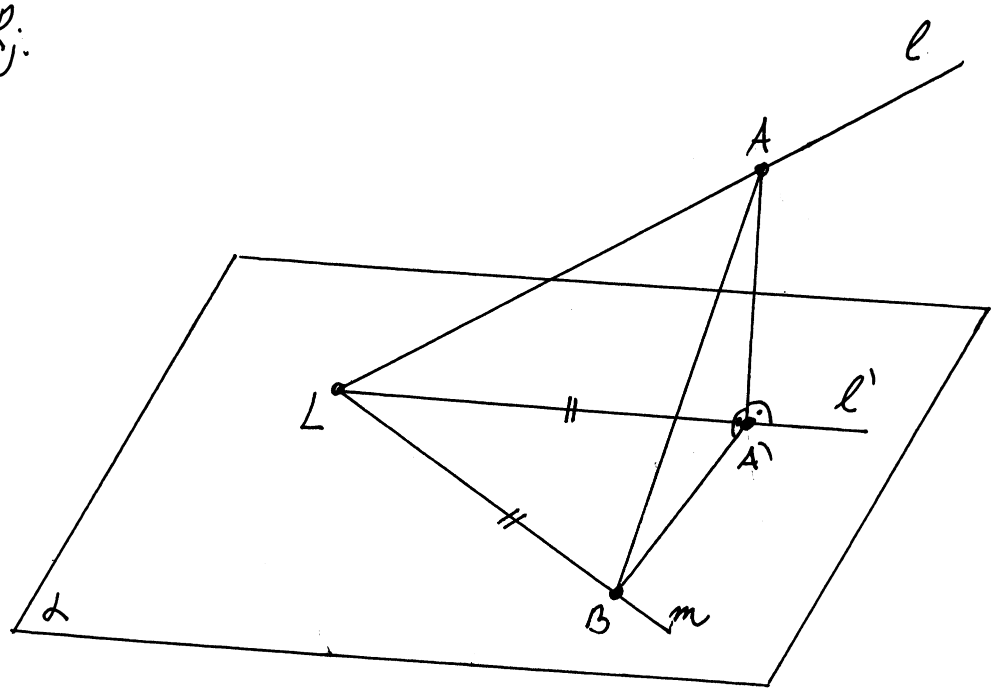
$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle PMA \cong \sphericalangle AMQ.$$

Kako su ovo dva naporedna ugla to je $p(A,M) \perp c$ q.e.d.

(#) Neka je $l$ prava koja nije normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $L$. Od svih pravih ravni $\alpha$ koje prolaze kroz tačku $L$, najmanji ugao sa pravom $l$ obrazuje njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$. Dokazati.

Rj.




tada je $l' = p(L, A')$ normalna projekcija poluprave $l$ na ravan $\alpha$

Neka je $A$ proizvoljna tačka poluprave $l$, i neka je $A'$ njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$ (ZAŠTO? – $A, L, A'$ su nekolinearne tačke, one određuju neku ravan $\beta$, $l' \subseteq \alpha \cap \beta$). Neka je dalje $m$, $m \neq l'$ proizvoljna poluprava ravni $\alpha$, čiji je početak tačka $L$. Trebamo dokazati da je $\measuredangle ALm > \measuredangle ALl'$.

Obilježimo sa $B$ tačku poluprave $m$ takvu da je $LB \cong LA'$. Kako je $p(A, A') \perp \alpha$ to je $\measuredangle AA'B = 90^\circ$ pa je $AB > AA'$. Sada se prisjetimo sljedeće teoreme iz EG1:

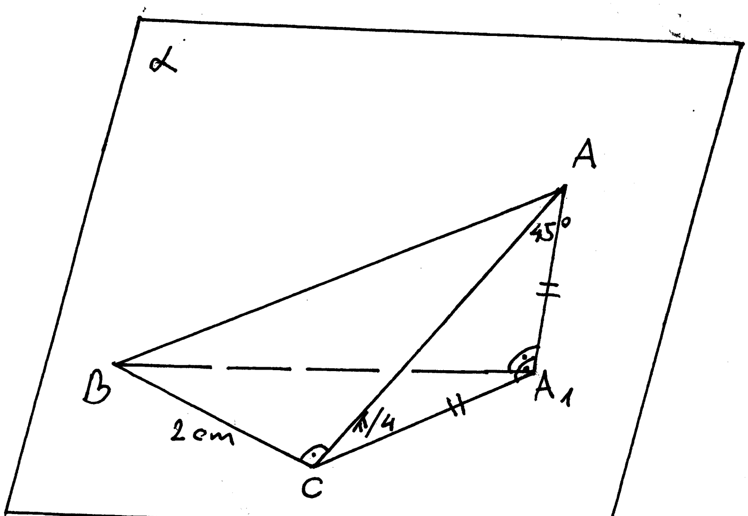
Teo. Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ važi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$ tada $BC > B_1C_1$ akko $\measuredangle BAC > \measuredangle B_1A_1C_1$.

Sad ako posmatramo trouglove $\triangle ALA'$ i $\triangle ALB$ kako je $AL \cong AL$, $LA' \cong LB$ i $AB > AA'$ prema navedenoj teoremi $\measuredangle ALB > \measuredangle ALA'$ q.e.d.

prostora

(#) Pravougli trougao $\Delta ABC$, sa pravim uglom kod tjemena $C$, naslanja se katetom $BC$ na ravan $\alpha$ i nagnut je prema ravni pod uglom od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti odstojanje tjemena $A$ od ravni $\alpha$, ako je $BC = 2\,cm$ i $AB : AC = 3 : 1$.

Rj.




Ako sa $A_1$ označimo ortogonalnu projekciju tačke $A$ na ravan $\alpha$, u zadatku se traži da odredimo dužinu $AA_1$.

$\Delta AA_1C$ pravougli i $\measuredangle ACA_1 = 45° \Rightarrow \measuredangle CAA_1 = 45°$

$\Rightarrow AA_1 \cong A_1C \Rightarrow AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 2AA_1^2$

$AC = \sqrt{2}\,AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}AC \quad \ldots(1)$

$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = 3AC$

$\Delta ABC$ pravougli $\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9AC^2 - AC^2$

$BC^2 = 8AC^2$

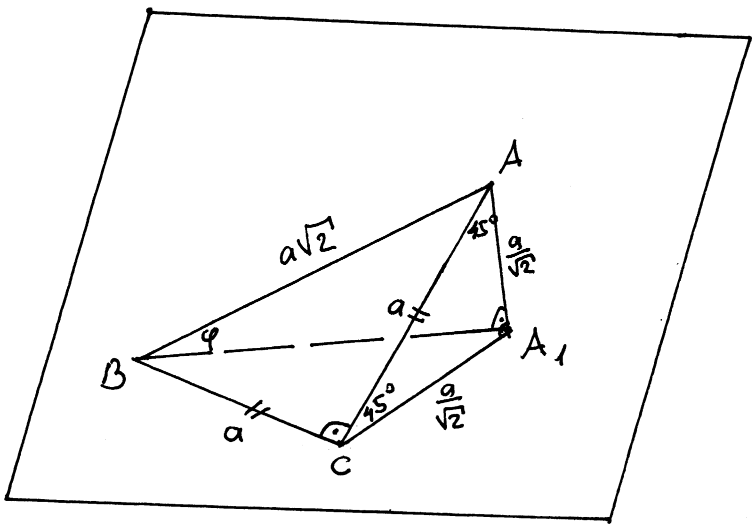
$BC = 2 \Rightarrow BC^2 = 4$

$\Rightarrow 8AC^2 = 4 \Rightarrow AC^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \xRightarrow{(1)} AA_1 = \frac{1}{2}$

# Nastavak prethodnog zadatka.

Odrediti ugao $\varphi$ između hipotenuze i ravni $\alpha$.

Rj.

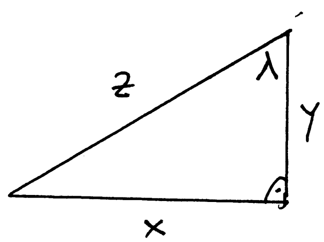



$\triangle ABC$ jkk pravougli

$AB^2 = a^2 + a^2$

$AB = a\sqrt{2}$

Kako glasi definicija sinus ugla pravouglog trougla?




$\sin\lambda = \frac{x}{z}$

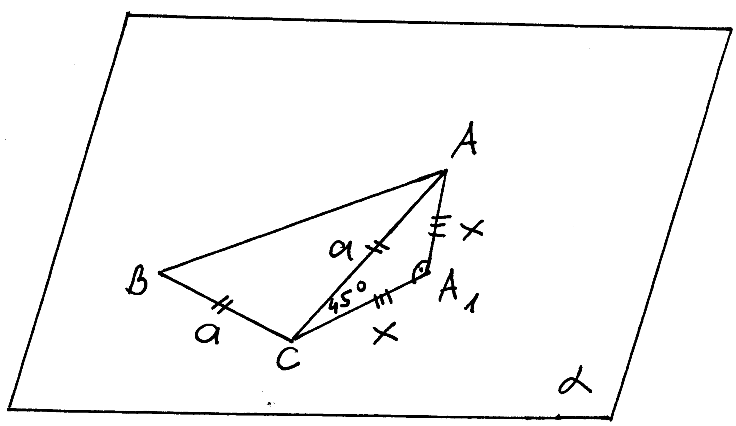
$\cos\lambda = \frac{Y}{z}$

Prema tome $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AB} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$

(#) Jedna od kateta jednakokrakog pravouglog trougla $\Delta ABC$ ($AC$ i $BC$ su katete, $AB$ hipotenuza) nalazi se u ravni $\alpha$, a druga je nagnuta prema ravni pod uglom od $45°$. Ako je $A_1$ ortogonalna projekcija tačke $A$ na ravan $\alpha$, a stranica $BC$ ima dužinu $a$, izračunati dužine stranica trougla $\Delta ACA_1$.

Rj.




$\Delta ABC$ jkk $\overset{BC=a}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow AC=a$.

$A_1$ ortogonalna projekcija

$\Rightarrow AA_1 \perp CA_1$

Zbir uglova u $\Delta AA_1C$ je $180°$ $\Rightarrow \measuredangle CAA_1=45°$.

$\Delta AA_1C$ jkk pravougli pa prema Pitagorinoj teoremi

$$a^2=x^2+x^2$$

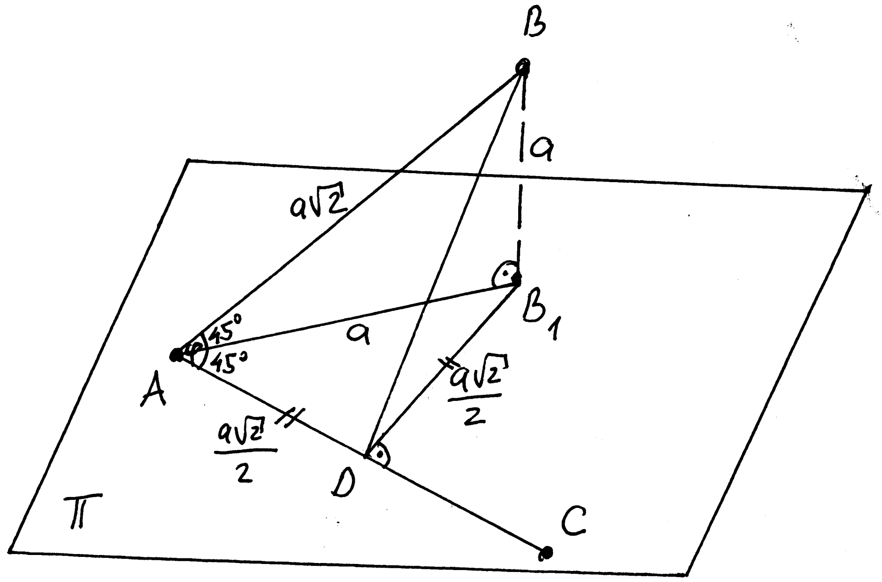
$$2x^2=a^2$$

$$x^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Dužine stranica $\Delta ACA_1$ su $AC=a$, $CA_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $AA_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

(#) Duž $AB$ je nagnuta prema ravni $\pi$ pod uglom od $45°$. Druga duž, duž $AC$, leži u ravni $\pi$ i sa projekcijom duži $AB$ određuje ugao od $45°$. Izračunati ugao $\measuredangle BAC$.

Rj.




Neka je $AB_1$ projekcija duži $AB$ na ravan $\pi$. Primjetimo da je $\Delta ABB_1$ pravougli (ZAŠTO?), a kako je $\measuredangle BAB_1 = 45°$
$\Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 45° \Rightarrow \Delta ABB_1$ jkk pravougli.

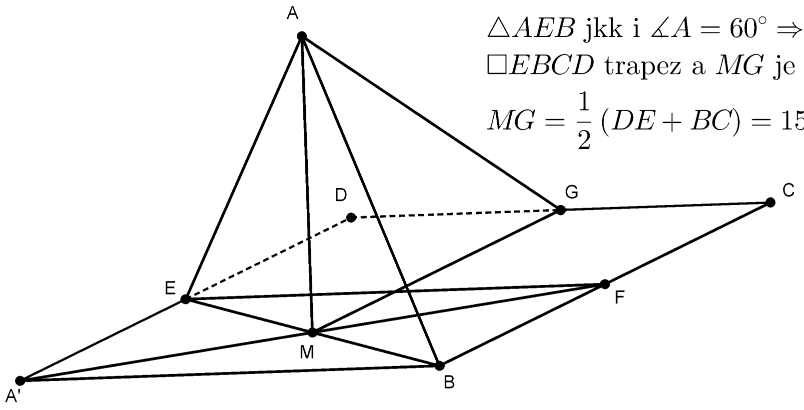
Pa ako stranicu $AB_1$ označimo sa $a$ imamo da $BB_1 = a$
$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Sad odredimo tačku $D$ na pravoj $AC$, tako da je $B_1D \perp AC$. Primjetimo da je trougao $\Delta ADB_1$ jkk pravougli (ZAŠTO?)
$\Rightarrow AD = DB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ZAŠTO?).

Sad ako posmatramo prave $p(A,C)$, $p(B_1,D)$, $p(B,B_1)$
Prema teoremi o tri normale slijedi da je $BD \perp AC$.

$\Delta ABD$ pravougli $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Na papiru je nacrtan paralelogram $\square ABCD$ takav da je $AD \cong 2AB = 20\,cm$ i ugao $\measuredangle A = 60^\circ$.
Neka su $E, F, G$ sredine duži...




Prije nego što smo savili papir $\square ABFE$ je romb i $AF \perp BE$ u tački M.
$AM \perp$ na pravu koja je dobijena kao presjek dvije okomite ravni.
$AM \perp$ ravan $BCDE \Rightarrow AM \perp MG \Rightarrow \measuredangle AMG = 90^\circ$.
$\triangle AEB$ jkk i $\measuredangle A = 60^\circ \Rightarrow \triangle AEB$ jks $\Rightarrow AM = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}\,cm$.
$\square EBCD$ trapez a $MG$ je srednja linija trapeza.

$$MG = \frac{1}{2}(DE + BC) = 15\,cm \Rightarrow P_{\triangle AMG} = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} \cdot 15) = 37,5\sqrt{3}\,cm^2$$